Encontro de Investigação em Educação Matemática

Ensino e aprendizagem da álgebra

EIEM 2011

ACTAS

Maria Helena Martinho
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Isabel do Vale
João Pedro da Ponte

7 e 8 de Maio de 2011
Póvoa de Varzim

EIEM 2011

Ensino e Aprendizagem da Álgebra

Encontro de Investigação em Educação Matemática

Póvoa de Varzim, 7-8 Maio 2011

Maria Helena Martinho, Rosa Antónia Tomás Ferreira
Isabel Vale, João Pedro da Ponte (Eds.)

Póvoa de Varzim
7-8 Maio, 2011

Conteúdo

Prefácio v

Conferências Plenárias 1

Um programa de formação contínua e o desenvolvimento do pensamento algébrico de professores do 1º ciclo do ensino básico
Teresa Pimentel 3

Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años
Marta Molina 27

Tecnologia e Avaliação do Ensino-aprendizagem da Álgebra 53

Resumo Grupo de Discussão
Joana Brocardo, António Domingos 55

A calculadora gráfica no ensino das funções: Implicações sobre a prática de uma professora
Helena Rocha 57

Tecnologias e pensamento algébrico: Conhecimento e prática de duas professoras de matemática
José Duarte, Joana Brocardo e João Pedro da Ponte 71

Web 2.0 e padrões na aprendizagem da matemática - Um estudo de caso no 8º ano de escolaridade
Maria Luísa Almeida e Isabel Cabrita 87

Como reconhecer o ente matemático se ele tem diferentes faces?
Miguel Silva e António Domingos 107

Representações múltiplas de funções em ambiente com geogebra: Um estudo sobre o seu uso com alunos do 9º ano
Ana Patrícia Gafanhoto e Ana Paula Canavarro 125

Provas de aferição e exames: A qualidade das questões de álgebra
Mário Ceia, Adelaide Filipe e Cláudia Santos 149

Representações no Ensino-aprendizagem da Álgebra 173

Resumo Grupo de Discussão
Helena Martinho, João Pedro da Ponte 175

As representações matemáticas nas concepções de professores do 1º ciclo do ensino básico: Um estudo exploratório
João Pedro da Ponte e Isabel Velez 177

Compensação e variação: Um estudo sobre o pensamento relacional de alunos do 4º ano de escolaridade
Célia Mestre e Hélia Oliveira 195

A aprendizagem da comparação e ordenação de números racionais através de uma abordagem exploratória
João Pedro da Ponte e Marisa Quaresma 219

Representações no desenvolvimento do pensamento algébrico
Sandra Nobre, Nélia Amado e João Pedro da Ponte 239
O sentido do símbolo de alunos do 10º ano de escolaridade
Daniela Nogueira e Floriano Viseu 261
O sentido de símbolo de um aluno e a Álgebra do 12º ano
Maria Teresa Grossmann e João Pedro da Ponte 281
O sinal de igual: Um estudo vertical
Laura Bandarra 305

Gestão Curricular no Ensino-aprendizagem da Álgebra 323
Resumo Grupo de Discussão
Rosa Antónia Ferreira, Isabel Vale 325
Generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo no sexto ano de escolaridade
Ana Barbosa 327
Raciocínio matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos do 9º ano
Joana Mata Pereira e João Pedro da Ponte 347
Padrões em contextos figurativos no 2º ano da licenciatura em educação básica
António Guerreiro 365
Situações de modelação na formação inicial de professores
Neusa Branco e João Pedro da Ponte 383
"Para passar de dm^2 para cm^2 tenho de andar duas casas!": Conhecimento do professor e implicações nas possíveis aprendizagens dos aluno
Carlos Miguel Ribeiro 405
O erro como ponte para a aprendizagem das equações: O caso da Maria
Luísa Vale, Rosa Antónia Ferreira e Leonor Santos 421
Sequências e regularidades no 7º ano: Uma abordagem no quadro do novo programa
Paula Teixeira e Henrique Guimarães 441

Índice de Autores 465

Prefácio

O Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM) é um evento anual, de carácter temático, que se realizou, em 2011, no *Axis Vermar Conference & Beach Hotel*, na Póvoa de Varzim, a 7 e 8 de Maio e cujo tema foi "O ensino e a aprendizagem da Álgebra´´.

O EIEM 2011 teve como propósito principal reflectir sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra, em todos os níveis de ensino desde o básico ao secundário, assim como sobre a formação e desenvolvimento profissional de professores. Para isso, procurou partilhar resultados de investigação, analisar os seus fundamentos, identificar desafios e novos rumos, de modo a perspectivar e promover futuras investigações bem como uma maior ligação com o terreno da prática profissional e da formação de professores.

Reunindo investigadores nacionais e estrangeiros, o programa do EIEM 2011 contou com três conferências plenárias a cargo de quatro oradores convidados. Na primeira conferência, *Teresa Pimentel* (Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo) aborda a influência das dinâmicas de um programa de formação contínua no desenvolvimento do pensamento algébrico de professores do 1º ciclo do Ensino Básico. Na segunda conferência, *Marta Molina* (Universidad de Granada, Espanha) descreve uma experiência de ensino focada no desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade. Finalmente, na última conferência, *João Pedro da Ponte* e *Hélia Oliveira* (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa) reflectem sobre os estudos de investigação que têm sido realizados na Universidade de Lisboa, nos últimos cinco anos, sobre a temática central do EIEM 2011: o ensino-aprendizagem da Álgebra.

As comunicações apresentadas no EIEM 2011 foram organizadas em três grupos de discussão subordinados a outros tantos aspectos relacionados com o tema central do encontro: (1) *Tecnologia e Avaliação do Ensino-Aprendizagem da Álgebra*, grupo dinamizado por Joana Brocardo e António Domingos, com seis comunicações; (2) *Representações no Ensino-Aprendizagem da Álgebra*, dinamizado por João Pedro da Ponte e Maria Helena Martinho, com sete comunicações; e (3) *Gestão Curricular no Ensino-Aprendizagem da Álgebra*, dinamizado por Isabel Vale e Rosa Antónia Tomás Ferreira e igualmente com sete comunicações.

Todas as comunicações apresentadas foram submetidas a um processo de revisão, liderado pelos dinamizadores de cada grupo de discussão (dois dinamizadores por grupo) e com a colaboração de trinta e cinco revisores. A procura de qualidade nas comunicações apresentadas através do processo de revisão e, sobretudo, a discussão gerada durante o EIEM 2011 constituem as mais-valias deste encontro temático. De facto, a reflexão realizada por um conjunto alargado de investigadores em Educação Matemática, formadores de professores e professores dos diversos níveis de ensino interessados na investigação centrada num tema específico, constitui uma forma eficaz de produzir conhecimento neste campo de investigação, robustecendo os trabalhos já realizados e problematizando novos aspectos relevantes para investigação futura.

Póvoa de Varzim, 8 de Maio de 2011
Os Organizadores

Organização

Título
Ensino e Aprendizagem da Álgebra
Encontro de Investigação em Educação Matemática 2011

Organização
Maria Helena Martinho, Rosa Antónia Tomás Ferreira, Isabel Vale e João Pedro da Ponte

ISBN 978-972-8746-98-8

Corpo de Revisores

Apoios

Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho
Centro de Matemática da Universidade do Porto
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Fundação para a Ciência e a Tecnologia

Conferências Plenárias

UM PROGRAMA DE FORMAÇÃO CONTÍNUA E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DE PROFESSORES DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Teresa Pimentel
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo
teresapimentel@ese.ipvc.pt

Resumo

Esta apresentação aborda um estudo centrado num programa de formação contínua em Matemática para professores do 1º ciclo do ensino básico que procurava compreender a influência da dinâmica da formação em quatro professores participantes. Apresentam-se alguns elementos sobre os quatro casos estudados que ilustram os principais resultados do estudo, nomeadamente os relativos às características do programa de formação que se revelaram indutoras de mudança e de desenvolvimento do conhecimento matemático e didáctico dos professores, sobretudo ao nível do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Desenvolvimento profissional, Conhecimento matemático, Conhecimento didáctico, Pensamento algébrico.

Introdução

As fragilidades no ensino e aprendizagem da matemática em todos os níveis de ensino são, no nosso país, uma evidência. Esta constatação baseia-se, entre outros, em resultados das provas de aferição e dos exames nacionais de matemática; nas taxas de insucesso dos alunos ao longo do percurso escolar; e nos indicadores dos estudos internacionais PISA (GAVE, 2004)[1] e TIMSS (Amaro, Cardoso & Reis, 1996). E aqui entram em jogo os principais agentes da mudança nos processos de ensino e aprendizagem: os professores. O tipo de ensino preconizado nos documentos curriculares mais recentes a nível nacional e internacional é muito diferente daquele que os próprios professores, muitos deles, experimentaram enquanto alunos de matemática. Assim, a formação de professores, promovendo no professor uma maior segurança, autonomia, iniciativa e capacidade de reflexão, reveste-se de grande importância no âmbito do ensino da matemática no nosso país. De facto, esta parece ser problemática em todos os níveis de ensino mas particularmente débil nos níveis iniciais (Ponte, 2000). Estes problemas sugerem a necessidade de uma grande aposta na formação

[1] Os últimos indicadores apontam substanciais melhorias.

contínua. Com esta finalidade, foi lançado em 2005 pelo Ministério da Educação o Programa de Formação Contínua para professores do 1.º ciclo do Ensino Básico (ME, 2005). Este programa, de frequência voluntária durante um ou dois anos, inclui as seguintes vertentes fundamentais: sessões conjuntas de formação, prática de sala de aula acompanhada pelo formador, trabalho autónomo e reflexão sobre a prática. Estas diversas vertentes constituem uma mudança radical e um corte com os modelos tradicionais de formação contínua, sobretudo no que se refere ao acompanhamento em sala de aula. Um programa de formação com estas características inovadoras, que abrange um vastíssimo número de professores do 1.º ciclo, a nível nacional, não era prática corrente no nosso país e considerou-se de especial importância haver estudos naturalistas e longitudinais, estendendo-se por um período alargado de tempo, que permitissem contribuir para a discussão das suas virtualidades.

Delinearam-se algumas questões servindo de orientação para o trabalho e a que se procurou dar resposta em relação a cada um dos professores envolvidos: (1) Em que medida o programa de formação contínua contribui para incrementar o conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do 1.º ciclo? (2) Como se caracterizam as práticas lectivas dos professores do 1.º ciclo em estudo? (3) Qual o impacto do referido programa: (a) nas práticas destes professores, designadamente quanto às dinâmicas produzidas e quanto à natureza das tarefas seleccionadas? (b) nas perspectivas dos professores participantes sobre a matemática e o seu ensino e aprendizagem e como se articulam essas perspectivas com as suas práticas? (c) nas atitudes e aprendizagens dos alunos envolvidos?

O conhecimento profissional do professor e a formação contínua

De acordo com vários autores (e.g. Tardif & Gauthier, 2001; Fenstermacher, 1994) identifica-se como saber tudo aquilo que tem estatuto de racionalidade, ou seja, os pensamentos, as ideias, os julgamentos, os discursos, os argumentos que são passíveis de ser justificados por quem os defende. O conhecimento, e em particular o conhecimento do professor, não é um fenómeno estático mas concebido em termos de uma construção progressiva. Quanto à natureza do conhecimento podem distinguir-se duas correntes fundamentais (Roldão, 2007): Uma linha mais analítica preconizada por Shulman (1986), que especifica várias componentes do conhecimento do professor, e uma outra, influenciada por Schön (1983), que parte da prática do professor e aí enraíza a construção do conhecimento do professor num processo reflexivo. Ambas são importantes, pois a primeira, mais normativa, permite desocultar a natureza do conhecimento profissional por análise das suas componentes e a segunda, mais descritiva, permite iluminar a sustentação do conhecimento profissional na reflexão na e sobre a prática. O conteúdo do conhecimento é neste trabalho desdobrado nas três formas de Shulman uma vez que são também as preconizadas pelo documento oficial do programa de formação contínua em que a investigação se situa: o conhecimento matemático, o conhecimento didáctico e o conhecimento curricular. Assim, procurou-se definir cada uma das categorias mas encontrou-se uma zona de sombra, de transição do conhecimento matemático para o conhecimento didáctico, já que o conhecimento matemático que o professor deve ter não é como o conhecimento dum matemático, isto é, o professor deve estar de posse dos conceitos puramente matemáticos que se prendem com os conteúdos que ensina mas deve possuir aquilo que é designado por alguns autores como o conhecimento matemático para ensinar (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Ma, 1999). Este conhecimento envolve não só o "saber que é assim" mas a compreensão profunda das ideias matemáticas e dos melhores modos de facilitar a sua compreensão pelos alunos e de fazer análise de erros, e neste aspecto aproxima-se da concepção de conhecimento didáctico de Shulman.

Schoenfeld (2008) defende que as decisões tomadas pelos professores no decurso da sua prática são função do seu conhecimento, objectivos e crenças. Este autor desenvolve um modelo, que se aplica a vários casos estudados, de rotinas didácticas que podem ter utilidade geral, ou seja, que poderão servir para outros professores aprenderem a usar. Ball, Lewis e Thames (2008) preocupam-se com o trabalho que o professor desenvolve para ajudar os alunos a fazer conjecturas matemáticas, identificando aspectos do trabalho matemático no qual os alunos estão envolvidos através do discurso da sala de aula, e usando esses aspectos para examinar o trabalho do professor. São eles: (a) nomear e usar terminologia; (b) fazer e interpretar conjecturas; e (c) avaliar afirmações matemáticas. O discurso de sala de aula é uma ferramenta essencial para moldar entre si o conteúdo matemático e o trabalho dos alunos, para o que é necessário preparar a matemática para o envolvimento dos alunos, bem como preparar os alunos para fazerem e aprenderem matemática. Esta tarefa do professor permanece muitas vezes invisível. O esforço feito para mostrar o trabalho dos professores com os seus alunos na sala de aula proporciona a aprendizagem dessas práticas e pode consequentemente originar uma generalização deste tipo de trabalho.

Os aspectos referidos permitem perspectivar a importância da formação contínua como parte do desenvolvimento profissional do professor. De facto, a formação inicial, mesmo de qualidade, não proporciona todos os conhecimentos necessários para a vida profissional e, no caso do 1.º ciclo, é muito difícil preparar bons professores de matemática em apenas quatro anos quando se começa com alunos que muitas vezes têm uma compreensão limitada da matemática. A investigação mostra haver uma estreita relação entre, por um lado, o conhecimento e a formação dos professores e, por outro, o sucesso das reformas e a melhoria das aprendizagens (e.g. Sowder, 2007). Tradicionalmente, a formação contínua tendia a consistir em programas centrados em cursos ou sessões de formação em que o formador ensinava teorias e técnicas, mas completamente desligados da prática. Houve, nos últimos anos, uma evolução, considerando-se a formação contínua como um processo muito mais complexo do que simplesmente desenvolver o conhecimento matemático dos professores, embora este seja fundamental (Ma, 1999; NCTM, 1991). Mas a par desse aspecto é necessário proporcionar aos professores experiências que os envolvam na acção (Fosnot & Dolk, 2001), realçando a componente reflexiva e de partilha e discussão já que a reflexão sobre a prática abre novas possibilidades para a acção (Serrazina, 2002). Reconhece-se ainda a importância de os professores analisarem explicitamente as implicações das suas próprias experiências de aprendizagem no seu ensino, uma vez que só é possível evoluir na prática de ensino se esta for analisada (Ball, 2009).

É neste contexto de mudança de paradigma da formação contínua que se situa o programa de formação contínua em que este trabalho assenta.

O ensino e a aprendizagem da matemática

Há unanimidade na consideração de que a matemática é importante e deve ser aprendida por todos os alunos. Mas que matemática ensinar e aprender? Actualmente as profissões são diferentes das dum passado próximo, exigindo outras capacidades, designadamente de resolução de problemas e de cooperação, e os trabalhos rotineiros tendem cada vez mais a ser executados por máquinas. Assim, é importante desenvolver nos alunos hábitos mentais para além de procedimentos rotineiros. Faz-se neste trabalho uma opção construtivista de ensino e aprendizagem coordenando perspectivas cognitivistas e socioculturais (Fosnot, 1999; Cobb, 1999). Estas opções têm fortes implicações nos conteúdos e no estilo de ensino da matemática. Na verdade, para uma aprendizagem que desenvolva capacidades de nível cognitivo elevado não são adequados os modelos de ensino tradicionais. É necessária uma grande atenção às tarefas a utilizar, pois são elas que constituem o ponto de partida da aprendizagem, ao promoverem a actividade matemática do aluno (NCTM, 2000; Mason & Johnston-Wilder, 2006). As tarefas devem ser ricas em ideias matemáticas, variadas, e devem constituir um desafio intelectual para os alunos. Contudo, a utilização de tarefas com estas características não garante, por si só, que os alunos melhorem a sua aprendizagem (Ball et al., 2008). Para além de outros factores, o professor pode influenciar o êxito da tarefa em termos de aprendizagem: como faz o questionamento, como organiza o trabalho, como apoia os alunos com dificuldades sem eliminar o desafio, como faz a síntese final em grande grupo, e de modo geral como gere a participação de modo que os alunos estabeleçam relações com representações do conteúdo e uns com os outros (Franke, Kazemi & Battey, 2007). Este aspecto da comunicação é fundamental pois permite ao professor conhecer o pensamento matemático dos alunos; mas também promove a compreensão dos alunos ao descreverem em pormenor as suas estratégias e porque é que elas funcionam. Esta afirmação pode ser desdobrada em duas interpretações diferentes e ambas importantes: o aluno, ao ter de explicar, aprofunda a sua própria compreensão e, por outro lado, com a explicitação do seu próprio pensamento está a fornecer aos colegas um modelo de pensar (Fosnot & Dolk, 2001).

O pensamento algébrico

Dentro dos temas curriculares da matemática do 1º ciclo, o tema do pensamento algébrico assumiu um papel fundamental neste estudo, por ter sido o tema escolhido para ancorar o trabalho autónomo dos professores participantes. Tradicionalmente, o estudo da álgebra esteve sempre afastado dos currículos de matemática do primeiro ciclo do ensino básico, por se pensar que a aritmética é fácil mas a álgebra é difícil e deve surgir mais tarde. No entanto, nos últimos anos têm surgido com especial relevo recomendações curriculares para a sua introdução a partir dos primeiros anos (NCTM, 2000; ME, 2001). O novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC,

2007) inclui este tema desde o primeiro ciclo. O que é o pensamento algébrico nos níveis elementares? Kieran (2004) apresenta a seguinte definição:

> O pensamento algébrico nos primeiros anos envolve o desenvolvimento de modos de pensar através de actividades para as quais o simbolismo da álgebra pode ser usado como ferramenta mas que não são exclusivas da álgebra e que podem ser abordadas sem qualquer uso de simbolismo algébrico, tais como, analisar relações entre quantidades, detectar a estrutura, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e predizer. (p. 149)

Em consonância com esta autora, Cai e Moyer (2008) definem o pensamento algébrico nos primeiros anos como "uma extensão da aritmética e da fluência de cálculo típicas dos primeiros anos de escolaridade à consideração mais profunda da estrutura matemática subjacente" (p.170). O desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos requer assim o desenvolvimento de modos de pensamento que resultam, entre outros, de detectar a estrutura, estudar a mudança, generalizar e justificar. Se os professores e os alunos trabalharem de forma integrada o pensamento aritmético e algébrico nos primeiros anos, a aritmética e a álgebra passarão a ser vistas como interligadas. E, deste modo, o estudo da álgebra nos anos subsequentes terá mais probabilidades de vir a ser facilitado por ser uma extensão natural da matemática dos primeiros anos. Esta visão alternativa da aritmética como uma parte da álgebra, na qual os números são tratados como instâncias de exemplos mais gerais (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007), destaca o facto de as ideias aritméticas, conceitos e técnicas terem um carácter potencialmente algébrico no sentido de que são generalizáveis. A Figura 1 clarifica esta interpretação da aritmética como parte da álgebra:

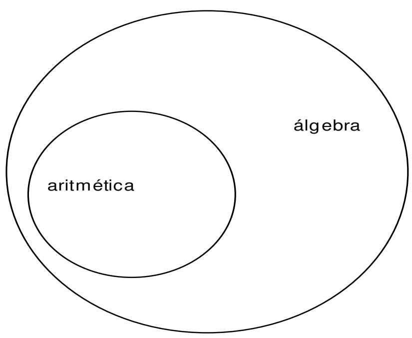


Figura 1. Carácter algébrico da aritmética (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007)

Neste enquadramento, ganha particular relevância o conceito de sentido do número. A aquisição do sentido do número envolve a compreensão do número e das operações e o seu uso para fazer juízos matemáticos e para desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações (McIntosh, Reys & Reys, 1992). A compreensão do sistema de numeração, por exemplo, ajuda a criança a organizar, comparar e ordenar números que encontra à sua volta, começando a descobrir os padrões inerentes ao sistema de numeração. Quando identificados, estes padrões fornecem um apoio poderoso à extensão da sequência de contagem. À medida que o aluno desenvolve a capacidade para detectar esses padrões, vai aprofundando a sua compreensão da ordenação e regularidade do sistema numérico e começa a usar esse conhecimento. Os alunos, ao aprenderem as operações elementares, compreendendo situações que podem ser modeladas pelas operações, vão simultaneamente observando e comentando padrões no sistema numérico. Esses padrões, emergindo naturalmente do trabalho, são a base não só da exploração de generalizações acerca do número e das operações mas também das práticas de formular, testar e justificar essas generalizações.

No desenvolvimento do sentido do número assume um papel de realce o cálculo mental. De facto, embora os algoritmos escritos formais tenham a vantagem de proporcionar um procedimento de rotina que funciona para todos os números, têm a desvantagem de não corresponder ao modo como as pessoas pensam nos números e de desencorajar os alunos de pensar nos números envolvidos como um todo ou de tomar decisões enquanto estão a realizar o cálculo. As estratégias de cálculo mental são muito diferentes: podem adaptar-se aos números em causa mas exigindo uma escolha de acordo com esses números, e deste modo necessitando de um conhecimento mais profundo do funcionamento dos números. Deste modo, o sentido do número, apoiado pelo cálculo mental, baseia-se na identificação de padrões numéricos e, dado que é promotor de processos de generalização desses mesmos padrões, pode considerar-se que constitui uma competência indispensável à emergência do pensamento algébrico.

Como se enquadra a generalização nestes processos? Usiskin (1999) argumenta que é produtivo e sensato trabalhar a álgebra no 1.º ciclo e que, mesmo sem se aperceberem, os professores ensinam e os alunos aprendem álgebra. Para justificar a sua tese, o autor define álgebra como uma linguagem com cinco aspectos fundamentais: incógnitas; fórmulas; padrões generalizáveis; representantes; e relações. Focamos aqui o terceiro ponto por ser o mais importante neste estudo. Por exemplo, multiplicar um número por

19 é o mesmo que multiplicá-lo por 20 e em seguida subtrair o número. Este é um caso especial da propriedade distributiva, cuja descrição algébrica é $19n = 20n - n$. Esta descrição gera uma analogia com a aritmética.

Na mesma linha da introdução precoce de ideias algébricas no currículo de matemática elementar através da algebrização da aritmética, outros autores (Rivera, 2006; Warren & Cooper, 2008; Radford, 2008) subscrevem a orientação do pensamento matemático das crianças a descoberta de relações funcionais no trabalho com padrões e a generalização. Neste sentido, também o trabalho desenvolvido pela equipa do projecto *Matemática e Padrões no ensino básico: perspectivas e experiências curriculares de alunos e professores* (Vale, Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel, 2009) apresenta a generalização como uma ideia poderosa que é o culminar de um processo em que os alunos passam por diversas experiências de aprendizagem que valorizam a descoberta, continuação, completamento e construção de padrões. A generalização pode ser formulada pelos alunos de modo intuitivo, recorrendo à linguagem corrente, ou mais formalizado, recorrendo à linguagem simbólica da matemática, às variáveis a às fórmulas, e apoia-se em várias formas de representação como desenhos, esquemas, tabelas e gráficos. Para atingir esse objectivo apresenta-se uma proposta didáctica que valoriza a descoberta de padrões em contextos visuais.

Depreende-se da revisão efectuada que a generalização surge como trave-mestra do pensamento algébrico. De acordo com Radford, Bardini e Sabena (2007), a ideia de generalização é elaborada como "uma mudança de atenção que conduz a pessoa a *ver* o geral no e através do particular" (pp. 525-526).

Kaput e Blanton (2001) e Blanton e Kaput (2003), reconhecendo como problemática a abordagem tardia da álgebra nos currículos, propõem o desenvolvimento do raciocínio algébrico de forma a aprofundar a compreensão dos alunos ao desenvolver neles competências de generalizar, bem como de exprimir e justificar generalizações. Para atingir este objectivo desenvolveram um programa de formação de professores cuja estratégia central é a de *algebrização* da experiência matemática dos professores, que se enraíza na atenção dada pelo professor a processos que conduzem os alunos a generalizarem o seu pensamento matemático e a exprimirem e justificarem as suas generalizações. Para uma melhor concretização das acções do professor nesse domínio recorre-se a um estudo de caso de Blanton e Kaput (2005) de uma professora do 3.º ano de escolaridade frequentando um programa de formação contínua centrado no pensamento algébrico, onde se caracterizam práticas de sala de aula que o promovem. A categorização a seguir apresentada na Tabela 1 é uma adaptação da realizada por estes autores e envolve o pensamento algébrico nas formas mais ligadas a este nível de ensino: como aritmética generalizada, como pensamento funcional e outros aspectos envolvendo generalização e justificação. No primeiro ponto de vista, a aritmética é usada como um domínio para expressar e formalizar generalizações. Na segunda acepção, a exploração e a generalização de padrões numéricos e geométricos permite a descrição de relações funcionais. O terceiro aspecto envolve outros processos de generalização e justificação mais complexos não especificados anteriormente, que podem indiciar que o pensamento algébrico é já um hábito mental nos alunos.

Tabela 1: Categorização das formas de pensamento algébrico (Adaptada de Blanton & Kaput, 2005).

Categorias de pensamento algébrico		
Aritmética generalizada	Pensamento funcional	Outros processos de generalização e justificação
A: Exploração de propriedades e relações entre números inteiros	E: Simbolização de quantidades e operação com expressões simbólicas	I: Uso de generalizações para a resolução de tarefas algébricas
B: Exploração de propriedades das operações sobre números inteiros	F: Descoberta de relações funcionais	J: Justificação, prova e teste de conjecturas
C: Tratamento algébrico do número	G: Predição de situações desconhecidas usando dados conhecidos – conjectura	K: Generalização de um processo matemático
D: Resolução de expressões em que falta um número	H: Identificação e descrição de padrões numéricos e geométricos	

Explicitam-se de seguida possibilidades de ocorrência de cada uma das categorias.

Categoria A – Os alunos exploram várias propriedades de números ou relações entre números. Por exemplo, generalizam sobre somas e produtos de pares e ímpares, generalizam sobre a diferença entre um número e ele próprio, decompõem números em parcelas e examinam a estrutura dessas parcelas, generalizam sobre propriedades ligadas ao valor posicional.

Categoria B – Os alunos exploram a estrutura das operações. Na tabela dos cem, a própria representação codifica múltiplos modos de pensar acerca de possíveis operações sobre um número. Por exemplo, a partir do 75 e para subtrair 10, os alunos podem subir directamente uma linha ou podem mover-se para a esquerda por unidades simples e subtrair 1 ao número por dez vezes consecutivas; quando verificam que a sequência de movimentos $\downarrow \rightarrow$ é equivalente a $\rightarrow \downarrow$ apercebem-se da propriedade comutativa.

Categoria C – Os alunos tratam o número de uma forma algébrica, ou seja, como representante, o que requer uma atenção à estrutura mais do que ao cálculo entre números específicos. Por exemplo, usando números suficientemente grandes de modo a estabelecer a paridade da soma sem a calcular.

Categoria D – Os alunos resolvem equações com uma ou múltiplas incógnitas.

Categoria E – Os alunos usam símbolos para modelar problemas ou para operar sobre expressões simbólicas. Por exemplo, quando usam códigos secretos e genericamente quando abstraem de certo modo do número para o símbolo.

Categoria F – Os alunos exploram correspondências entre quantidades ou relações recursivas e descobrem uma regra que descreve a relação entre as quantidades que variam.

Categoria G – Os alunos fazem conjecturas sobre o que poderá acontecer numa situação desconhecida, com base no que sabem da análise de dados conhecidos em relações funcionais. Por exemplo, no problema dos apertos de mão escrevem uma expressão numérica que dá o número de apertos de mão que se dariam num grupo de 12 pessoas baseados no conhecimento do que se passa com 6, 7 e 8 pessoas.

Categoria H – Os alunos identificam padrões em sequências numéricas ou figurativas ou em expressões numéricas.

Categoria I – Os alunos usam generalizações já realizadas para construir outras generalizações, num nível mais sofisticado de pensamento algébrico. Por exemplo, para determinar a paridade da soma de três números ímpares, os alunos baseiam-se na generalização feita para a soma de dois números ímpares.

Categoria J – Envolve processos essenciais para uma cultura que permite a emergência do pensamento algébrico mas não são específicos deste. Os alunos explicam o seu pensamento oral e publicamente facultando um contexto de envolvimento e debate com os pares em que as conjecturas podem ser aceites ou refutadas, justificando as suas perspectivas a um nível de sofisticação mais elevado. Por exemplo, os alunos discutem se zero é par ou impar ou testam e justificam os componentes de uma relação funcional estabelecida.

Categoria K – Os alunos constroem um conceito que resulta na generalização de um processo ou fórmula matemática. A construção é semelhante à de uma relação funcional mas aqui as generalizações visam conceitos nitidamente matemáticos. Por exemplo, a partir do conceito de área generalizam a fórmula da área de um rectângulo.

Pode também falar-se, de acordo com estes autores, de ferramentas que apoiam o pensamento algébrico, embora não sejam específicas deste, e que podem dividir-se em duas categorias: objectos e processos. Dentro dos objectos podem listar-se tabelas, gráficos, diagramas e rectas numéricas. No âmbito dos processos, consideram-se registar, recolher, representar e organizar dados.

A categorização acima apresentada foi usada para caracterizar o desenvolvimento de formas de pensamento algébrico dos professores envolvidos no presente estudo com os seus alunos.

Metodologia

Fez-se uma opção metodológica por uma investigação de natureza qualitativa e interpretativa na modalidade de estudo de caso longitudinal de quatro professores a frequentar o programa de formação contínua durante dois anos – Ana, Guilherme, Leonor e Sílvia. A escolha dos casos baseou-se numa amostra criteriosa com base na variedade de idades, formação de base, serviço atribuído, tempo de frequência do programa, oportunidade e ainda disponibilidade. A investigadora era simultaneamente a formadora dos professores.

O processo de recolha de dados incidiu essencialmente em três componentes fundamentais: observação, entrevista e análise de documentos. A primeira componente consistiu na observação de quatro/cinco aulas por ano a cada um dos quatro professores com gravação em vídeo, posteriormente transcrita, complementada com a elaboração de um relatório de cada aula e ainda uma conversa de reflexão entre o formando e a formadora. A segunda consistiu em três entrevistas por ano a cada um dos quatro professores, todas audiogravadas e posteriormente transcritas. A análise de documentos baseou-se em todos os documentos produzidos pela investigadora e pela equipa de formação e usados nas sessões conjuntas de formação, em notas de campo tomadas pela investigadora durante os dois anos num diário de campo, nas tarefas utilizadas pelos participantes nas suas aulas, em registos das produções matemáticas dos alunos e nos portefólios realizados pelos professores.

A recolha de dados ocorreu nas várias vertentes do programa de formação: sessões conjuntas de formação, acompanhamento em sala de aula e seminário final. Durante o segundo ano de formação, incidiu particularmente no trabalho autónomo que estes formandos deviam realizar como requisito da sua continuação na formação, para o qual foi criado nesse ano um novo esquema pela equipa de formadores, baseado numa experiência de sala de aula com os seus alunos previamente planificada e realizada, e incluindo a apresentação ao grupo de formandos desse trabalho. Para este trabalho autónomo foi sugerido aos participantes no estudo o tema do pensamento algébrico, e alguns dos factores que contribuíram para esta orientação foram: (a) manter um fio condutor na recolha e análise de dados; (b) ser um tema desconhecido dos professores; (c) ter sido entretanto introduzido no novo Programa (ME-DGIDC, 2007); (d) ser recomendado na literatura de investigação (e.g. Kaput & Blanton, 2001; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi & Battey, 2007; Warren, 2006; Schliemann et al., 2007); e (e) ser um tema do interesse pessoal da investigadora.

A análise de dados apoiou-se no uso de métodos indutivos, tais como; (a) clarificação e reformulação das questões; (b) escrita do diário de campo; (c) trabalho de campo complementado com revisão de literatura; (d) uso da triangulação; e (e) redução de dados. Estes métodos interligaram-se num processo interactivo.

Das questões colocadas e da leitura dos dados foram emergindo categorias de análise e estas deram depois origem à organização da escrita dos casos.

Foram observadas algumas estratégias para obedecer aos critérios de qualidade da investigação qualitativa, entre as quais a validação dos casos pelos participantes.

Alguns resultados

Apresentam-se alguns dos resultados no que diz respeito ao papel e à importância das várias vertentes da formação, como sejam as sessões conjuntas de formação, o acompanhamento em sala de aula e o trabalho autónomo. Pormenoriza-se em particular a referência ao modo como o novo tema do pensamento algébrico foi explorado pelos professores por estar mais relacionado com o tema deste encontro.

A importância das sessões de formação e do acompanhamento em sala de aula

Todos os quatro participantes frequentaram as sessões de formação com assiduidade e empenho. Os aspectos que se revelaram mais importantes foram: (a) os aspectos científicos não eram abordados de modo expositivo mas a sua discussão surgia naturalmente no contexto da realização de tarefas propostas, em que os conceitos e ideias matemáticas eram desocultados, aprofundados e inter-relacionados; (b) as tarefas propostas eram muito diversificadas na sua natureza e a sua apresentação e exploração era feita do mesmo modo que se esperava que viesse a ser realizada com os alunos, usando os mesmos materiais manipuláveis, aprofundando as questões matemáticas mais elementares envolvidas e organizando-se da forma considerada melhor para os diferentes tipos de tarefas; (c) existia uma articulação e grande proximidade entre sessões de formação e de ensino, uma vez que os conteúdos das sessões de formação eram transferidos para a prática de sala de aula; e (d) as sessões conjuntas possibilitavam a reflexão e a partilha de experiências entre os professores.

Este trabalho desenvolvido nas sessões de formação, explicitando em detalhe e concretizando acções por vezes sequenciais do professor na sala de aula, vai ao encontro dos trabalhos mais recentes de Ball (2009) quando aponta que o ensino da matemática é um trabalho intrincado, não natural, que precisa de ser aprendido e, como tal, ensinado. Sendo um trabalho de alta precisão, o estilo e as preferências individuais não podem sobrepor-se ao reconhecimento da sua natureza profissional.

O acompanhamento em sala de aula era a vertente mais inovadora deste programa de formação e revelou-se aparentemente condição da sua eficácia. Os principais aspectos foram: (a) o facto dos professores terem mesmo de aplicar na sala de aula o que trabalham nas sessões de formação é fundamental na mudança das práticas; (b) o papel da formadora era o de observadora participante, intervindo para dar apoio aos alunos e sugestões ao professor. Este apoio reveste-se dum carácter formativo, de colaboração e desafio com vista à melhoria do ensino. Por outro lado, é muito mais eficaz do que o prestado, por exemplo, nas sessões conjuntas de formação, porque é pessoal e directo, face a uma necessidade concreta, no momento oportuno.

O trabalho autónomo e o desenvolvimento do pensamento algébrico

Na impossibilidade de apresentar todo o trabalho realizado pelos participantes com os seus alunos no âmbito do pensamento algébrico, opta-se por sintetizar alguns aspectos do seu trabalho autónomo, à luz da caracterização de formas de pensamento algébrico de Blanton e Kaput (2005) atrás referida.

Ana. O trabalho autónomo de Ana foi mais centrado no desenvolvimento do sentido do número. A professora usou o modelo físico da recta numérica desenhada no chão para apoiar a actividade matemática dos seus alunos do 2.º ano. Trabalhou inicialmente, através de um jogo de dados, contagens por saltos variados a partir de números obtidos nos dados. Aproveitou a oportunidade para o uso intuitivo das propriedades das operações e para a formulação de conjecturas e generalizações sobre a soma de pares e/ou ímpares, que conduzem a uma visão generalizada da aritmética (Usiskin, 1999). Utilizaram também a tabela dos cem para fazer o registo respectivo. Incentivou a tradução entre a representação na recta numérica, em linguagem corrente e em linguagem matemática. Foram trabalhadas estratégias de cálculo mental. Ana propôs e os alunos resolveram um problema de adição e subtracção com recurso à recta numérica. A tradução em linguagem matemática da dramatização que consistiu em marcar posição no 45, saltar para o 55 e depois para o 65 e depois dar um passo atrás para o 64, assim como a soma de 47 a um número, permitiu não só a identificação e tradução entre diferentes representações, mas também a descoberta de estratégias úteis de cálculo mental.

Tabela 2: Formas de pensamento algébrico na aula de trabalho autónomo de Ana.

Categoria	
A	Generalização sobre a soma de pares, ímpares, pares e ímpares.
B	Uso intuitivo da propriedade associativa para facilitar o cálculo mental.
C	Estabelecimento da paridade da soma sem a calcular. Descoberta de modos de adicionar 47 a um número.
G	Formulação de conjecturas sobre o algarismo das unidades de sequências numéricas.
H	Identificação de padrões na sequência dos algarismos das unidades em contagens de 2 em 2, 4 em 4, etc.
J	Apresentação oral do seu raciocínio. Discussão e debate com a professora e entre colegas.

Guilherme. O trabalho autónomo de Guilherme baseou-se na descoberta e generalização de padrões na tabela dos cem com a sua turma mista do 2º/3º ano. Para isso recorreu ainda ao uso de estratégias de cálculo, quer mental quer escrito, para o cálculo de somas necessárias à identificação de determinados padrões. Por exemplo, para procurarem uma relação entre as somas das sucessivas linhas da tabela dos cem, havia que previamente calcular essas somas, o que por si só era já um trabalho exigindo esforço e persistência. Este cálculo das somas das sucessivas linhas permitiu a identificação de um padrão – a soma de cada linha era de mais cem unidades que a soma da linha anterior. A justificação da regularidade encontrada foi pedida para a soma das sucessivas colunas. O segundo conjunto de tarefas, com a apresentação de várias grelhas diferentes correspondendo a conjuntos de células da tabela dos cem exigia a análise de relações, já não propriamente entre números concretos mas entre células que funcionam como representantes de qualquer número. Esta detecção da estrutura na disposição dos números na tabela permite predizer, generalizar e justificar, processos típicos do pensamento algébrico nos primeiros anos (Kieran, 2004). Por último foi realizado um jogo que consistia no preenchimento de espaços em branco num excerto de tabela com apenas uma célula preenchida, o que exigia o conhecimento das relações entre elementos de células vizinhas.

Tabela3: Formas de pensamento algébrico na aula de trabalho autónomo de Guilherme.

Categoria	
A	Preenchimento de espaços em branco num excerto de tabela.
B	Uso da propriedade associativa no cálculo das somas de linhas pelo método de Gauss.
C	Relacionamento entre células como representantes de qualquer número na tabela dos cem e descrição das relações encontradas.
F	Descoberta de relações entre elementos da tabela e, particularmente, entre somas de linhas sucessivas e de colunas sucessivas.
G	Conjectura sobre a soma da 5.ª linha por análise das somas das duas primeiras linhas.
H	Descoberta de uma grande variedade de padrões numéricos na tabela dos cem.
I	Descoberta de que o facto de cada célula aumentar uma unidade para a direita faz com que a soma da coluna aumente dez unidades para a coluna da direita, já que cada coluna é formada por dez células.
J	Apresentação oral do seu raciocínio. Discussão e debate com o professor e entre colegas.

Leonor. Leonor começou por utilizar com o seu 1º ano a tabela dos cem para explorar padrões numéricos da soma com 2, com 3, com 4, e finalmente com 10. Sobretudo neste último caso, deu relevo ao tipo de movimentos possíveis. Tanto se podia ir "pelos degraus" de um em um dando 10 saltinhos como passar directamente para a casinha de baixo na tabela, "descendo de elevador". Aproveitou também para relacionar com a operação inversa. De seguida a exploração já podia ser feita adicionando ou subtraindo 10, 11, 12, 9, 20, 21, etc. Esta professora optou pela criação de algumas rotinas através de um trabalho sistemático de uns minutos no início de cada aula de matemática, ao longo do ano, em que ia abordando estratégias de cálculo mental progressivamente mais complexas. Acreditando que o ensino explícito de estratégias pode ser útil pelo menos para os alunos com mais dificuldades, de acordo com Reys, Lindquist, Lambdin e Smith (2007), não se limitava no entanto a exigir uma resposta certa mas a explicação do procedimento, aproveitando ainda a intervenção de alguns alunos para a exploração de estratégias por eles livremente escolhidas e cuja comunicação à turma poderia beneficiar os colegas, de forma consistente com McIntosh (1998) e Threlfall (2002). A tarefa de investigação *Aritmógono* proporcionou oportunidades de cálculo mental e resolução de problemas, para além de dar origem a várias formas de pensamento algébrico.

Tabela 4: Formas de pensamento algébrico nas aulas de trabalho autónomo de Leonor.

Categoria	
A	Decomposição de números em parcelas e exame da estrutura dessas parcelas.
B	Adicionar 10 descendo pelos degraus 10 saltinhos ou descer de elevador directamente para a linha seguinte. Para adicionar 12 é o mesmo descer uma linha e andar duas casas para a direita ou o contrário – propriedade comutativa da adição.
C	Para qualquer número, adicionar 9 é o mesmo que adicionar 10 e subtrair 1.
D	Resolução de expressões em que falta um ou dois números no aritmógono.
E	Descodificação de correspondências números-letras e símbolos-letras para poderem desvendar determinadas mensagens.
F	Descoberta da relação entre a soma dos círculos e a soma dos quadrados no aritmógono.
G	Formulação de conjecturas sobre a relação entre a soma dos círculos e a soma dos quadrados no aritmógono.
H	Descoberta de padrões numéricos na tabela dos cem.
J	Explicitação e verbalização das descobertas que vão sendo progressivamente refinadas. Discussão e debate com a professora e entre colegas.

Sílvia. O trabalho autónomo de Sílvia teve como pano de fundo o estabelecimento e a distinção entre os conceitos de perímetro e área com os seus alunos do 3º/4º ano mas evoluiu para a descoberta de padrões em sequências figurativas, precisamente no cálculo da medida do perímetro e da área de quadrados e em seguida de dois tipos diferentes de rectângulos. Por análise das sequências figurativas apresentadas, para as quais deveriam indicar a área ou o perímetro, houve uma evolução para a generalização aritmética (Radford, 2006) através de um pensamento de tipo recursivo – os alunos descobriam, por exemplo, que cada quadrado tinha mais quatro unidades de perímetro que o anterior. Contudo, outros alunos fizeram uma passagem directa para a generalização algébrica (Radford, 2006), relacionando a medida do perímetro ou da área da figura com a posição que essa figura ocupava na sequência. Esta tarefa de descoberta de uma regra ou fórmula que relacione a posição da figura na sequência com a medida do seu perímetro ou da sua área começa assim a ser vista como extensão natural do seu trabalho com números. Nesta fase, os alunos começaram por descrever por palavras a generalização obtida e passaram de seguida a utilizar o simbolismo algébrico, usando a letra *N* como variável para representar o *número* de uma figura qualquer que *eu não sei* (*N de número e N de não sei*). Esta imagem, criada pela professora, funcionou eficazmente, tendo os alunos aderido a ela de forma extremamente natural e com total compreensão. O bom desempenho alcançado nestas tarefas deveu-se também a um trabalho prévio de contagens visuais, em que os alunos desenvolveram a sua capacidade de reconhecimento visual; as sequências de figuras trabalhadas, em arranjo rectangular, prestavam-se a essa capacidade de *ver* (Vale et al., 2009). A professora procurou sempre que os alunos justificassem as suas conclusões precisamente com base no que viam, e essa circunstância facilitou o processo de generalização.

Tabela 5: Formas de pensamento algébrico na aula de trabalho autónomo de Sílvia.

Categoria	
A	Procura de uma relação recursiva entre os diversos termos das sequências exploradas.
C	Os números das figuras foram tratados como representantes requerendo dos alunos atenção á estrutura mais do que aos cálculos.
E	Abstracção do número para o símbolo N para representar *um número que eu não sei*.
F	Descoberta de relações entre o número da figura e a medida do perímetro ou da área respectiva.
G	Formulação de conjecturas sobre a medida do perímetro ou da área dos termos das sequências.
H	Identificação e descrição dos padrões de crescimento detectados nas sequências.
J	Explicitação e verbalização das descobertas que vão sendo progressivamente refinadas. Discussão e debate com a professora e entre colegas.
K	Descoberta de processos de cálculo da área e do perímetro de quadrados e rectângulos.

Em síntese, Ana dedicou-se mais ao desenvolvimento do sentido do número, procurando ultrapassar e refinar a visão tradicionalista que tinha do ensino em contextos numéricos. Leonor trabalhou de forma mais intensiva o cálculo mental, valorizando a generalização de resultados para a soma e diferença, decidindo-se por aquilo que foi para ela uma das grandes novidades da formação, a valorização do cálculo mental. Sílvia centrou a sua exploração na descoberta de padrões em sequências figurativas, realçando processos de generalização aritmética e algébrica com apoio da visualização;

foi a mais radical, a que arriscou mais em termos de inovação, chegando ao uso de simbolismo algébrico. Guilherme trabalhou de forma integrada e em paralelo todos estes aspectos, sem reforçar nenhum deles em particular, resolvendo aplicar tudo a que tinha tido acesso durante a formação.

Relacionamento das vias complementares para o pensamento algébrico

O desenvolvimento deste trabalho conduziu à elaboração de um esquema, apresentado na Figura 2, que procura ilustrar a relação dialógica detectada entre o sentido do número e o cálculo mental. Na verdade, quanto maior é o sentido do número que o aluno possui, traduzido pela compreensão das relações e propriedades dos números, mais estratégias de cálculo mental pode descobrir e, reciprocamente, o desenvolvimento, espontâneo ou dirigido, de estratégias de cálculo mental produz na mente da criança uma maior flexibilidade na forma de lidar com os números e as operações, ou seja, um maior sentido do número. Por outro lado, o esquema pretende relacionar as vias complementares para o pensamento algébrico detectadas neste trabalho, designadamente: o sentido do número; o cálculo mental; a descoberta de padrões; a generalização.

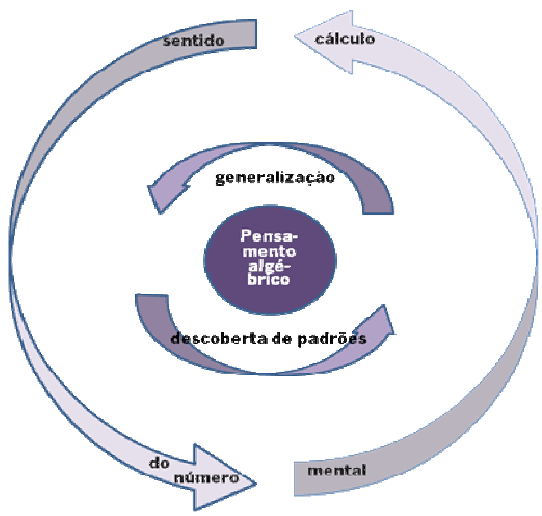


Figura 2. Relacionamento das vias complementares para o pensamento algébrico

É de salientar que o sentido do número e o cálculo mental mantêm esta relação dialógica, alimentando-se mutuamente, mas, por si sós, podem não constituir uma via para o pensamento algébrico, mantendo-se em circuito, a gravitar numa órbita paralela. É o aspecto crucial da explicitação e concretização pelo professor de processos de descoberta de padrões numéricos e/ou figurativos e consequente generalização, que emana e faz uso do sentido do número e do cálculo mental, que atinge verdadeiramente o cerne do pensamento algébrico.

A evolução do conhecimento matemático e didáctico dos professores

A prática de sala de aula destes professores revelou acções que são função do seu conhecimento matemático e didáctico. Com base nos trabalhos de Schoenfeld (2008) e Ball et al. (2008), que procuram dar visibilidade a facetas do papel e discurso do professor em situação de prática, procurou-se sintetizar num esquema funcional, apresentado na Tabela 6, aspectos importantes da prática de sala de aula denotando o conhecimento matemático e didáctico do professor. Na primeira linha da tabela estabelecem-se acções gerais e na segunda discriminam-se aspectos mais específicos dessas acções.

Tabela 6: Acções dos professores que são função do seu conhecimento matemático e didáctico.

Contextualiza e fundamenta o tópico matemático em estudo.	Convida a turma a pronunciar-se sobre o tópico.	Orienta as respostas dos alunos para a compreensão e interpretação de conjecturas.	Gere a avaliação de afirmações.
Usa contextos motivadores. Usa terminologia matemática.	Suscita o aparecimento de questões e conjecturas. Usa formas de representação adequadas.	Fomenta a comunicação com o uso de linguagem adequada.	Promove a tendência para a justificação. Faz sínteses, esclarecendo, se necessário, aspectos particulares da questão à turma.

Todos os participantes neste estudo manifestaram estas acções na sua prática, ainda que uns o possam ter feito de forma mais sistemática e experiente do que outros. As práticas observadas alinharam-se com o objectivo de proporcionar aos alunos uma melhor compreensão da matemática e compreender o seu pensamento. De facto, todos estes professores foram ao longo do tempo de observação e formação adquirindo ou aprofundando competência nos seguintes aspectos-chave: (a) usam linguagem matemática correcta e contextualizam as propostas de trabalho; (b) interagem com os alunos e promovem a interacção aluno-aluno; (c) pedem sistematicamente aos alunos que expliquem as suas opções de trabalho e as suas estratégias de resolução; (d) disponibilizam, quando necessário, um apoio baseado, designadamente, em materiais manipuláveis e no questionamento dirigido de modo a levar os alunos à descoberta de estratégias mais sofisticadas; e (e) promovem, em várias situações, a justificação das conjecturas feitas.

Pensa-se deste modo poder concluir que houve uma forte evolução do conhecimento matemático e didáctico destes professores, em particular ao nível do pensamento algébrico, no sentido em que este se relaciona com ideias matemáticas fortes e estruturantes.

Discussão e conclusões

Verificou-se neste estudo que a formação inicial foi desvalorizada pelos professores envolvidos. A formação complementar já constituiu um aspecto importante pois permitiu assumir um novo discurso sobre as tendências recentes sobre o ensino da matemática. A auto-formação pode produzir também os seus frutos desde que o professor esteja atento e motivado e possua meios para a fazer. Mas o que se revelou realmente fundamental no sentido da mudança foi a formação contínua numa modalidade como esta de imersão na prática durante um período longo. Nesta, o conhecimento e a experiência prévios devem ser integrados no processo de formação tanto atendendo aos seus pontos fortes como às suas fragilidades. É assim importante a atenção personalizada dada a cada professor em formação.

O acompanhamento em sala de aula "obriga" os professores a darem o primeiro passo na quebra das rotinas. A mudança de perspectivas e atitudes é lenta e gradual e depende da apreensão, por parte dos professores, da evolução na aprendizagem dos seus alunos provocada pela mudança das práticas.

A existência de trabalho autónomo durante o segundo ano de formação levou os professores a um trabalho de pesquisa e sistematização mais pessoal e aprofundado. A modalidade proposta de planificação e execução de uma aula em trabalho autónomo e a sua posterior apresentação pública ao grupo levou os formandos a descentrarem-se dessa condição, assumindo também o papel de formadores, e incentivou em consequência um trabalho de qualidade.

Neste domínio revelou-se muito positiva para estes quatro professores a focalização desse trabalho autónomo no tema do pensamento algébrico. Este resultou numa experiência curricular rica e inovadora para professores e alunos, tendo dado aos professores o ensejo de desenvolver o seu conhecimento matemático e didáctico num tópico que não lhes era familiar e, propondo a organização de aulas à volta de ideias motivadoras e acessíveis para os alunos, criou-se um ambiente de sala de aula no qual as crianças se envolvem em actividade muito próxima da prática dos matemáticos – formular, testar e provar afirmações de generalidade. Nesta perspectiva poderá afirmar-se a possibilidade e a vantagem da abordagem precoce de ideias algébricas.

Pode dizer-se que este programa de formação foi um marco de relevo na carreira destes professores. A evolução do seu conhecimento profissional seguiu um percurso não linear, ilustrado na Figura 3, que passou pelas sessões de formação, pelo acompanhamento, pelo seu trabalho autónomo e culminou no processo de reflexão que desencadeou em cada um.

Figura 3. Intervenção do programa de formação no conhecimento profissional dos professores.

Como resultado deste trabalho apresentam-se algumas recomendações para futuros programas de formação contínua: (a) a mudança nos professores é um processo mais que um evento; daí a necessidade de se manterem programas multianuais de desenvolvimento profissional como este; (b) um modelo de formação contínua em matemática deve estar completamente imerso na prática e permitir que se entrecruzem e interajam as suas vertentes fundamentais; (c) o trabalho autónomo deve ter visibilidade pública de modo a desenvolver nos professores uma preocupação de qualidade; e (d) há necessidade de um apoio especializado e continuado de modo a promover a pesquisa, a reflexão e a partilha de experiências, mantendo viva a dinâmica criada pelo programa de formação.

O estudo concluiu ainda sobre um forte envolvimento dos alunos em experiências matemáticas significativas pela procura de integração entre a aritmética e a álgebra, valorizando o cálculo mental, o sentido do número e aspectos de descoberta de padrões e de generalização. Seria interessante estudar as implicações desta abordagem sobretudo numa época como a que atravessamos de mudança curricular, analisando particularmente o impacto a médio e longo prazo da introdução do pensamento algébrico em alunos do 1.º ciclo.

Referências

Amaro, G., Cardoso, F., & Reis, P. (1996). *TIMSS – Terceiro Estudo Internacional de Matemática e Ciências: Contextos de aprendizagem* (Relatório preliminar nacional policopiado). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ball, D. (2009). Making Mathematics learnable in school: What is the work of teaching Mathematics?. Conferência apresentada em *Redesigning Pedagogy – 3rd International Conference.* National Institute of Education, Singapore, 1 June. Acedido a 17 de Novembro, 2009, de http://www-personal.umich.edu/~dball/

Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching (4th ed.)* (pp. 433-456). New York: Macmillan.

Ball, D., Lewis, J., & Thames, M. (2008). Making Mathematics Work in School. *Journal for Research in Mathematics Education. A Study of Teaching – Multiple Lenses, Multiple Views. Monograph No 14*, 13-44. Reston: NCTM.

Blanton, M., & Kaput, J. (2003).Developing Elementary Teachers' "Algebra Eyes and Ears". *Teaching Children Mathematics, 10*(2), 70-77.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Cai, J., & Moyer, J. (2008). Developing Algebraic Thinking in Earlier Grades: Some Insights from International Comparative Studies. In Carole Greenes & Rheta Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics – Seventieth Yearbook* (pp.169-180). Reston: NCTM.

Cobb, P. (1999). Onde está o espírito? Uma coordenação de perspectivas construtivistas socioculturais e cognitivas. In C. T. Fosnot (Ed.), *Construtivismo e educação: Teoria, perspectivas e prática*. Lisboa: Instituto Piaget.

Fenstermacher, G. (1994). The knower and the known: the nature of knowledge in research on teaching. *Review of Research in Education, 20*, 3-56.

Fosnot, C. (1999). Construtivismo: uma teoria psicológica da aprendizagem. In C. T. Fosnot (Ed.), *Construtivismo e educação: Teoria, perspectivas e prática*. Lisboa: Instituto Piaget.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work. Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth: Heinemann.

Franke, M.L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In Frank Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol.1 (pp. 225-256). Reston: NCTM.

GAVE (2004). *PISA 2003 – Resultados do estudo internacional*. Lisboa: GAVE.

Jacobs, V, Franke, M., Carpenter, T., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional Development Focused on Children's Algebraic Reasoning in Elementaty School. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258-288.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Task Structure. *Proceedings of the ICMI-Algebra Conference*. Melbourne, Australia, Dezembro de 2001.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it?. *Mathematics Educator, 8*(1) 139-151.

McIntosh, A. (1998). Teaching mental algorithms constructively. In L. Morrow & M. Kenney (Eds.), *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics – 1998 Yearbook* (pp. 44-48). Reston: NCTM.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics 12,* 3. FLM Publishing Association, White Rock, British Columbia, Canada.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St Albans, UK: Tarquin/The Open University.

Ministério da Educação (ME) - DGIDC (2007). *Programa de matemática do Ensino Básico.* Acedido a 7 de Janeiro, 2008 de www.min-edu.pt/outerFrame.jsp?link=http%3A//www.dgidc.min-edu.pt/

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional para o ensino básico. Competências essenciais*. Lisboa: ME-DEB.

Ministério da Educação (2005). *Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do primeiro ciclo do ensino básico*. Acedido a 27 de Fevereiro, 2007, de www.drel.min-edu.pt/upload/docs/programa_formacao_nov_2005.pdf.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional Standards for teaching mathematics*. Reston: NCTM. [Tradução portuguesa: *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática.* Lisboa, APM/IIE, 1994].

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

Ponte, J.P. (2000). A investigação sobre o professor de Matemática. Problemas e perspectivas. *Educação Matemática em Revista, 11*, 10-13.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*, 83–96.

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the General: The Multisemiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 507-530.

Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., & Smith, N. (2007). *Helping Children Learn Mathematics*. Danvers, MA: John Wiley & Sons.

Rivera, F. (2006). Changing the face of Arithmetic: Teaching Children Algebra. *Teaching Children Mathematics, 12*(6), 306-311.

Roldão, M.C. (2007). Teacher's role: nature and construction of professional knowledge. *Revista Brasileira de Educação, 12*(34). Rio de Janeiro.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action*. London: Avebury.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic. From children's ideas to classroom practice.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (2008). On Modeling Teachers' In-the-Moment Decision Making. *Journal for Research in Mathematics Education. A Study of Teaching – Multiple Lenses, Multiple Views. Monograph No 14*, 45-96. Reston: NCTM.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. Em AMP (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM.

Tardif, M., & Gauthier, C. (2001). O professor como "ator racional": que racionalidade, que saber, que julgamento?. In P.Perrenoud, L.Paquay, M.Altet, e E.Charlier (Eds.), *Formando professores profissionais – Quais estratégias? Quais competências?* (pp. 185-210). Porto Alegre: Artmed Editora.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 29-47.

Usiskin, Z. (1999). Doing Algebra in Grades K-4. In Barbara Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 – Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*. Reston: NCTM.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L., & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática – propostas curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: ESEVC – Projecto Padrões.

Warren, E. (2006). Supporting learning in early algebra: a model of professional learning. *Proceedings of MERGA 29, Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 535-542), Camberra, Australia.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Patterns That Support Early Algebraic Thinking in the Elementary School. In Carole Greenes & Rheta Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics – Seventieth Yearbook* (pp. 113-126). Reston: NCTM.

INTEGRACIÓN DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN LA EDUCACIÓN BÁSICA. UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA CON ALUMNOS DE 8-9 AÑOS

Marta Molina
Universidad de Granada
martamg@ugr.es

Resumen

En esta ponencia se describe la propuesta curricular Early-Álgebra – consistente en la integración de modos de pensamiento algebraicos en el currículo de los dos primeros ciclos de la educación básica – y se detallan algunas de las investigaciones que se han realizado sobre la misma a nivel internacional. Posteriormente se describe en mayor profundidad un experimento de enseñanza, realizado con estudiantes de 8-9 años, que persigue indagar en el potencial de dicha propuesta y en la capacidad de estos estudiantes para trabajar en aritmética de un modo algebraico. En este estudio se centra la atención en un tipo de pensamiento algebraico, el pensamiento relacional, que se hace manifiesto en el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, y que se relaciona con otros constructos de la literatura en Educación Matemática tales como el sentido estructural, el pensamiento cuasivariable y las meta-estrategias conceptuales.

Palabras-clabe: Early-Algebra, Innovación curricular, Pensamiento relacional, Experimento de enseñanza, Expresiones aritméticas.

Early-Álgebra

Desde mediados de los años noventa se han realizado a nivel internacional numerosas investigaciones que analizan y promueven la integración del álgebra en el currículo de los primeros ciclos de la educación básica. Esta propuesta, conocida con el nombre de Early-Algebra, plantea la introducción de modos de pensamiento algebraicos, en la matemática escolar, desde los primeros cursos escolares (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000; Kaput, Carraher y Blanton, 2009, Molina, 2009). En términos de Kaput (2000), se propone la "algebrización" del currículo de la educación básica.

Si se considera el currículo como un listado de contenidos, desde un punto de vista curricular esta propuesta no supone ningún cambio, pero si se ve el currículo como un conjunto de experiencias para los estudiantes, el cambio que se propone es profundo (Kilpatrick, 2011). La propuesta implica promover, en la actividad matemática de la educación básica, variadas características del pensamiento algebraico: pensar sobre lo general a partir de lo particular, pensar en patrones como reglas, pensar relacionalmente sobre cantidades, números y operaciones, pensar representacionalmente sobre relaciones en situaciones problema, y pensar conceptualmente sobre lo procedimental (Kieran, 2011). El contexto prioritario en el que integrar estos diferentes modos de pensamiento es la aritmética, con sus inherentes regularidades, equivalencias, múltiples formas de conceptualizar las relaciones numéricas, analizar y representar relaciones entre cantidades; y también con su cara funcional que incluye estudiar patrones, analizar como las cantidades varían e identificar correlaciones entre variables.

Estas ideas evidencian una visión del álgebra escolar que no se restringe al trabajo con el simbolismo algebraico. Es una concepción más amplia que engloba el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Kaput, 1998, 2000; Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara–Roth et al., 2003). Dentro de estas múltiples dimensiones, el álgebra se concibe dualmente como cuerpo de conocimientos y como actividad matemática (Kaput, Carraher y Blanton, 2009). Esta multidimensionalidad del álgebra es la esencia de la innovación curricular que se propone pero no es exclusiva a esta propuesta (ver por ejemplo Da Ponte, 2006) ni es nueva en el panorama investigador (ver por ejemplo Usiskin, 1988 y Bednarz, Kieran y Lee, 1996).

El objetivo del Early-Algebra no es solo facilitar el posterior estudio del álgebra, sino promover en los alumnos un aprendizaje, con comprensión, más profundo y complejo de las matemáticas escolares. Los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica son considerados hábitos mentales importantes, que todos los alumnos deben de adquirir, que pueden emerger con naturalidad de las matemáticas propias de la educación básica y tienen potencial para enriquecer la actividad matemática escolar (Blanton y Kaput, 2005; Kaput, 1998). El objetivo que se persigue, por tanto, es múltiple:

- Anadir coherencia, profundidad y poder al currículo de la educación básica.
- Facilitar el acceso de todos los estudiantes al pensamiento y actividad algebraica favoreciendo el desarrollo de una base sólida de aprendizaje y

experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de la educación secundaria.

- Dar tiempo para el desarrollo progresivo y prolongado de los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica, así como de los significados nuevos o más amplios para los símbolos presentes en la aritmética y el álgebra escolar.
- Eliminar la abrupta introducción del álgebra en los niveles de educación secundaria

(Kaput, Carraher y Blanton, 2009; Molina, 2009; NCTM, 2000).

La propuesta Early-Algebra no debe confundirse con otro enfoque relacionado con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas antes de la enseñanza formal del álgebra conocido como pre-álgebra. Sus finalidades son diferentes ya que la pre-álgebra sólo persigue suavizar la abrupta transición de la aritmética al álgebra y, de este modo, mitigar las dificultades que típicamente encuentran los alumnos en el aprendizaje del álgebra, supuestamente debidas a la diferente naturaleza de ambas sub-áreas (Carraher y Schliemann, 2007).

En el origen de la propuesta Early-Algebra se identifican diversos factores. En general, hasta principios de los 90, la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra estaba centrada en lo que los alumnos no podían hacer, más que en explorar lo que eran capaces de hacer y su potencial de desarrollo. Estos trabajos contribuyeron, en general, a la asunción de que es mejor posponer el estudio del álgebra para los últimos cursos escolares (Lins y Kaput, 2004). Hace un par de décadas algunas investigaciones comenzaron a mostrar una perspectiva significativamente diferente al reportar cambios en la concepción de la educación algebraica y del pensamiento algebraico, incorporar las nuevas tecnologías a la enseñanza y aprendizaje del álgebra y sugerir que los alumnos jóvenes pueden hacer más matemáticas de las que se pensaba en un principio, en especial cuando se les provee de experiencias y enseñanza adecuada (Lins y Kaput, 2004)[1]. Así mismo la insatisfacción con la actual y tradicional enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales propios de la misma, y la

[1] Existen algunos antecedentes previos (Ej., Davydov, 1962; Davis, 1985; Freudenthal, 1974; Vergnaud, 1988) a esta propuesta que, en el mismo sentido, plantean la enseñanza del álgebra en los primeros cursos de la Educación Primaria y argumentan la necesidad de preparar a los alumnos para abordar los aspectos epistemológicos involucrados en la transición de la aritmética al álgebra.

preocupación por hacer su estudio accesible a todos los estudiantes, condujeron a buscar formas más efectivas de abordar su enseñanza.

Adicionalmente un factor destacado en el desarrollo de esta propuesta ha sido la evidencia dada, en sucesivos estudios, de la capacidad de alumnos de educación básica de aprender y comprender nociones algebraicas elementales y utilizar modos de pensamiento algebraicos, sugiriendo que las dificultades de los alumnos en el aprendizaje del álgebra pueden ser debidas, en gran parte, al tipo de enseñanza recibida. Concretamente se ha puesto de manifiesto que estos alumnos pueden elaborar y simbolizar algebraicamente conjeturas sobre relaciones aritméticas básicas (Carpenter, Franke y Levi, 2003); percibir y representar tanto gráfica, aritmética como pre-algebraicamente, complejos patrones lineales (Moss y Beatty, 2006); pensar sobre operaciones aritméticas como funciones, en vez de como cálculos con números particulares (Schliemann et al, 2003); trabajar con relaciones funcionales y usar notación algebraica para representarlas (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000); usar representaciones algebraicas, como gráficos, tablas y ecuaciones para resolver problemas, y representar y analizar problemas en los que hay involucradas cantidades desconocidas en ambos miembros de una igualdad, utilizando, en ocasiones, letras para representar dichas cantidades (Brizuela y Schliemann, 2003); por citar algunos ejemplos.

Estos estudios han analizado la factibilidad y potencialidad de la introducción temprana de algunas ideas algebraicas, mostrando, en particular, que *"cuando la enseñanza está fundamentada en las ideas matemáticas de los alumnos y en promover su curiosidad matemática, los niños tiende a exhibir maneras de pensar algebraicas en el contexto de lecciones de aritmética, geometría o medida"* (Bastable y Schifter, 2007, p. 2).

Estas evidencias han conducido a que los currículos de diferentes países, en sus versiones más recientes, adelanten la edad en la que recomienda la introducción del álgebra en el currículo escolar y amplien su concepción del álgebra. Entre ellos destacamos los casos de Estados Unidos y Portugal. En la primera versión de los Estándares del NCTM (1989) se recomendaba introducir el álgebra, como generalización de la aritmética, en los dos últimos ciclos de la educación básica. Esta visión estaba más en línea con lo que se ha denominado pre-algebra. Posteriormente, en la última edición de los Estándares del NCTM (2000), se recomienda que el desarrollo de pensamiento algebraico sea abordado desde la Educación Infantil en adelante, para ayudar a los alumnos a *"construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior"* (p. 37) y se destaca el papel de las ideas algebraicas como unificadoras del currículo.

Así mismo ha ocurrido en Portugal, según indican Canavarro (2009) y Pimentel (2010), pues tras el reajuste del currículo de matemáticas portugués para la enseñanza básica publicado en 2007 (ME-DGIDC, 2007) ya aparece en primer ciclo el álgebra recogida como forma de pensamiento matemático, si bien no como contenido, y se propone el trabajo con secuencias, relaciones entre números y entre números y operaciones, para favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico. En el segundo ciclo se continúa en esta línea recomendándose el trabajo con patrones y relaciones (expresiones numéricas y propiedades de las operaciones, secuencias y patrones y variación) con ese mismo objetivo.

Pensamiento relacional

Los estudiantes que llegan a ver los números y las operaciones en términos de sus inherentes relaciones estructurales, esto es como objetos que pueden ser comparados relacionalmente en términos de sus componentes, y que pueden usar las propiedades fundamentales de las operaciones y de la igualdad… puede decirse que ven la aritmética con ojos algebraicos.
(Kieran, 2011, p. 584)

Desde la propuesta Early Algebra, se enfatizan la necesidad de un enfoque estructural de la aritmética que rompa con el énfasis computacional predominante en los primeros cursos escolares. En esta línea cabe destacar un tipo específico de pensamiento algebraico, el pensamiento relacional, que se hace manifiesto en el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. Este tipo de pensamiento, refiere, en pocas palabras, al reconocimiento y uso de relaciones entre los elementos de expresiones numéricas y algebraicas y de propiedades fundamentales de las operaciones (Carpenter et al., 2003; Empson, Levi y Carpenter, 2011; Molina, 2006; Molina y Ambrose, 2008; Stephens, 2007). Al utilizar pensamiento relacional, los estudiantes consideran las expresiones como totalidades (en lugar de como procesos a realizar paso a paso), las analizan, distinguen algunos detalles y reconocen algunas relaciones y, finalmente, aprovechan estas relaciones para construir una estrategia de solución (Molina, 2006). Por ejemplo, para determinar si las sentencias (a) $7+7+9=14+9$ y

(b) $27+48-48=27$ son verdaderas o falsas, en lugar de hacer los cálculos en ambos miembros y comparar los resultados obtenidos, hacer uso de pensamiento relacional implica atender a toda la expresión y apreciar su estructura particular (por ejemplo, hay operaciones en ambos lados del signo igual, o no hay) y utilizar las relaciones percibidas entre sus elementos (por ejemplo, 9 aparece en ambos miembros; $7+7$ en el lado izquierdo equivale a uno de los términos del miembro derecho; el mismo número se suma y resta a 27) así como el conocimiento de propiedades fundamentales de la aritmética, para determinar la verdad o falsedad de la sentencia.

Las expresiones aritméticas involucradas tienen que ser consideradas desde una perspectiva estructural y no únicamente como procedimientos a realizar. La expresión "$7+7+9$" se compara con "$14+9$" para considerar su equivalencia, en lugar de actuar en cada expresión para determinar su valor. Esto implica un cambio sutil pero importante en la atención de los estudiantes: de realizar la lectura de la sentencia de izquierda a derecha, leyendo los elementos de uno en uno, a mirar a ambos lados del signo igual y comparar las dos expresiones entre sí (Mason, Drury y Bills, 2007). No obstante el uso de relaciones entre números u operaciones puede ser más o menos sofisticado según si éstas se perciben como específicas a la situación particular considerada, haciéndose un uso implícito de propiedades de forma análoga a los teoremas en acción (Vegnaud, 1988), o bien, son reconocidas como particularizaciones de una propiedad (Molina y Mason, 2009). Este segundo uso implica el tipo de pensamiento basado en propiedades que se utiliza en el álgebra y se asocia con una comprensión profunda de la aritmética (Empson et al., 2011) o comprensión relacional en términos de Skemp (1978).

El pensamiento relacional se presenta como una acción intelectual, alternativa a la aplicación de procedimientos estándares, centrada en la consideración y exploración de la estructura de las expresiones aritméticas y algebraicas. La anticipación destaca aquí como una de sus componentes clave, cuya destacada importancia en la guía del razonamiento algebraico ha sido señalada por Boero (2001).

Conexiones con otros constructos

El término pensamiento relacional surge en la literatura a principios del siglo XXI en los trabajos de Carpenter y colaboradores (Carpenter y Franke, 2001; Carpenter et al., 2003). No obstante está relacionado con otros constructos ya existentes entre los que destacamos el pensamiento cuantitativo flexible, el sentido estructural, el pensamiento cuasivariable y las meta-estrategias conceptuales.

En el contexto del cálculo, el pensamiento cuantitativo flexible, en el sentido de Weaver (1957), implica el uso de estrategias o patrones de pensamiento no convencionales. Algunas de las estrategias propias del cálculo mental o del cálculo flexible son modos de cálculo que corresponden al uso de pensamiento relacional. Así ocurre en aquellos casos en los que el alumno no está utilizando estrategias aprendidas como procedimientos estándares, sino que está actuando de forma flexible, analizando la expresión a calcular como una totalidad, apreciando su estructura concreta, y haciendo uso de relaciones apreciadas para realizar el cálculo o transformarlo en otro más sencillo de resolver.

En el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, identificamos conexiones del pensamiento relacional con el sentido estructural (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004; Vega-Castro, Castro, y Molina, 2010), ya que este sentido incluye la capacidad de considerar las expresiones aritméticas o algebraicas como entidades (totalidades); un componente clave en la definición del pensamiento relacional. Adicionalmente, al examinarse dichas expresiones y apreciarse o establecerse relaciones, es necesario identificar subestructuras dentro de la totalidad de la expresión (en especial cuando las expresiones son complejas), compararlas entre sí y apreciar conexiones entre ellas. Todos éstos, componentes propios del sentido estructural.

En la aritmética, cuando se consideran sentencias numéricas que expresan relaciones numéricas ciertas para cualesquiera números, el uso de pensamiento relacional está relacionado con lo que Fujii y Stephens (2001) denominan pensamiento cuasivariable. Estos autores utilizan el término "cuasivariables" para referir al uso de los números en sentencias numéricas que indican una relación matemática la cual es cierta para todos los números (de un determinado conjunto numérico) que se consideren (ej., $23 + 5 - 5 = 23$, $42 + 0 = 42$). Este tipo de pensamiento es más específico que el pensamiento relacional ya que es aplicable sólo en sentencias numéricas en las que los números son utilizados para expresar particularizaciones de propiedades matemáticas. Además, el término pensamiento cuasivariable es más restrictivo en el modo en que las relaciones observadas han de estar siendo concebidas por el sujeto, al exigirse su apreciación como casos particulares de propiedades; ha de percibirse lo general en el caso particular que se observa.

En un contexto más amplio Hejny, Jirotkova y Kratochvilova (2006) refieren a meta-estrategias conceptuales, las cuales contraponen a las meta-estrategias procedimentales. Estas últimas se basan en la aplicación de ciertos procedimientos estándares aprendidos, tras haber identificado el área a la que pertenece el problema. En cambio, el pensamiento relacional y las meta-estrategias conceptuales hacen referencia a modos flexibles de abordar una situación matemática centrando la atención en las relaciones y elementos clave que la definen para construir la estrategia de resolución. En ambos casos el pensamiento del alumno se centra en la estructura de la situación o problema que se persigue abordar, siendo un aspecto destacado su consideración como totalidad.

Diseño y metodología del estudio empírico

La investigación que describimos a continuación es un experimento de enseñanza realizado con un grupo de estudiantes españoles de tercero de educación primaria (curso equivalente a tercero de la educación básica), dirigido a estudiar su uso y desarrollo de pensamiento relacional a lo largo de seis sesiones de trabajo en el aula.

La metodología de los experimentos de enseñanza se enmarca dentro del paradigma de la investigación de diseño[2]. Este tipo de investigaciones destacan por su potencial para desarrollar teorías sobre el proceso de enseñanza/aprendizaje, de contenidos específicos, de una forma sensible a la complejidad y naturaleza sistémica de dicho proceso. Las claves se encuentran en la conjugación, de forma cíclica, de dos análisis:

a) el del proceso de aprendizaje y el de los elementos del diseño instruccional que sustentan dicho aprendizaje;

b) la dialéctica que se establece entre la teoría y la práctica por medio de procesos iterativos de interpretación de datos empíricos y de elaboración de modelos teóricos explicativos del fenómeno de aprendizaje (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

[2] Ver Molina, Castro, Molina y Castro (2011) para una descripción detallada de este paradigma metodológico.

De forma general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000).

Siguiendo la propuesta Early-Algebra, se eligió el contexto de las igualdades y sentencias numéricas basadas en propiedades aritméticas por su potencial para promover el uso de pensamiento relacional (Carpenter et al., 2003). La Tabla 1 muestra las relaciones y propiedades numéricas, relativas a la estructura aditiva del conjunto de los números naturales[3], que fueron consideradas en el diseño de las igualdades y sentencias utilizadas.

Tabla 1. Relaciones numéricas consideradas en el diseño de las igualdades y sentencias

Propiedad/relación aritmética	Ejemplo de sentencia considerada
Conmutatividad de la suma	$10+4=4+10$
No conmutatividad de la resta	$15-6=6-15$
Complementariedad de la suma y la resta	$100+94-94=100$
Compensación	$13+11=12+12$, $78-45=77-44$
Cero como elemento neutro de la suma y de la resta por la derecha	$0+325=326$, $125-0=125$
Elemento opuesto	$100-100=1$
Composición/descomposición	$78-16=78-10-6$
	$7+7+9=14+9$
Magnitud	$37+22=300$, $72=56-14$
Reflexividad de la igualdad	$93=93$, $5+5=5+5$.

Atendiendo a los resultados de un estudio previo (Castro y Molina, 2007; Molina y Ambrose, 2008) decidimos utilizar, con diferentes finalidades, igualdades abiertas y sentencias verdaderas y falsas. Las igualdades abiertas fueron empleadas para evaluar la comprensión del signo igual de los alumnos así como identificar las estrategias empleadas y las dificultades manifestadas en la resolución de las mismas. Las sentencias verdaderas y falsas se utilizaron para favorecer y detectar el uso de

[3] Las sentencias que son verdaderas expresan una relación matemática que es cierta para todos los números que se consideren. Por tanto los números actúan en ellas como “cuasivariables”, en términos de Fujii y Stephens (2001).

pensamiento relacional en la resolución[4] de las sentencias, promover el desarrollo de la comprensión del signo igual e identificar las estrategias utilizadas por los alumnos. Estas igualdades y sentencias fueron propuestas a los alumnos en el contexto de tareas escritas individuales, discusiones en gran grupo y entrevistas individuales; promoviendo la verbalización y discusión de las respuestas de los alumnos y el uso de multiplicidad de estrategias, especialmente aquellas que hacen uso de relaciones y propiedades aritméticas. Las igualdades concretas consideradas[5] se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Sentencias utilizadas en las sesiones 1, 2, 3, 4 y 6.

Sentencias de la Sesión 1	Sentencias de la Sesión 2	Sentencias de la Sesión 3		Sentencias de las Sesiones 4 y 6
8 + 4 = □ + 5	12 - 4 = 13 - □	72 = 56 - 14	7 + 7 + 9 = 14 + 9	18 - 7 = 7 - 18
□ = 25 – 12	9 - 4 = □ - 3	78 - 16 = 78 - 10 - 6	10 - 7 = 10 - 4	75 - 14 = 340
14 + □= 13 + 4	□ - 6 = 15 – 7	24 - 15 = 24 - 10 - 5	7 + 3 = 10 + 3	17 - 12 = 16 - 11
13 - 7 = □ - 6	14 - 9 = □ - 10	78 - 45 = 77 - 44	62 - 13 + 13 = 65	122 + 35- 35 = 122
□ + 4 = 5 + 7	17 - □ = 18 – 8	100 + 94 - 94 = 100	19 - 3 = 18 - 2	6 + 4 + 18 = 10 + 18
12 + 7 = 7 + □		27 - 14 + 14 = 26	13 + 11 = 12 + 12	75 + 23 = 23 + 75
		231 + 48 = 231 + 40 + 8	10 + 4 = 4 + 10	7 + 15 = 8 + 15
		13 - 5 + 5 = 13	0 + 325 = 326	53 + 41 = 54 + 40
		51 + 51 = 50 + 52	37 + 22 = 300	16 + 14 - 14 = 36
		15 - 6 = 6 - 15	125 - 0 = 125	257 - 34 = 257- 30 - 4
		27 - 14 + 14 = 26	7 = 12	
		93 = 93	100 - 100 = 1	
		24 - 24 = 0		

Trabajamos con un grupo de 26 alumnos de 8-9 años, en un total de seis sesiones a lo largo de un año. Este grupo de estudiantes fue elegido por su disponibilidad para participar en la investigación. Previamente a la experimentación no habían recibido enseñanza específica sobre el uso de pensamiento relacional ni sobre la resolución de sentencias o igualdades. Sí habían trabajado en momentos puntuales algunas estrategias de cálculo flexible como “trucos” que facilitan el cálculo.

La temporalización de las intervenciones en el aula fue intencionada, con la salvedad de los periodos vacacionales, para: a) favorecer que nuestra intervención en el aula tuviera

[4] Por resolución de las sentencias nos referimos a juzgar si la sentencia dada era verdadera o falsa dando una justificación de dicho juicio.

[5] Esta tabla no incluye las sentencias de la sesión 5, en la cual realizamos entrevistas individuales utilizando sentencias verdaderas y falsas similares a las de las sesiones 3, 4 y 6.

un efecto prolongado, b) disminuir la probabilidad de estar evaluando un aprendizaje memorístico, y c) contar con tiempo suficiente para analizar los resultados de cada intervención y tomar decisiones respecto a la siguiente intervención en el aula, como es propio de la metodología utilizada. En la Tabla 3 se muestra la distribución por sesión del tipo de tareas, así como los métodos de recogida de datos empleados, el número de alumnos asistentes y la temporalidad y duración de las sesiones.

Tabla 3. Características generales de la experimentación en el aula

Fecha (duración)	**NA**	**Actividades**	**Tipo de Igualdades/ sentencias**	**Recogida de datos**
23 Nov (30´)	26	Evaluación escrita Entrevistas a 4 alumnos Discusión	Igualdades Abiertas	Grabación en video Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora-docente
24 Ene (1h)	21	Evaluación escrita Discusión Actividad escrita Discusión	Igualdades Abiertas	Grabación en video Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora-docente
3 Feb (1h)	22	Discusión	Sentencias v/f	Grabación en video Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora-docente
16 Feb (1h)	25	Evaluación escrita	Sentencias v/f	Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora-docente
2 Mar (1h 50 = 13x8´)	(13)	Entrevistas individuales	Sentencias v/f	Grabaciones en audio Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora-docente
16 Nov (1h)	25	Evaluación escrita	Sentencias v/f	Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora-docente

NA.: número de alumnos

A lo largo de estas seis sesiones nuestro primer objetivo fue analizar la comprensión inicial de los alumnos sobre las igualdades propuestas así como detectar las estrategias que empleaban para resolverlas. La primera intervención fue también dirigida a que los alumnos se acostumbraran a que la investigadora-docente reemplazara a su profesor como docente y a la presencia de la videocámara en la clase. Así mismo, sirvió para que la investigadora-docente se familiarizara con los alumnos. Las siguientes sesiones estuvieron encaminadas a ayudar a los alumnos a desarrollar su comprensión de las igualdades y sentencias, superar las dificultades manifestadas, promover el uso de estrategias variadas para resolver las sentencias, en especial aquellas que hicieran uso de pensamiento relacional, y analizar dichos procesos. En esta ponencia nos centramos en los aspectos que refieren al uso y desarrollo de pensamiento relacional dejando a un lado el análisis relativo a la comprensión del signo igual de los alumnos[6].

Se recogió una extensa colección de datos sobre el pensamiento de los alumnos mientras resolvían las sentencias numéricas propuestas. También recogimos datos del pensamiento y de las decisiones tomadas por los investigadores participantes durante las diferentes etapas del proceso de investigación, especialmente en las reuniones celebradas para discutir el diseño de cada intervención y el análisis de los datos de las sesiones previas.

Experimentación en el aula

Durante las seis sesiones del experimento de enseñanza, los estudiantes participaron activamente en las discusiones y actividades escritas desde el inicio. Sabían cómo resolver las igualdades y sentencias abiertas realizando cálculos y disfrutaban participando en las discusiones para explicar cómo lo habían pensado. La investigadora-docente les preguntó por formas diferentes en las que podían justificar sus respuestas y ellos se esforzaron por dar explicaciones diferentes a las de sus compañeros. En algunos casos cambiaron el orden en que realizaban las operaciones o buscaron formas diferentes de realizar una misma operación. Mostraron más dificultades para expresar su pensamiento, dando explicaciones menos precisas, cuando éste estaba basado en relaciones. En dichos casos la investigadora-docente “tradujo” las explicaciones al resto de estudiantes para facilitar la discusión de las mismas. Los estudiantes con menos habilidades aritméticas participaron raramente en las discusiones, mostrando poca confianza en su competencia matemática. En varias ocasiones solo expresaron su juicio sobre la veracidad de la igualdad o sentencia pero no justificaron su respuesta. Las actividades escritas y las entrevistas individuales, en las que se sentían menos cohibidos, fueron buenas oportunidades para acceder el pensamiento de estos estudiantes.

---

[6] Para más información sobre el diseño de las sesiones y su justificación ver Molina (2006). Para más información sobre la parte del estudio relativa a la comprensión del signo igual ver Molina (2006) o Molina, Castro y Castro (2009).

Uso de pensamiento relacional

Como era de esperar, a lo largo de las 6 sesiones al menos un 50% de las veces los estudiantes realizaron el cálculo del valor numérico de ambos miembros para concluir si la sentencia era verdadera o falsa[7]. Entre un 5 y un 6 % de las veces comenzaron a calcular, o incluso realizaron algún cálculo, pero algo de lo que dijeron o hicieron les condujo a reconocer y utilizar una relación que les permitía determinar la veracidad o falsedad de la sentencia. Entre un 25 y un 30% de las veces los estudiantes hicieron un uso explícito de pensamiento relacional sin realizar cálculo alguno. A continuación detallamos y damos ejemplos de cada uno de estos modos de actuación.

Las respuestas de los estudiantes muestran que al abordar una sentencia numérica, éstos detectan al menos los números, el signo igual y algunas operaciones. En algunos casos los estudiantes no mostraron reconocer ninguna relación. Así, por ejemplo, en la igualdad $257-34=257-30-4$ Clara utilizó el algoritmo estándar de la suma para realizar los cálculos que aparecen en cada miembro ($257-30=227$, $227-4=223$ y $257-34=223$) y explicó "verdadera porque 257–34 son 223 y 257 menos 30 menos 4 son 223". Noelia procedió de forma similar en la sentencia $125-125=13$. Calculó el valor numérico del miembro izquierdo, utilizando el algoritmo estándar para la resta, y entonces concluyó que era falsa explicando que el resultado del cálculo era cero y no trece.

En otras ocasiones, en cambio, tras iniciar o realizar un cálculo algunos estudiantes mostraron cambiar la forma en que estaban atendiendo a la sentencia. Este es el caso por ejemplo de Felipe que en su trabajo en la sentencia $51+51=50+52$ afirmó que era verdadera y explicó: "es que como cincuenta y uno más cincuenta y uno son ciento dos, pero cincuenta y uno si le quitas, cincuenta, le puedes sumar a cincuenta y uno, del otro, uno más, y te da cincuenta y dos". El trabajo de Maite en la sentencia $75+23=23+75$ también puso de manifiesto este cambio en la atención y actuación de la estudiante. Esta alumna escribió primero $75+23$ en formato vertical para sumarlo por columnas, pero de pronto paró y explicó: "verdadera porque es igual" no continuando con el cálculo iniciado. Otro ejemplo es el de Clara en la sentencia $7+7+9=14+9$; ella justificó la veracidad de la sentencia de dos formas diferentes. En primer lugar aludió a que las

[7]Los porcentajes que aquí se presentan no suman 100% porque algunas explicaciones de los alumnos no permiten identificar si hicieron uso o no de pensamiento relacional.

expresiones en ambos miembros tenían como resultado 23 ("Porque….porque nueve más siete son dieciséis, más siete, veintitrés, y… catorce más nueve dan veintitrés"). Una segunda explicación mostró uso de pensamiento relacional: "sumando siete más siete… sumando siete más siete que dan catorce, lo mismo que ahí, nueve lo mismo que ahí también". Tras calcular o simplemente utilizar el hecho numérico $7+7=14$ que le podía ser conocido, la presencia del 14 fue lo suficientemente fuerte como para llevar Clara a dirigir su atención hacia el lado derecho de la sentencia. De este modo detectó dos expresiones idénticas $14+9$ y $14+9$, que pueden reconocerse como iguales sin necesidad de realizar cálculo alguno.

Entre el 25% y el 30% de las veces, los estudiantes procedieron directamente a usar relaciones sin ningún intento manifiesto previo de realizar cálculos. Este es, por ejemplo, el caso de David en la sentencia $122+35-35=122$. Este estudiante no realizó ningún trabajo escrito sobre esta sentencia y explicó: "verdadera porque es [como] si le das el número y luego lo recuperas". Otro ejemplo de este uso de pensamiento relacional lo encontramos en la explicación de Carmen en la sentencia $13+11=12+12$: "he pensado que a trece le puedo quitar una y te quedan doce, y ese uno se lo he puesto al once y me sale doce más doce igual a doce más doce". Para llevar a cabo estas explicaciones, los estudiantes necesitaron considerar la sentencia como un todo, discernir y atender a los números y operaciones involucradas, y reconocer relaciones entre ellos. Su atención habría estado dominada por el reconocimiento de relaciones.

¿Qué motivó que los alumnos actuaran de una u otra forma en una determinada sentencia? Para dar respuesta a esta cuestión analizamos a continuación los diferentes modos de actuación de cada estudiante en un grupo de sentencias trabajadas en una misma sesión y la evolución del uso de pensamiento relacional que se detecta a lo largo de las seis sesiones.

Cambios de actuación en una misma sesión

En una misma sesión de trabajo en el aula los estudiantes mostraron diferentes modos de actuación según la sentencia con la que estuvieran trabajando. Para dar muestra de ello comparamos la resolución de varios estudiantes a la evaluación escrita propuesta en la sesión 4. En primer lugar consideramos el trabajo de José en dicha tarea (ver tabla 4).

Aunque su pensamiento no es claro en algunos casos, debido a la falta de detalle de sus explicaciones, algunas de sus respuestas sugieren diferencias en la forma que aborda diferentes sentencias. José procedió de forma relacional en las sentencias $75-14=340$ y $6+4+18=10+18$. En la primera de ellas compara el tamaño relativo de los números en ambos miembros y concluye que la igualdad es imposible, es decir, es falsa. En la otra sentencia reconoce la equivalencia de ambos miembros realizando el cálculo $6+4=10$ y reconociendo mismidad[8] entre ambos miembros, la cuál expresó escribiendo $10+18=10+18$. Sin embargo, en las sentencias $122+35-35=122$ y $16+14-14=36$ opera las expresiones del miembro izquierdo, procediendo de izquierda a derecha, y compara los valores numéricos obtenidos con el número que aparece en el miembro derecho de la sentencia. La atención de José pudo haber estado influenciada por el tipo de sentencia: con operaciones en ambos lados del signo igual o sólo en uno de ellos. Su enfoque tendió a ser computacional a la hora de abordar el segundo tipo de sentencias y relacional en el primer tipo, con algunas excepciones.

En las respuestas de otros estudiantes a la misma tarea observamos diferentes patrones en los cambios manifestados en su manera de abordar unas sentencias y otras. David calcula el valor numérico de ambos miembros en todas la sentencias salvo en $18-7=7-18$ y $122+35-35=122$. El pensamiento de David es principalmente computacional pero en la sentencia $122+35-35=122$, sin hacer ningún cálculo explicó: "verdadera porque es [como] si le das el número y luego lo recuperas". En este caso conjeturamos que los números más grandes pudieron inducirlo a atender a relaciones entre los términos que no reconoció después en la sentencia $16+14-14=36$ donde su pensamiento pudo ser más concreto y computacional debido a su familiaridad con estos números más pequeños. Aunque para algunos estudiantes los números grandes son obstáculos, pueden favorecer que la atención sea dirigida a la estructura de las sentencias movidos por la motivación de evitar cálculos engorrosos. Zazkis (2001) utiliza esta idea como una herramienta pedagógica para ayudar a los estudiantes a ver el general en lo particular y centrarse en apreciar la estructura, razonar en base a ella y expresarla. En términos de Fujii y Stephens (2001), los números grandes tienden a ser considerados más fácilmente como cuasivariables.

[8] Utilizamos el término mismidad, en vez de igualdad, para referir a la relación de igualdad/equivalencia matemática, reservando el término igualdad para la representación de dicha relación, es decir, para referir a expresiones aritméticas o algebraicas que contienen el signo igual y expresan una relación verdadera.

Tabla 4. Respuestas de José a la evaluación escrita de la sesión 4

Sentencia	Explicación
18 – 7 = 7 – 18	Verdadera porque 18 – 7 es = 7 – 18 es lo mismo
75 – 14 = 340	Falsa porque 75–14 no puede dar 340
17 – 12 = 16 – 11	Verdadera porque 17 – 12 es = que 16 – 11
122 + 35 – 35 = 122	Falsa porque 122 + 35 = 175 175 – 35 = 140 por eso no da 122 (calcula mediante el algoritmo de la resta 175 – 35= 140)
6 + 4 + 18 = 10 + 18	Verdadera porque 6 + 4 = 10 + 18 = 10 + 18 es lo mismo en las dos cuentas
75 + 23 = 23 + 75	Verdadera porque 75 + 23 es lo mismo que 23 + 75
7 + 15 = 8 + 15	Falsa porque 7 + 15 son 22 y 8 + 15 son 23
53 + 41 = 54 + 40	Verdadera porque 53 + 41 son 91 y 54 + 40 son 94
16 + 14 – 14 = 36	Falsa porque 16 + 14 son 30 – 14 son 20
257 – 34 = 257 – 30 – 4	Verdadera porque 257 –34 son 223 y 257 – 30 – 4 son 223

En el caso de Elena se detecta un comportamiento diferente al poner de manifiesto pensamiento relacional cuando trabaja en la mayoría de las sentencias de dicha evaluación. Calculó los valores numéricos de ambos miembros para resolver la sentencia $17-12=16-11$ pero después de hacer lo mismo en la sentencia $53+41=54+40$ explicó: "verdadera porque el 1 del 54 se lo ponemos al 40, te da lo mismo”. En la sentencia $7+15=8+15$ también hizo el cálculo antes de expresar que no podía ser verdadera debido a una diferencia de magnitud entre las expresiones a ambos lados del signo igual. Elena prestó atención a las relaciones posteriormente a realizar el cálculo. En su caso, el tamaño de los números no pareció influir su enfoque pero sí las relaciones involucradas en el diseño de las sentencias, siendo la relación de compensación la que le resultó más difícil de reconocer.

En la misma tarea, Maite mostró utilizar pensamiento relacional en las siguientes sentencias que incluyen operaciones y términos iguales en ambos lados: $75+23=23+75$, $7+15=8+15$ y $18-7=7-18$. En el resto de las sentencias calculó y comparó el valor numérico de ambos miembros pero en estas tres sentencias, tras iniciar el cálculo o la escritura de los números en vertical para operar por columnas, reconoció mismidad o “casi mismidad” entre las expresiones a ambos lados del signo igual y utilizó esta relación para concluir su respuesta (ver tabla 5). Con su comportamiento Maite muestra una tendencia a calcular como primera reacción al abordar la resolución de una sentencia, pero muestra que en algunas de las sentencias su atención no estaba completamente tomada por los cálculos, lo que le permite reconocer algunas relaciones básicas entre las expresiones en ambos miembros. La principal diferencia entre la actuación de Maite y de Elena en la evaluación escrita de la sesión 4, fue las relaciones que utilizaron para argumentar sus respuestas en los casos en que hicieron uso de pensamiento relacional. Mientras que Elena expresó relaciones relativas a diferencias de magnitud entre términos, a la compensación de ciertas modificaciones en los términos que dan igual resultado, entre otras, las relaciones expresadas por Maite fueron únicamente de mismidad o no mismidad de términos, lo que la condujo a realizar una afirmación incorrecta en la sentencia $18-7=7-18$ (ver Tabla 5).

Tabla 5. Respuestas de Maite a la evaluación escrita de la sesión 4 en las que muestra uso de pensamiento relacional

Sentencia	Explicación
18 – 7 = 7 – 18	Verdadera porque los dos son iguales (calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 01)
75 + 23 = 23 + 75	Verdadera porque es igual (comienza a escribir verticalmente 75 + 23)
7 + 15 = 8 + 15	Falsa porque es casi igual pero no es igual (calcula mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 = 22)

Estos ejemplos ilustran un cambio detectable en el modo de resolver y atender a las sentencias cuando los estudiantes trabajaron individualmente en un grupo de sentencias. Estos cambios parecen deberse a una variedad de influencias:

a) la presencia de operaciones en ambos lados del signo igual en vez de en uno sólo (es decir, la estructura de la sentencia),
b) la magnitud de los números involucrados,
c) la mayor o menor tendencia computacional del estudiante,
d) la carga cognitiva de la tarea para el estudiante, lo que condiciona la atención libre del mismo para percibir relaciones, y
e) el tipo de relación que podía detectarse en la sentencia para juzgar su veracidad.

En relación a este último factor se observó que algunas relaciones (ej., mismidad) fueron más fácilmente reconocidas por los estudiantes que otras (ej., compensación). Incluso aquellos estudiantes que eran más tendentes al cálculo tendían a no operar en las sentencias que incluían relaciones relativas al cero ($a+0=a$; $a-0=a$; $a-a=0$). Las sentencias que involucran la propiedad conmutativa también promovieron más frecuentemente el uso de pensamiento relacional. En la sesión 3, ninguno de los estudiantes que participaron en la discusión sobre la sentencia $10+4=4+10$ realizaron cálculos. En las sesiones 4 y 6, sólo 5 y 8 estudiantes, respectivamente, resolvieron la sentencia $75+23=23+75$ mediante el cálculo del valor numérico de ambos miembros. En las sentencias basadas en la relación de composición/descomposición, así como sobre la relación complementaria de la suma y la resta, la mitad de los estudiantes precedieron computacionalmente y la otra mitad relacionalmente. En ese último caso se detectó un mayor uso de métodos computacionales cuando intervenían números pequeños. En las sentencias basadas en la relación denominada magnitud (ver tabla 1), durante la discusión de la sesión 3 los estudiantes mostraron el uso de ambos tipos de métodos, pero el enfoque computacional se hizo más frecuente en las sesiones 4 y 6. Esta tendencia se aprecia especialmente en las sentencias que incluían operaciones sólo en uno de los miembros. Conjeturamos que esto puede ser resultado del hecho de que estas sentencias no incluirán números iguales en ambos miembros, mientras que las otras sí lo hacían. Las sentencias basadas en la relación de compensación fueron las que menos frecuentemente se abordaron utilizando pensamiento relacional, en especial las que involucraban restas.

Desarrollo de pensamiento relacional a lo largo de las sesiones

En un principio, en las sesiones 1 y 2, el cálculo y comparación de los valores numéricos de cada miembro de la sentencia fue la estrategia más común. Cuando se le preguntó por formas diferentes de resolver una misma sentencia, los estudiantes tendieron a proponer un orden diferente en el que realizar los cálculos. Sólo tres estudiantes de manera espontánea mostraron uso de pensamiento relacional, concretamente en las sentencias $12+7=7+\square$, $9-4=\square-3$, $12-4=13-\square$ y $15-15=0-0$. Sin embargo, a partir de la sesión 3, cuando comenzó a promoverse explícitamente el uso de pensamiento relacional pidiéndoles a los estudiantes que intentaran resolver las sentencias sin realizar los cálculos, más estudiantes y más frecuentemente reconocieron relaciones que utilizaron para resolver las sentencias. En total 14 de 18, 19 de 24, 11 de 13 y 17 de 24 estudiantes, respectivamente, pusieron de manifiesto uso de pensamiento relacional en las últimas cuatro sesiones (ver Tabla 6).

Tabla 6. Evidencias de pensamiento relacional por sesión

			Evidencian pensamiento relacional	
Sesión	Asisten	Participan	Mínimo	Máximo
1	26	26	1	1
2	21	21	2	3
3	22	18	12	14
4	25	24	17	19
5	13	13	10	11
6	24	24	13	17

Todos salvo dos o tres estudiantes resolvieron las sentencias por lo menos una vez utilizando pensamiento relacional en vez del cálculo y la comparación de los valores numéricos de ambos miembros. Curiosamente, tres estudiantes dieron evidencia de pensamiento relacional sólo durante la entrevista. Por ejemplo Roberto lo utilizó al ofrecer las siguientes explicaciones en las sentencias $13+5=5+13$ y $26-8=100$: "[verdadera] porque es lo mismo, sólo que del revés" y "falsa… porque si fuese… es veintiséis menos ocho y es igual a cien y entonces como es menos, es quitar, y tiene que ser hasta cien. Porque el cien es mayor que…que ese, que la resta esa". Este estudiante no dio muestras de pensamiento relacional en las sesiones previas, pero tampoco mostró ninguna dificultad especial en las tareas propuestas. En las entrevistas de la sesión 5 cinco de los trece entrevistados mostraron un uso más frecuente de pensamiento relacional que en sesiones anteriores. Por ejemplo, David había mostrado sólo un uso aislado de pensamiento relacional en una sesión previa (en la sentencia $122+35-35=122$), pero en la entrevista utilizó pensamiento relacional en todas las sentencias que se le presentaron: $13+5=5+13$, $26-8=100$, $8+6=4+4+6$, $11-6=10-5$, $11+7=10+8$, $19-13=9-3$.

A partir de estos resultados conjeturamos que el pensamiento relacional puede no hacerse evidente a menos que los estudiantes están inmersos en una cultura que explícitamente valore el reconocimiento de relaciones y la percepción de propiedades de las cuales son casos particulares. No es que los estudiantes no puedan o no piensen en relaciones, sino más bien depende de lo que es promovido en las aulas.

Discusión y conclusiones

Los resultados del experimento de enseñanza presentados evidencian parte del potencial del cambio curricular que propone el Early-Algebra, así como un modo factible de ponerlo en práctica, en un contexto muy concreto, utilizándose el pensamiento relacional como un constructo clave en la operativización de esta propuesta. Permite, además, mostrar la capacidad de alumnos de 8-9 años para trabajar en aritmética de un modo algebraico.

En dicho contexto de aula, se ha mostrado que desde el primer momento en que el uso de pensamiento relacional fue promovido en el aula, éste fue puesto de manifiesto. Este hecho evidencia que es un tipo de pensamiento que los alumnos desarrollan a partir de su aprendizaje y experiencia aritmética, pese a que no sea directamente promovido en la enseñanza. El uso de pensamiento relacional presenta una importante componente individual, manifestándose como un tipo de pensamiento que los alumnos no desarrollan o manifiestan de forma semejante como resultado de la enseñanza aritmética recibida. Algunos alumnos muestran no prestar atención a las relaciones entre los elementos de la sentencia o a las características particulares de ésta, evidenciando cierta rigidez al abordar la resolución de las sentencias considerando las expresiones que componen ambos miembros como cadenas de operaciones a realizar. Son variables tanto la frecuencia de uso del pensamiento relacional como los factores que lo condicionan. Al listado de factores ya mencionados, añadimos dos más generales: el conocimiento aritmético previo de los estudiantes y la cultura del aula. El primero de ellos determina, por ejemplo, el modo en que los estudiantes conciben los números, los hechos numéricos que conocen y el conocimiento ya sea implícito o explicito de las propiedades aritméticas. Respecto a la cultura del aula, los resultados apoyan la argumentación de Arcavi (2006) sobre la influencia de ésta en lo que se aprende y lo que se desarrolla y en romper la rutina automática, en este caso, la rutina computacional.

Conclusiones Generales

Recientes publicaciones en la línea de la propuesta Early-Algebra evidencian un acuerdo cada vez más general en la comunidad investigadora internacional en que el álgebra tiene un lugar en el currículo de la educación básica; acuerdo que ya se está viendo reflejado en las propuestas curriculares de algunos países. A partir de experiencias locales focalizadas en aspectos diversos del pensamiento algebraico, se ha puesto de manifiesto la potencialidad de la algebrización del currículo para enriquecer la enseñanza tradicional de las matemáticas, en todos los niveles educativos, facilitando el desarrollo de un aprendizaje más profundo e integrado de la aritmética y el álgebra, así como la viabilidad de esta propuesta desde los primeros niveles de la educación básica. Estas investigaciones dan muestra de tareas que pueden integrarse en la actividad matemática de la educación básica para promover el uso y desarrollo de pensamiento algebraico[9] y describen su puesta en práctica en contextos concretos. Llegados a este punto, se hace necesario dirigir la atención a la aplicación de esta propuesta a mayor escala para que los cambios curriculares que ya se están produciendo tengan el deseado impacto en la práctica escolar. Así mismo, interesa profundizar en la influencia de este cambio curricular en la enseñanza de las matemáticas, y particularmente del álgebra, en los niveles educativos superiores y en la integración de esta propuesta en los planes de formación de docentes de educación básica. En esta línea, trabajos como la tesis doctoral de Pimentel (2010) en el que analiza el desarrollo de conocimiento matemático y didáctico, relacionado con el pensamiento algebraico, de varios profesores en el marco de un Programa de Formación Continua en Matemáticas para Profesores de 1º Ciclo de la Enseñanza Básica, implantado a nivel nacional en Portugal en 2005, son un primer avance.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 Modelización y representaciones en educación matemática" del Plan Nacional de Investigación, desarrollo e Innovación 2008-2011 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

[9] Consultar Canavarro (2009) para ver una recopilación de algunas de estas tareas.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y uso del sentido de los símbolos. En I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos y P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de profesores* (pp. 29-47). Caminha, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portugesa de Ciências da Educação.

Bastable, V., y Schifter, D. (2007). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Seeing*. Harmondsworth, Middlesex: BBC y Penguin Books Ltd.

Blanton, M. L., y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. En R. Sutherland (Ed.), *Algebraic processes and structur*es (pp. 99–119). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Brizuela, B. M., y Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 2 (pp. 137-144). Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives.* Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Canavarro, A. P. (2009). El pensamiento algebraico en el aprendizaje de la Matemática los primeros años. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Carpenter, T. P., y Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp.155-162). Melbourne: University of Melbourne.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Reston, Virginia: NCTM e IAP.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., y Brizuela, B. M. (2000, octubre). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en *the Twenty–second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Tucson, Arizona.

Castro, E., y Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática, 19*(2), 67-94.

Da Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. En I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos y P. Canavarro (Eds.), Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de profesores (pp. 5-27). Caminha, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portugesa de Ciências da Educação.

Davis, R. B. (1985). ICME–5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour, 4,* 195-208.

Davydov, V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education*, 8, 27-37.

Empson, S. B., Levi, L., y Carpenter, T. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of elementary school. *Educational Studies in Mathematics, 5,* 391-412.

Fujii, T., y Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalization through numerical expressions: The role of quasi-variables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 258-264). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Hejny, M., Jirotkova, D., y Kratochvilova J. (2006). Early conceptual thinking. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 289-296). Prague, Czech Republic: PME Program Committee.

Hoch, M. (2003). Structure sense. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy: ERME.

Hoch, M., y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56). Bergen, Norway: Bergen University College.

Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J., Carraher, D.W., y Blanton, M. L. (2009). *Algebra in the Early Grades.* Taylor & Francis Group.

Kieran C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 557-577). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Kilpatrick, J. (2011). En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 125-130). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Lins, R., y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp.47-70). Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Drury, H., y Bills, E. (2007). Explorations in the zone of proximal awareness. En J. Watson y K. Beswick (Eds.) *Mathematics: Essential Research, Essential Practice*: *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol 1, pp. 42-58). Adelaide: MERGA.

Ministério da Educação–Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (ME-DGIDC) (2007). Proposta de reajustamento do programa de matemática do Ensino Básico.

Moss, J., y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*, 441–465

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/544

Molina, M., y Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign: Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30*(1), 61–80.

Molina, M., Castro, E., y Castro, E. (2009). Elementary students´ understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17,* 7(1), 341-368.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75–88.

Molina, M., y Mason, J. (2009). Justifications-on-demand as a device to promote shifts of attention associated with relational thinking in elementary arithmetic. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(4), 224-242.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, Virginia: Autor.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: Autor.

Pimentel, T. (2010). O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua?. Tesis doctoral. Braga, Portugal: Universidade do Minho.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S. et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4 (pp. 127-134). Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher, 26*(3), 9-15.

Steffe, L., y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Stephens, M. (2007). Students' emerging algebraic thinking in primary and middle school years. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 678-687). Adelaide, Australia: MERGA Inc.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, Virginia: NCTM.

Vega-Castro, D., Castro, E., y Molina, M. (2010). Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables. Comunicación presentada en el *Seminario del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico en el XIV simposio de la SEIEM* (7-10 Septiembre 2010). Lérida, España. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1555/

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique* (pp. 189-199). Paris: La Pensée Sauvage.

Weaver, J. F. (1957). Developing flexibility of thinking and performance. *Arithmetic Teacher, 4*(4), 184-188.

Zazkis, R. (2001). From arithmetic to algebra via big numbers. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 2, pp. 676–681). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Tecnologia e Avaliação do Ensino-aprendizagem da Álgebra

(Grupo de Discussão 1)

Coordenação:
Joana Brocardo, *Escola Superior de Educação, I. P. Setúbal*
António Domingos, *Faculdade de Ciências e Tecnologia, U. N. Lisboa*

TECNOLOGIA E AVALIAÇÃO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

Joana Brocardo e António Domingos

A Álgebra é um tema fundamental da Matemática e está presente em todo o Ensino Básico e Secundário. O seu ensino e aprendizagem, bem como a avaliação são áreas que carecem de uma investigação mais sistemática e profunda, dada a natureza das dificuldades que têm sido experimentadas pelos alunos. A tecnologia tem vindo a ocupar cada vez mais um lugar de destaque no ensino e aprendizagem deste tema dado que pode ter um papel importante nos vários campos da actividade cognitiva e alterar o foco dos aspectos a trabalhar com os alunos. A diversidade de ferramentas tecnológicas ao nosso dispor, que vai desde o processador de texto, passando pelas folhas de cálculo, calculadoras gráficas, programas de traçado de gráficos e geometria dinâmica, até às potencialidades das plataformas de ensino à distância, da internet, do e-mail e dos *chats*, conduzem-nos a diversas e poderosas formas de comunicação das ideias matemáticas, onde a aprendizagem da Álgebra pode ser enquadrada.

Este grupo de discussão tem como objectivo pensar o papel e o lugar que estas ferramentas tecnológicas podem ter no ensino e na aprendizagem da Álgebra, bem como nos modos de avaliação dessas aprendizagens. Procurar-se-á discutir esta temática a partir de um conjunto de comunicações que não esgotam o tema por si só, mas que podemos considerar como pontos de partida para uma reflexão mais profunda sobre a temática, sobre a investigação até agora realizada e sobre as necessidades de investigação que nos possam ajudar a melhorar o desempenho dos alunos bem como a forma como o tema pode ser ensinado e avaliado.

EIEM 2011 - *Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (eds), 7-8 Maio, 2011, pp. 55–??

A CALCULADORA GRÁFICA NO ENSINO DAS FUNÇÕES: IMPLICAÇÕES SOBRE ASPECTOS DA PRÁTICA DE UMA PROFESSORA

Helena Rocha
*Bolseira da FCT/ME**
hcrocha@ie.ul.pt

Resumo

Nesta investigação procura-se caracterizar a utilização que uma professora faz da calculadora gráfica, no âmbito do estudo do tema funções, ao nível do 10.º ano de escolaridade. A caracterização das tarefas propostas, da utilização da tecnologia e da articulação entre o gráfico e o analítico e entre as diferentes representações foi feita a partir dos elementos recolhidos no decorrer da observação de 14 aulas e da realização de diversas entrevistas. As conclusões alcançadas apontam para a implementação de três tipos de tarefas (exercícios, problemas e investigações), para três tipos distintos de utilizações da calculadora gráfica (para obter informação, fundamentalmente de suporte gráfico; para confirmar resultados; e para investigar) e para uma valorização da articulação entre o analítico e o gráfico, mas para uma desvalorização da representação numérica relativamente às restantes.

Palavras-chave: Calculadora gráfica, Tipos de utilização, Tarefas, Representações.

Introdução

Numa altura em que a utilização da calculadora gráfica no ensino secundário é obrigatória há já alguns anos, mas quando começam a surgir indícios que sugerem que essa utilização fica aquém das expectativas (ver, por exemplo, Dunham, 2000, Vrasidas e Glass, 2005), importa conhecer e compreender melhor o que efectivamente está a acontecer.

Neste artigo procura-se fazer uma caracterização da utilização que é feita da calculadora gráfica, por parte duma professora, no âmbito do estudo do tema funções ao nível do 10.º ano de escolaridade. Em particular pretende-se compreender:

- Que tipos de tarefas são propostas,
- Como se caracteriza a utilização da calculadora gráfica,
- Que articulação é feita entre o gráfico e o analítico e entre as diferentes representações.

Os elementos aqui apresentados fazem parte dum estudo mais abrangente e ainda em curso, que envolve três professoras e que procura, para além de caracterizar a sua prática de utilização da calculadora gráfica, compreender as razões subjacentes a esta.

Quadro teórico

A integração da calculadora gráfica no ensino da Matemática propicia a adopção de todo um conjunto de propostas de trabalho (Goos & Bennison, 2008). De entre os diferentes tipos de tarefas que um professor pode propor, Ponte (2005) destaca os problemas, os exercícios, as investigações, os projectos e as tarefas de modelação. Este autor associa à noção de problema uma certa dificuldade, realçando o carácter relativo desta classificação, uma vez que o que é um problema para determinado aluno poderá não passar de um simples exercício para outro. Problemas e exercícios serão assim tarefas com algumas semelhanças, em que é claro o que se pretende, sendo a distinção entre estas marcada pelo facto do aluno conhecer ou não um processo para a resolver. Exercícios e problemas podem ainda envolver um contexto da realidade ou, pelo contrário, situarem-se num campo estritamente matemático.

As investigações constituem um outro tipo de tarefas. Neste caso, embora sejam geralmente colocadas questões, é deixado ao aluno a definição das estratégias de resolução que irá adoptar, assim como algum trabalho ao nível da formulação das questões específicas a resolver (Rocha, 1996). Tal como nos tipos de tarefas anteriores, também aqui poderemos ter investigações num contexto real ou num contexto estritamente matemático.

Os projectos envolvem resolução de problemas mas, segundo Abrantes (1994), caracterizam-se pela complexidade, pela autenticidade que têm para os alunos envolvidos, pela responsabilidade e autonomia que exigem e pelo seu carácter prolongado e faseado. Os projectos são ainda marcados por um objectivo e pela intenção de alcançar determinado produto final, neste sentido o contexto é claramente relevante.

O contexto é igualmente determinante nas tarefas de modelação, que Matos e Carreira (1996) enquadram no âmbito da aplicação da Matemática a situações da realidade. Estas tarefas requerem a construção de um modelo matemático e exigem "a formulação de questões pertinentes acerca da situação, bem como a selecção dos factores considerados mais relevantes nessa situação, a identificação das variáveis que lhe estão associadas, a experimentação e a análise da adequação do modelo matemático à situação" (Matos e Carreira, 1996, p.7). Consoante sejam mais ou menos estruturadas, estas tarefas aproximam-se respectivamente da resolução de problemas ou das investigações.

As características das tarefas a que o professor recorre e o papel que assume na sua condução são determinantes no ensino que protagoniza (Gimeno, 2000). E se, como refere Farrel (1996), a tecnologia interfere com as tarefas a que o professor recorre e com a frequência com que o faz, a forma como esta é usada é igualmente influente.

Simmt (1997), partindo da análise da prática de seis professores, identifica seis utilizações diferentes que podem ser feitas da calculadora gráfica:

- para confirmar resultados (gráficos ou cálculos),
- para traçar gráficos de funções,
- para encontrar soluções gráficas para problemas de maximização,
- para compreender problemas de palavras,
- para explorar para além do conceito em estudo,
- para mostrar.

Destas, as duas primeiras são claramente as utilizações mais comuns, uma vez que todas as restantes apenas foram identificadas num máximo de dois dos participantes no estudo. Importa ainda referir que foi identificada uma utilização para investigar o efeito da variação de determinado parâmetro da função sobre o seu gráfico, mas como esta tem sempre por base a possibilidade de traçar muitos gráficos, a autora acaba por não a considerar separadamente.

Por seu turno Banker (2001), inspirando-se no trabalho de Simmt, refere sete utilizações distintas que identificou num conjunto de professores:

- para confirmar o trabalho realizado,
- para encontrar soluções graficamente,
- para explorar ideias matemáticas em maior profundidade,
- para obter soluções alternativas,
- para simular fenómenos reais,
- para visualizar,
- para motivar.

Num estudo com professores pouco familiarizados com a calculadora gráfica, Cavanagh e Mitchelmore (2003) identificaram apenas três utilizações diferentes:

- para confirmar gráficos traçados sem tecnologia,
- para obter rapidamente inúmeros gráficos,
- para desenvolver a capacidade de prever o aspecto de um gráfico antes de o traçar.

Doerr e Zangor (2000) mencionam igualmente diferentes utilizações da calculadora gráfica, referindo-se-lhes como ferramenta:

- de cálculo,
- transformativa (transformando tarefas de cálculo em tarefas interpretativas),
- de recolha e análise de dados,
- de visualização (para resolver equações, para associar a representação ao fenómeno físico, para determinar as principais características da função, para desenvolver estratégias para encontrar a equação que melhor se adequa a um conjunto de dados),
- de confirmação de conjecturas.

Das utilizações identificadas pelos diferentes autores parecem destacar-se as que se encontram associadas ao cálculo e à confirmação de resultados, assim como à rápida obtenção de gráficos. Para além destas, parece ser reconhecido o potencial desta tecnologia para a realização de investigações e para a exploração de situações articulando diferentes abordagens ou representações.

Esta potencialidade de aceder a múltiplas representações é mesmo uma das características da calculadora gráfica mais valorizadas (Heid, 1995), por permitir uma visão global, que é mais do que a junção do conhecimento relativo a cada uma das representações (Kaput, 1989), favorecendo o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda, que não seria possível sem o apoio da tecnologia (Cavanagh & Mitchelmore, 2003).

Goos e Benninson (2008) referem as representações numérica ou tabelar, algébrica ou simbólica e gráfica como as três usualmente utilizadas no estudo de funções. Estas têm contudo potencialidades diferentes, como destacam Friedlander e Tabach (2001). Segundo estes autores, a representação numérica permite aos alunos o recurso a objectos familiares para demonstrar relações e analisar casos específicos, mas carece de generalidade.

Por seu turno, a representação gráfica apresenta um conjunto de casos específicos mais vasto e caracteriza-se por permitir uma utilização que transcende os conhecimentos algébricos dos alunos. Sendo os gráficos uma representação mais intuitiva, as soluções obtidas por esta via podem, contudo, carecer de exactidão e sofrer a influência de factores externos como os efeitos da escala utilizada sobre a interpretação que é feita.

Já a representação algébrica é concisa e geral na apresentação de regularidades e modelos. Ainda assim, o recurso exclusivo a esta representação pode dificultar a compreensão do significado matemático. O recurso a diferentes representações permite ao aluno compreender numa outra forma aquilo que não era possível compreender na representação inicial.

Apesar da importância de trabalhar com diferentes representações e de esse trabalho ser muito facilitado pela utilização da calculadora gráfica, os alunos têm dificuldade em fazê-lo (Billings & Klanderman, 2000) e os professores não têm dedicado a necessária atenção à flexibilidade necessária para passar de uma representação para outra e para articular a informação veiculada por estas (Even, 1998). Com efeito, embora exista alguma preocupação em articular e equilibrar o recurso a diferentes representações, Molenje e Doerr (2006) constataram que o recurso às representações algébricas e gráficas são dominantes relativamente à representação numérica.

Contexto e metodologia

Esta investigação adopta uma abordagem de natureza qualitativa, prevendo a realização de um estudo de caso sobre a professora Carolina. A recolha de dados envolveu a realização de entrevistas, a observação de 14 aulas e recolha documental. As entrevistas foram de diversos tipos, sendo relevantes para a parte do estudo que aqui se apresenta as que foram realizadas antes e depois de cada aula observada. Tanto as entrevistas como as aulas foram áudio-gravadas. Foi ainda elaborado um diário de bordo das aulas observadas e recolhidos diversos documentos como fichas de trabalho, enunciados de testes e outros materiais disponibilizados pela professora aos alunos através da plataforma *Moodle* (fundamentalmente resoluções de testes e tarefas extra). A análise de dados revestiu-se essencialmente dum carácter descritivo e interpretativo, tendo por base a análise de conteúdo dos elementos recolhidos.

A Carolina é uma professora com mais de 30 anos de ensino que, no ano lectivo 2009/2010 leccionou a uma turma do 10.º ano a disciplina de Matemática A. Este foi o segundo ano que utilizou calculadora gráfica com alunos neste nível de escolaridade, tendo a vez anterior ocorrido em 1997/1998. Nessa altura Carolina acompanhou os alunos até ao 12.º ano, após o que se seguiu um período de alguns anos em que não leccionou no ensino secundário.

As aulas com a calculadora gráfica

Um olhar sobre as propostas de trabalho efectuadas pela Carolina no decorrer das aulas observadas permitiu constatar que estas tinham características diversas, podendo preencher uma aula inteira ou apenas parte desta, mas que existiam também alguns aspectos em comum entre determinadas propostas e respectiva implementação. Por uma questão de simplicidade apresentarei as tarefas organizadas em função dessas semelhanças e utilizarei o termo situação para me referir a esse conjunto de tarefas e à respectiva implementação na sala de aula.

Situação 1

Ao longo do estudo do tema a Carolina foi propondo diversas tarefas que tinham por base um contexto da realidade. Foi o caso de propostas de trabalho como "Colónia de bactérias", "A rampa para desportos radicais" ou "Os balões". Em comum, para além de um contexto real, todas tinham o facto de disponibilizarem a expressão da função que modelava o fenómeno, colocando depois várias questões sobre este que, em termos matemáticos, correspondiam a determinar a imagem de certo objecto, a encontrar um extremo, a resolver uma equação ou inequação ou a recorrer à Matemática para melhor compreender o fenómeno envolvido. A abordagem seguida passou invariavelmente pela introdução da expressão da função na calculadora, pelo traçar do gráfico e eventual procura de uma janela de visualização mais adequada a que se seguiu, consoante a questão em causa, um recurso a trace, ao menu calc (para determinar um valor, os zeros ou um extremo) ou o criar de uma segunda função constante e determinar as intersecções desta com a função original. O processo foi sendo marcado por algumas dificuldades a lidar com as diferentes unidades (por exemplo, qual o significado de um resultado de 5,6 horas) e também na interpretação do fenómeno (traduzidas pelos alunos em questões como: "O que é que é a colónia extinguir-se?").

Situação 2

O trabalho de carácter mais mecânico e repetitivo também integrou as propostas efectuadas pela Carolina, assumindo muitas vezes a forma da resolução de uma equação ou inequação, do preenchimento de um quadro de sinais, do cálculo dos zeros de uma função quadrática, de mostrar que são iguais expressões como x^3+x^2-4x-4 e $(x+2)(x+1)(x-2)$ ou de encontrar o ponto de intersecção entre duas funções.

Em comum estas situações tinham o contexto estritamente matemático e a existência de uma estratégia de resolução que já era do conhecimento dos alunos. Em todas elas o recurso à calculadora era permitido, podendo existir casos em que era pedida uma resolução analítica, mas sendo mais comuns as ocasiões em que não era dada qualquer indicação à partida. Ainda assim, as observações das aulas sugeriram algumas regularidades. A calculadora foi usada para realizar a fórmula resolvente e determinar as coordenadas do ponto de intersecção de duas funções. A resolução de equações ou inequações foi frequentemente realizada analítica e graficamente. E os restantes tipos de questões foram sempre realizados sem qualquer apoio da calculadora.

Situação 3

Uma outra situação caracterizou-se pela disponibilização de um gráfico à partida. Estas foram sempre propostas em contexto estritamente matemático, em que podia ou não ser dada a expressão das funções envolvidas. Em comum tiveram ainda uma abordagem sem calculadora.

Exemplo 1

É dado o gráfico de uma função sobre um quadriculado e é pedido:

- Que se trace o referencial sobre o gráfico de modo a que a função seja ímpar,
- A expressão analítica da função sabendo que um dos zeros é $\sqrt{3}$, que $f(2)=\frac{1}{3}$ e, pela observação do gráfico, que se trata de um polinómio do 3ºgrau,
- A confirmação na calculadora da expressão encontrada.

Exemplo 2

São apresentados os gráficos de uma função quadrática e de uma afim, sobre o mesmo referencial, e é pedido que se justifique que as expressões analíticas correspondem às apresentadas e que se indique um valor de a para o qual $f(-3)\times g(a)=0$, outro para o qual $f(\pi)\times g(a)<0$ e outro ainda para o qual $f(a)\times g(a)>0$.

As informações constantes do gráfico permitem a resolução e é essa a via seguida:

> *Prof*- Então, Sofia? Arranja-me um valor para o *a*… Olhas para o gráfico, que não está no quadro, está aí no teu livro, e o *a* poderá ser por exemplo igual a quanto?... …

Mas no gráfico apenas estão marcadas as coordenadas de dois pontos de cada função e, perante o pedido insistente da professora para um valor para o a, os alunos parecem não saber o que dizer:

> *A 1* - –1.
> *Prof*- Achas que sim? -1 não, qual é o g(-1)? É 9.
> *A 1* - Ah!
> *Prof*- E tu queres um elemento *a* cuja imagem seja negativa.
> *A 2* - –4
> *Prof*- O –4 não, porque se fosse –4
> *A 3* - Era 0
> *Prof*- Era 0, mas pode ser por exemplo…
> *A 4* - –5.
> *Prof*- Por exemplo.

Situação 4

Existiram ainda situações, com ou sem contexto real, em que os alunos necessitaram de ponderar o que fazer, à procura de uma abordagem para as questões que lhes colocavam. Foram basicamente situações de carácter geométrico, em que a determinada altura era necessário encontrar determinada área ou arranjar a expressão da função que representava essa área em função de determinado parâmetro. Nestes casos, há semelhança do que sucedia noutros, não havia indicações explícitas relativamente à conveniência de recorrer ou não à calculadora, contudo a sua utilização era usual sempre que existia a expressão de uma função e era necessário encontrar alguma informação relativamente a esta.

Situação 5

O estudo de algumas famílias de funções foi feito com base em tarefas em que era proposto aos alunos que traçassem com a calculadora gráfica alguns gráficos de funções para depois, a partir da observação destes, tentar identificar determinadas características comuns. Foi assim estudada a função afim, a quadrática e a módulo. Apesar das semelhanças entre as propostas efectuadas, estas divergiram quanto ao grau de abertura. O estudo da função afim foi realizado com base numa ficha bastante estruturada, em que eram inclusivamente indicadas aos alunos quais as funções a considerar, o estudo da função quadrática já deixou aos alunos a escolha dos diferentes parâmetros das funções a considerar, e o estudo da função módulo teve por base uma opção intermédia, com uma parte inicial mais estruturada, em que eram indicadas as funções a considerar, e uma parte bastante aberta em que não só era deixado aos alunos a escolha dos parâmetros a considerar como também a identificação da família de funções que convinha estudar. A realização destas actividades foi marcada por algumas dificuldades por parte dos alunos, a título ilustrativo descreve-se sucintamente os acontecimentos no decorrer do estudo da família $a\mathrm{x}^2$, com base na aula e nos comentários da professora.

> *Prof*- Eu dizia-lhes para eles começarem por $y=x^2$. A minha ideia era que a partir daí eles vissem que quando o *a* aumenta a abertura da parábola diminui, quando *a* é mais próximo de 0 a abertura da parábola aumenta, mas eles começaram a atribuir assim valores à toa, sem nenhuma sequência, percebes? E às tantas já não sabiam qual era o gráfico que correspondia a que expressão.

A professora opta então por recorrer a outra representação e pede aos alunos para verem qual é a imagem de determinado objecto por meio de cada uma das funções, sugerindo que considerem o valor 1. Os alunos procuram corresponder à solicitação da professora, fazendo no caderno o cálculo que esta lhes pede. O processo revela-se demorado e a professora procura simplificar o trabalho dos alunos sugerindo-lhes que considerem $y_1=x^2$ e $y_2=2x^2$, no entanto, a reacção destes difere do que esperava:

> *Prof*- Quer dizer, pensando eu que eles ali viam, pronto, uma imagem, então no caso do 1, era o dobro da outra. Portanto, se para o mesmo objecto uma imagem era o dobro da outra, o $y=2x^2$ tinha que ser a que tinha uma abertura mais pequena. Eles ficam-me parados e eu não sei. Quer dizer, eu às tantas digo assim: "Meu Deus, mas o que é que se está a passar?"

As dificuldades dos alunos acabam por fazer com que a professora opte por lhes indicar que considerem apenas três funções, uma com a=1, outra com a>1 e outra com 0<a<1. Esta opção parece não facilitar o trabalho dos alunos, que continuam a não conseguir ver o efeito do parâmetro como a professora pretendia.

As tarefas

As tarefas propostas pela Carolina envolveram diferentes níveis de estruturação, questões que os alunos já sabiam como abordar ou que enfrentavam pela primeira vez, contextos puramente matemáticos ou inseridos na realidade. Uma análise das situações atrás referidas parece permitir concluir que foram propostos problemas, exercícios e investigações. Os problemas surgem fundamentalmente na situação 4, embora também possam ocorrer na 1 ou na 3; os exercícios estão presentes na situação 2, na 1 e, por vezes, também na 3 e as investigações marcam a situação 5.

A diversificação do contexto também foi tida em conta, embora não para todo o tipo de tarefas, visto que todas as investigações realizadas incidiram sobre o efeito gráfico da variação de determinados parâmetros de certas famílias de funções.

Os projectos e as tarefas de modelação não estiveram entre as propostas de trabalho seleccionadas por esta professora durante o estudo das Funções. Antes de iniciar o tema chegou a referir a intenção de realizar uma tarefa de modelação, mas acabou por nunca a concretizar.

O tipo de utilização da calculadora gráfica

Uma análise dos cinco tipos de situações de trabalho promovidas pela Carolina sugere três tipos diferentes de utilização da calculadora gráfica.

A utilização dominante da calculadora gráfica parece ser para obter uma informação concreta e especificada à partida. Ou seja, um tipo de informação bem determinado e que o aluno já sabe à partida como proceder para alcançar. Estão nestas circunstâncias os casos em que a calculadora é utilizada para obter o gráfico de uma função, para determinar um dos seus extremos, para executar a fórmula resolvente, para efectuar um cálculo numérico ou outra ocorrência similar. Trata-se de uma utilização que está presente em três das quatro situações atrás descritas em que há utilização da calculadora e que, com excepção dos dois últimos exemplos apresentados (relativos à fórmula resolvente e aos cálculos numéricos), parte sempre da expressão analítica de uma função e da sua representação gráfica.

A calculadora é também utilizada para confirmar resultados alcançados por outra via. Esta é uma utilização que a Carolina tende a incentivar quando é pedida a expressão da função que se adequa a um gráfico apresentado, como sucedeu no exemplo 1 da situação 3, mas que não é comum noutras situações, por exemplo, nunca ocorre quando é feito o preenchimento de um quadro de sinais, como referido na situação 2.

Um recurso à calculadora para explorar e/ou compreender a situação em causa e os conceitos matemáticos envolvidos é outra das possibilidades de utilização desta tecnologia. E neste âmbito podemos ter duas utilizações com características diferentes. Uma utilização em que se busca a compreensão de novos aspectos ou o conhecimento sobre novos conteúdos. Ou uma utilização em que se procura compreender algo cujos conteúdos já foram trabalhados mas que, de momento, o aluno não tem presente em todas as suas facetas ou não está a conseguir relacionar com a questão em causa.

Nas aulas observadas apenas foram identificadas utilizações do primeiro dos casos referidos, correspondentes às situações em que os alunos realizaram actividades de investigação com as características descritas na situação 5.

O tipo de utilização que é feito da calculadora parece ainda ser bastante padronizado. Ou seja, tende a circunscrever-se a um conjunto bastante limitado de possibilidades (gráfico, zeros, extremos,…) e a deixar de lado um amplo conjunto de abordagens. Por exemplo, para mostrar a igualdade entre expressões como x^3+x^2-4x-4 e $(x+2)(x+1)(x-2)$, referidas na situação 2, podia partir-se de um estudo gráfico da primeira e da procura dos seus zeros. Também a construção da expressão da função do exemplo 1 da situação 3 podia ser feita com o apoio da tecnologia numa linha exploratória, mas o pedido de confirmação posterior na calculadora parece deixar de lado essa possibilidade. De igual modo, o exemplo 2 da situação 3 podia ser desenvolvido com o apoio da calculadora. E se as respostas dos alunos parecem sugerir alguma dificuldade na compreensão da situação, o recurso à calculadora podia permitir aos alunos aceder a uma tabela de valores para as duas funções, constituindo-se como um contributo para a compreensão da situação, que podia inclusivamente envolver a representação gráfica da função produto ($f \times g$) e facilitar a compreensão de que para saber o sinal da função produto para um determinado valor a não é necessário conhecer os valores de $f(a)$ e $g(a)$ mas apenas os seus sinais.

A articulação entre o gráfico e o analítico e entre as diferentes representações

As tarefas seleccionadas e a sua implementação parecem indiciar uma preocupação de equilibrar as abordagens analíticas e gráficas, com propostas diversificadas que procuram realçar os contributos que as duas vias podem trazer ao trabalho matemático.

Se por um lado existe um incentivo à utilização da calculadora para a realização de determinadas tarefas (como, por exemplo, a execução da fórmula resolvente), por outro lado a ausência de imposição do uso ou não uso da calculadora, acaba por deixar aos alunos a hipótese de escolher e potenciar o surgimento na aula de diferentes abordagens. Este aspecto alia-se a uma valorização da compreensão e à procura de integrar simultaneamente diferentes vias e diferentes representações. É esta opção por diferentes enfoques que parece ser utilizada quando surgem dificuldades de compreensão, nomeadamente em detrimento de respostas mais automáticas mas matematicamente descontextualizadas que a tecnologia poderia proporcionar. Exemplo disso é a opção, na situação 5, de procurar contornar as dificuldades em associar a expressão de cada função ao seu gráfico recorrendo a outra representação e não a um procedimento automático da calculadora que permite ver de imediato a expressão, como *trace*.

A calculadora gráfica parece vir facilitar a articulação que a Carolina faz entre as representações algébrica e gráfica, pois são muitas as situações em que estas duas representações são abordadas, no entanto tal já não sucede relativamente à representação numérica, que praticamente não é utilizada. Os alunos têm conhecimento desta potencialidade da calculadora, que lhes foi apresentada logo na primeira aula em que a máquina foi utilizada, mas embora possam aceder a ela, por norma não a utilizam no decorrer do seu trabalho matemático. Para tal provavelmente será determinante a existência de outras formas de aceder a valores da função, como o *trace* e o cálculo de um valor da função a partir do gráfico, mas também o facto da professora não a costumar usar nas aulas. A Carolina parece não valorizar assim de igual modo as diferentes representações no trabalho matemático dos seus alunos, mesmo em casos em que estas poderiam contribuir para uma melhor compreensão dos alunos, como aconteceu no exemplo 2 da situação 3 (ver comentário no ponto anterior).

Conclusão

A calculadora gráfica é utilizada numa diversidade de tarefas, sejam elas exercícios, problemas ou investigações. A utilização que é feita não parece contudo ser marcada pelo tipo de tarefa, mas antes por aquilo que se pretende. Com efeito, o recurso a esta tecnologia surge muito tendencialmente associado à parte gráfica. O uso da calculadora é assim considerado conveniente quando o que se pretende é o gráfico de determinada função ou alguma informação que possa ser obtida através deste. Nestas circunstâncias o uso da máquina parece partir de uma expressão analítica e pretender a representação gráfica. Nos casos em que se parte do gráfico e se pretende uma representação analítica, a via de abordagem parece não passar propriamente pela calculadora, incluindo-a mais como uma forma de confirmação do que como uma via de exploração para, com base em conhecimentos matemáticos e por um processo experimental ir sucessivamente construindo a expressão pretendida.

A via para ultrapassar eventuais dificuldades também parece centrar-se mais num recurso a conhecimento e abordagens analíticas do que na utilização de outras potencialidades da máquina. A articulação entre analítico e gráfico parece ser bastante valorizada, assim como a articulação entre diferentes representações, mas não a articulação entre as diferentes representações disponibilizadas pela calculadora. Com efeito, a este nível, e em consonância com as conclusões alcançadas por Molenge e Doerr (2006), a representação numérica parece ser pouco valorizada. Além disso, não parece existir incentivo para recorrer à máquina para, com base numa abordagem exploratória, ultrapassar alguma eventual dificuldade.

Conseguir uma utilização da calculadora gráfica que tire todo o partido possível das suas potencialidades, será certamente um contributo importante para o ensino e aprendizagem da Matemática. Na análise que aqui se apresenta, procura-se fazer uma caracterização dessa utilização, importa agora ir mais longe, procurando identificar os factores que de algum modo influenciam ou determinam essa utilização, numa busca da compreensão que nos permita alcançar uma efectiva integração desta tecnologia.

Referências

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática – a experiência do projecto Mat789*. Lisboa: APM.

Banker, T. (2001). *Preservice secondary mathematics teachers' beliefs and practice regarding the use of graphing calculators in mathematics instruction*. PhD dissertation, University of Georgia (unpublished document).

Billings, E., & Klanderman, D. (2000). Graphical representations of speed: obstacles preservice K-8 teachers experience. *School Science and Mathematics*, *100*(8), 440-450.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development, 5,* 3-18.

Doerr, H., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, *41,* 143-163.

Dunham, P. (2000). Hand-held calculators in mathematics education: a research perspective. In E. Laughbaum (ed.), *Hand-held technology in mathematics and science education*, pp.39-47. Columbus, OH: The Ohio State University.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behaviour*, *17*(1), 105-121.

Farrell, A. (1996). Roles and behaviours in technology-integrated precalculus classrooms. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 35-53.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco & F. Curcio (eds.), *The roles of representation in school mathematics*, (pp. 173-185). Reston: NCTM.

Gimeno-Sacristán, J. (2000). O currículo: os conteúdos de ensino ou uma análise da prática. In J. Gimeno-Sacristán & A. Gómez (Eds.), *Compreender e transformar o ensino*, (pp.119-196). Porto Alegre: Artmed.

Goos, M., & Bennison, A. (2008). Surveying the technology landscape: teachers' use of technology in secondary mathematics classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(3), 102-130.

Heid, M. (1995). *Algebra in a technological world*. Reston: NCTM.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, (pp. 167-194). Reston, Va: NCTM.

Matos, J., & Carreira, S. (1996). *Modelação e aplicações no ensino da Matemática*. Lisboa: IIE.

Molenje, L., & Doerr, H. (2006). High school mathematics teachers' use of multiple representations when teaching functions in graphing calculator environments. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Eds.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Rocha, H. (1996). Investigando com a Calculadora Gráfica. In P. Abrantes, L. Leal & J. Ponte (Eds.), *Investigar para Aprender Matemática - textos seleccionados*, (pp. 183-192). Lisboa: APM e MPT.

Simmt, E. (1997). Graphing calculators in high school mathematics. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 16* (2/3), 269-289.

Vrasidas, C., & Glass, G. (2005). Achieving technology integration in classroom teaching. In C. Vrasidas & G. Glass (eds.), *Preparing teachers to teach with technology*, (pp. 1-20). Greenwich: Information Age Publishing.

Nota:

* Trabalho desenvolvido com o apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia e do Ministério da Educação

TECNOLOGIAS E PENSAMENTO ALGÉBRICO: CONHECIMENTO E PRÁTICA DE DUAS PROFESSORAS DE MATEMÁTICA

José Duarte
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jose.duarte@ese.ips.pt

Joana Brocardo
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
joana.brocardo@ese.ips.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo
Este estudo analisa a evolução de duas professoras que integram uma equipa colaborativa durante um ano lectivo que realizou um trabalho de discussão e concepção de tarefas sobre pensamento algébrico, com utilização da tecnologia e reflectiu sobre a sua implementação em turmas do 7.º ano. As duas professoras com práticas anteriores diferentes ao nível da integração da tecnologia, apropriam-se progressivamente do papel da folha de cálculo como apoio ao processo de generalização e modelação e salientam a importância das múltiplas representações para a compreensão das tarefas e o desenvolvimento do pensamento algébrico. O contexto de trabalho colaborativo apoiou o processo de elaboração e experimentação de tarefas abertas mais exigentes, deu confiança às professoras para arriscarem mais na sua prática e revelou-se como um importante contributo para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional.

Palavras-chave: Conhecimento profissional, Pensamento algébrico, Tecnologias, Prática profissional.

Introdução

O novo papel do professor sugere o seu envolvimento em processos de desenvolvimento profissional onde assuma um papel activo na negociação de objectivos e processos de formação (Sowder, 2007) e em que a sua prática seja simultaneamente lugar de aplicação do que aprendeu e também ponto de partida de análise e reflexão (Llinares & Krainer, 2006; Mewborn, 2003). Os contextos colaborativos são favoráveis ao desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores, entendido como um conhecimento prático, orientado para a acção e que cresce com a experiência (Elbaz, 1983). A reflexão e a colaboração constituem actividades que podem ajudar a evidenciar aspectos do conhecimento profissional dos professores (Llinares & Krainer, 2006; Rutheven & Goodchild, 2008). Pelo seu lado, as tecnologias, que têm potencial para vir a mudar a natureza das salas de aula, nomeadamente pelas analogias, exemplos, explicações e representações que permitem, parecem poder vir a ter um papel crítico no conhecimento profissional dos professores, porque "podem ajudar a tornar o assunto da disciplina mais acessível para o aprendente" (Mishra & Koehler, 2006, p. 1023).

No contexto curricular português destaca-se a introdução de um novo programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007) que propõe mudanças significativas em relação às orientações oficiais anteriores. Uma delas diz respeito ao tema Álgebra, considerando-se que é importante promover a aprendizagem das ideias algébricas logo desde o 1.º ciclo. Assume-se assim a perspectiva que o pensamento algébrico alarga o conceito tradicional de Álgebra, para incluir processos que emergem de tópicos da Matemática elementar, nomeadamente da generalização de relações da Aritmética e que se podem representar através de formas alternativas à notação algébrica simbólica, nomeadamente a linguagem natural, as tabelas e os gráficos (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007; NCTM, 2007).

Este estudo tem por base o trabalho colaborativo realizado pelo primeiro autor com duas professoras de Matemática, focado na compreensão dos aspectos do conhecimento profissional que dão corpo à sua acção na preparação das aulas, na elaboração de tarefas e na sua condução e exploração em sala de aula. Procura-se igualmente compreender os aspectos que as professoras valorizam no currículo oficial e as opções que tomam quando conduzem o ensino introdutório da Álgebra, nomeadamente no que diz respeito à utilização da tecnologia. Este artigo centra-se na análise do modo como as duas professoras integram o uso da tecnologia na sua prática lectiva e aprofunda a evolução da sua visão sobre as potencialidades do uso da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico.

As tecnologias e o desenvolvimento do pensamento algébrico

As explorações que as ferramentas computacionais permitem, a par das discussões que o professor conduz, encorajam a reflexão e as explicações dos alunos e parecem contribuir para a aprendizagem da Álgebra, nomeadamente dos processos de modelação e de apropriação do sentido de símbolo (Tabach, Arcavi & Hershkowitz, 2008). A tecnologia tem vindo a desenvolver duas características: a dinamicidade, que permite identificar a invariância, usando a variação proporcionada pelo *software* para ver o que muda e o que permanece constante; e a interactividade, que permite dar um retorno às acções do utilizador, fazê-lo pensar e reflectir sobre as consequências dessas acções (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006).

Estas características estão presentes na folha de cálculo, ferramenta que Tabach, Hershkowitz, Arcavi e Dreyfus (2008) consideram com potencialidades para a aprendizagem da álgebra escolar. De facto, a folha de cálculo: (i) pode ser usada para organizar e analisar dados e criar sequências de números; (ii) permite explorar o significado de tendências nos dados e usar diferentes representações para as mostrar; (iii) serve como intermediária entre o sistema simbólico algébrico e o sistema de notação verbal informal. No mesmo sentido, Haspekian (2003) reconhece a folha de cálculo como uma boa ferramenta de mediação semiótica, intermediária entre a Aritmética e a Álgebra e permitindo a progressão dos alunos a partir dos seus métodos intuitivos aritméticos para outros algébricos.

Esta ferramenta tecnológica, ajuda na observação de relações entre quantidades, permite múltiplas representações de funções, reduzindo a carga cognitiva de interacção com aspectos do simbolismo matemático, e valoriza a aprendizagem de exemplos que articulam várias representações como os gráficos e as tabelas (Yerushalmy & Chazan, 2003), permitindo perspectivar uma nova forma de integrar a Álgebra no currículo: “As recentes abordagens apoiadas tecnologicamente à Álgebra introdutória escolar, muitas vezes enfatizam o uso de múltiplas representações de funções e deste modo parecem articular um papel curricular diferente para as funções na Álgebra escolar” (Yerushalmy & Chazan, 2003, p. 729).

Um estudo de Bills, Wilson e Ainley (2005), sobre a concepção de tarefas com base na folha de cálculo com o objectivo de desenvolver a competência algébrica, nomeadamente o conceito de variável, em alunos de 11 e 12 anos, sugere: o equilíbrio entre os diferentes tipos de actividade algébrica, previstos por Kieran (2007a); a familiaridade e fluência com as estruturas da aritmética, de modo a expressarem a generalização; o aproveitamento da notação da folha de cálculo que permite dar ao aluno um retorno imediato das suas acções, sendo a referência da célula entendida, quer como 'célula' variável, quer como 'coluna' variável (Haspekian, 2003); e o sentido e significado da tarefa para o aluno, ao longo do trabalho que desenvolve na sala de aula. Este autor considera que, ao contrário do trabalho com papel e lápis, a folha de cálculo "acrescenta uma organização algébrica a uma resolução aritmética (…) [e] o método [de tentativa e erro] (acessível mesmo quando os alunos usualmente encontram dificuldades) favorece, pela organização da folha em si mesma, a transição para a Álgebra" (p. 5).

Desde o final da década de 80 vem sendo dada grande atenção às múltiplas representações no ensino da Álgebra. O uso de uma ou outra representação tem a ver com a concepção das tarefas, uma vez que cada uma delas acentua e valoriza diferentes aspectos (Friedlander & Tabach, 2001; Morgan, Mariotti & Maffei, 2009). As tabelas e os gráficos são as representações que mais significado trazem ao trabalho com a tecnologia para desenvolver o pensamento algébrico. Embora a prova da equivalência de expressões algébricas exija a simbologia e o trabalho algébrico, a representação em tabela dos dados numéricos que resultam da substituição de valores nas expressões, constituem um bom ponto de partida, permitindo que os alunos tenham "uma experiência com variáveis como números que vão mudando, e com os valores das expressões mudando como resultado (…) A tabela funciona como uma ponte entre a Aritmética, onde os números são específicos, e a Álgebra" (Brown & Mehilos, 2010, p. 536), onde as variáveis expressam relações gerais. No entanto, parecem ser as múltiplas representações disponibilizadas pela folha de cálculo, em particular a facilidade de estabelecer relações entre as representações numérica e gráfica, que podem ajudar os alunos "a dar sentido aos modelos algébricos dos fenómenos físicos" (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006, p. 252). A investigação conduzida em ambientes tecnológicos, chama a atenção para a importância da qualidade das tarefas e das discussões em sala de aula, em que o professor procura que os conceitos venham ao de cima, na actividade transformacional, mas assinala também a necessidade de manter em paralelo o trabalho com as técnicas algébricas de papel e lápis (Kieran, 2007).

Metodologia

Para compreender o conhecimento profissional que assiste o professor no desenvolvimento curricular e na prática lectiva, no domínio do pensamento algébrico, com recurso à tecnologia, optou-se por uma metodologia de natureza interpretativa, numa investigação de tipo qualitativo, na modalidade de estudo de caso. A opção por um estudo qualitativo e interpretativo decorre do interesse em dar atenção às especificidades do "significado e da acção na vida social que tem lugar em situações concretas da interacção face a face que se desenvolvem num contexto social mais alargado" (Erickson, 1986, p. 156). A interpretação e a construção dos significados não correspondem ao ponto de vista do investigador sobre a realidade observada, mas são uma construção que resulta da intersubjectividade presente na relação entre o investigador e os sujeitos, tendo por base as observações, a reflexão e outros dados. Os resultados são apresentados sob a forma de narrativas descritivas ilustradas com citações dos informantes. A preocupação central está nos significados que as pessoas atribuem às suas experiências e à forma como as interpretam, realizada através de uma análise de dados indutiva, em que as abstracções, conceitos ou teorias surgem 'de baixo para cima' (Merriam, 1988; Bogdan & Biklen, 1994). Stake (2007) reconhece que os investigadores qualitativos, de modo a conseguirem uma melhor compreensão sobre as situações, captam a realidade "em episódios chave ou testemunhos e representam os acontecimentos com a sua própria interpretação directa e histórias" (p. 55).

A opção pela modalidade de estudo de caso foi determinada tendo em atenção as quatro características identificadas por Merriam (1988) como propriedades essenciais de um estudo de caso qualitativo: ser particularístico, descritivo, heurístico e indutivo. Uma vez que se pretende descrever o conhecimento particular de duas professoras, integrando transcrições e interpretações que tragam compreensão sobre o objecto do estudo, através de relações e padrões que emergem indutivamente da análise de dados, realizaram-se dois estudos de caso instrumentais.

Para apropriação dos significados das acções e opções das professoras, o primeiro autor deste artigo integrou um contexto de trabalho colaborativo com duas professoras de Matemática que leccionam o 7.º ano. Nas dez sessões de trabalho (S0 a S9) gravadas ao longo de um ano lectivo, a equipa discutiu e elaborou tarefas sobre pensamento algébrico, com uso das tecnologias e reflectiu sobre cinco aulas observadas e videogravadas, de cada professora, a partir do vídeo e de um guião. As sessões presenciais, a par da comunicação síncrona e assíncrona desenvolvida na plataforma de gestão de aprendizagem (LMS) *Moodle*, a distância, constituíram as fontes principais de recolha de dados. A observação das aulas constituiu fonte de dados secundária, mediada pela discussão e reflexão na equipa.

Inicialmente foi discutido com as professoras um plano de trabalho que estabelecia o protocolo da colaboração, nomeadamente os compromissos ao nível do trabalho para desenvolver o pensamento algébrico e usar a tecnologia em sala de aula. Foram ainda realizadas duas entrevistas semi-estruturadas (E1 e E2), uma no início, sobre o percurso escolar e profissional das professoras, de diagnóstico e expectativas sobre o trabalho em torno do pensamento algébrico e as tecnologias e outra no final, procurando fazer um balanço do trabalho colaborativo realizado.

Nas sessões presenciais, discutiram-se as grandes ideias sobre o pensamento algébrico, com origem na análise de tarefas já usadas pelas professoras, em tarefas que se adaptaram de textos de investigação ou em problemas que as professoras adaptavam e algebrizavam, a partir dos seus manuais escolares. A reflexão sobre a prática na sala de aula incidia no processo de implementação das tarefas, nomeadamente sobre os processos de apresentação e condução da tarefa, sobre a comunicação, as formas de organização do trabalho e o papel da tecnologia.

A plataforma *Moodle* constituiu simultaneamente um repositório de tarefas, de documentos de orientação curricular e de investigação e um espaço de interacção entre os membros da equipa, onde se dava continuidade às sessões presenciais e se preparava a sessão seguinte. Utilizaram-se três *chats* (Ch) que decorreram entre as quatro primeiras sessões e dez fóruns, organizados mensalmente, que serviam para informações, comentários e envio de propostas de trabalho do investigador e das professoras.

Duas professoras, duas práticas de uso da tecnologia

Ana e Beatriz, as professoras que integraram a equipa colaborativa, leccionam o 7.º ano de escolaridade. Uma vez que não são professoras experimentadoras do novo Programa de Matemática, seguem o Programa de 1991. Ana, com 54 anos, tem 28 anos de serviço, possui uma licenciatura em Matemática e um Mestrado em Informática e Educação e lecciona numa Escola Básica 2,3, onde é professora há 24 anos. Beatriz, com 31 anos, tem 9 anos de serviço, é licenciada em Matemática e lecciona numa Escola Básica do 2,3, onde está há 3 anos, tendo já percorrido 8 escolas e leccionado disciplinas de Informática durante um ano e Educação Moral e Religiosa Católica, durante 2 anos.

Visão sobre o uso da tecnologia e metodologias de utilização

Tanto Ana como Beatriz têm uma fácil relação com o computador e integram-no facilmente no trabalho com os alunos. Consideram mesmo que a tecnologia é um recurso que deve estar naturalmente presente nas suas salas de aula e que aumenta e diversifica a oferta de oportunidades para aprender.

Ana vê o computador integrado de forma natural, no trabalho curricular, devido à sua experiência anterior no domínio da comunicação e da gestão da sala de aula, cujas raízes estão no seu estágio, o que lhe permitiu centrar-se nos novos desafios e tarefas a desenvolver com a tecnologia:

> As coisas que eu fazia no estágio (…) a maneira de organizar a aula, a maneira de organizar a discussão com os elementos dos grupos dos alunos ou individualmente, senti que quando eu comecei a usar o computador … eu já trabalhava, o que eu senti naquela altura foi que … a maneira como eu trabalhava em sala de aula era sem computador, mas era já uma maneira de trabalhar que me permitiu não ter receio de utilizar o computador (…) Também vi isso quando estudei um bocadinho mais a fundo, quando fiz a tese de mestrado (…) eu não tive que me preocupar muito com a mudança da minha aula e então eu naquela altura preocupei-me com as tarefas com aquele novo instrumento, porque a maneira como eu trabalhava já era potenciadora de utilizar diversos … qualquer instrumento. (Ana_E1)

Para Beatriz, parece ser natural integrar a tecnologia no ensino, porque partilha uma certa crença de ser um meio auxiliar, mas não está completamente certa do que promove em termos de aprendizagem da Matemática, embora sugira o seu uso continuado:

> Eu faço isto de uma forma natural porque eu gosto muito da tecnologia e quando posso, tento relacionar (…) Ainda estava tudo no início e eu já tentava fazer tudo o que podia com a tecnologia (…) Agora, relacionado com a Matemática, em termos de pedagogia, em termos de meios pedagógicos, eu acho que ajuda muito. (Beatriz_S2)

Ana e Beatriz salientam aspectos diferentes para justificar a integração do computador na aula. Beatriz, embora identifique diferentes finalidades, salienta a motivação dos alunos, quando se pretende introduzir, esclarecer ou consolidar conteúdos: "Eu vejo agora usando as tecnologias que eles ficam mais motivados, mais atentos e mais concentrados naquilo que se está a fazer" (Beatriz_E1). Pelo contrário, a ideia de motivação, é rejeitada por Ana, termo que diz já ter retirado do seu vocabulário. Reconhece que é essencial sair da rotina e ganhar o entusiasmo e envolvimento dos alunos, mas que isso se consegue pelos desafios que faz:

> Eu não levo o computador para motivar os meninos para a Matemática. Eu levo o computador com uma actividade específica para trabalhar. A motivação vem se a actividade na verdade tem interesse, se a actividade é boa (…) Mas a verdade é que se a aula não for bem preparada, se a tarefa não for bem organizada, não é o computador já que os prende ali porque isto já começa a ser corriqueiro. (Ana_E1)

O modo de integrar a tecnologia na aula está muito relacionado com a forma como cada uma das professoras vê a organização do contexto de aprendizagem e a comunicação. Tanto uma como outra recorrem ao uso do quadro interactivo como ferramenta de apoio ao ensino. Ana tem vindo a trabalhar, mais recentemente, com o quadro interactivo e acredita que esta ferramenta, ao permitir o acesso a objectos matemáticos e a pequenos programas interactivos, pode incentivar a comunicação na sala de aula. Reconhece que este recurso tem potencialidades, principalmente a nível do 'histórico', pois permite-lhe guardar a informação anterior:

> Tenho utilizado muitas vezes … a escrever tudo ali … e a guardar … Sabes o que é que eu sinto também nesse aspecto é porque a gente apaga o quadro não é?! E depois de repente há lá uma coisinha atrás que era tão bom que a gente pudesse ver e ali não … a gente vai lá. (Ana_S8)

O quadro interactivo ocupa um lugar de maior destaque nas aulas de Beatriz. Serve normalmente, para apresentar assuntos nas aulas, apoiar a sua exposição e explicação e tornou-se uma ferramenta natural do seu trabalho, a que recorre em conjunto com algum programa específico como um AGD ou a Escola Virtual, servindo-se de ficheiros que criou ou de recursos que o quadro disponibiliza:

> Recorrendo ao quadro interactivo facilita que toda a turma, todo o grupo esteja a ver a mesma coisa, o mesmo gráfico, estão todos centrados na mesma coisa, portanto facilita a sistematização lá está e ao consolidar daquilo que eles já tinham pensado antes. (Beatriz_S6)

É assim que este recurso apoia um estilo de ensino centrado na apresentação e explicação de conteúdos pela professora Beatriz.

Como Ana se sente à vontade com o trabalho de grupo, metodologia que usa há muitos anos na sua prática, os computadores portáteis integraram-se aí de modo natural: "Eu gosto muito de trabalhar assim, porque juntei dois em um. Eu vim regressar à minha maneira de trabalhar antes, sobre a construção de um conceito em que agora eu estou no século XXI… com aquilo que agora trabalhamos" (Ana_S6). Beatriz já usava os computadores portáteis, mas fazia-o de forma esporádica, sobretudo porque reconhecia ter dificuldades na gestão do trabalho de grupo, situação relativamente à qual foi evoluindo, mas que reconhece ter ainda um longo caminho a percorrer:

> Acho que em termos de aula, tenho que evoluir muito no desenvolver o trabalho de grupo com eles, trabalhar em grupo, agora no final deste ano fazer um balanço e tentar fazer propostas para o próximo ano … para mim própria. (Beatriz_S9)

Ao longo do ano, Ana mantém a sua forma de usar computadores, combinando o uso dos computadores portáteis e do quadro interactivo. No entanto, Beatriz vai alterando progressivamente o modo de ver e trabalhar com a tecnologia. A experiência na equipa mostra-lhe outras possibilidades de integrar a tecnologia, mais centradas no trabalho em pequeno grupo dos alunos, com computadores portáteis, de que se tem vindo a apropriar:

> Isso talvez seja o ponto essencial (…) Quando eu digo que tenho de estruturar a minha capacidade de deixar os alunos trabalhar em grupo e ajeitar as aulas para isso, conduzir as aulas para tal, acho que isso é a parte fundamental. É onde nós podemos tirar mais-valias ainda … (...) da tecnologia. (Beatriz_E2)

No final do ano Beatriz reconhece que existem diferenças significativas, em termos de aprendizagem dos alunos, entre usar a folha de cálculo com os computadores portáteis, em pequeno grupo ou usar o quadro interactivo em discussão com toda a turma. Identifica que, no primeiro caso, perde mais tempo com o trabalho de pequeno grupo, mas ganha ao nível da motivação, envolvimento e desenvolvimento do pensamento algébrico:

> Ao trabalhar com a folha de cálculo directamente vamos demorar mais tempo na realização da tarefa, não quer dizer que seja mais vantajoso, ou menos vantajoso, (…) os alunos aí estão mais envolvidos, no entanto (…) gera-se mais confusão obviamente porque temos que esclarecer as dúvidas a nível técnico, da sintaxe da própria folha de cálculo … ou dos computadores (…) Em termos de pensamento algébrico são eles que sozinhos, portanto em grupo, discutem a forma como hão-de lá chegar, portanto, desenvolve melhor o pensamento … o raciocínio algébrico. E também acho que é mais motivador. (Beatriz_S6)

A tecnologia para desenvolver o pensamento algébrico

A generalização. Ana e Beatriz, embora com um bom conhecimento sobre as tecnologias têm um conhecimento limitado do que é o pensamento algébrico. O trabalho da equipa permitiu ir aprofundando o entendimento de como este pode ser desenvolvido com os alunos, tirando partido das potencialidades da tecnologia. Logo na 2.ª sessão da equipa, Ana reconhece que o processo de cópia em coluna, na folha de cálculo, expõe os valores numéricos, pondo a descoberto as relações e mostrando regularidades:

> Começámos por não ter expressão com variável, mas depois com o *copy* e tudo o mais, eles se calhar ainda não têm essa noção, mas verificam que

> acontece sempre … aquele conjunto grande, todo. E se a gente fizesse só um, não tinham essa noção. (Ana_S2)

Esta potencialidade da folha de cálculo para generalizar a partir de um conjunto de dados numéricos em tabela, permite perceber a expressão algébrica que gera esse conjunto de dados:

> Quando eu verifico que todas as entradas - saídas, afinal de contas, têm uma regularidade, eu posso caracterizá-las por uma expressão em que então aí já tem a variável que é para cada um daqueles casos em especial. E quando eu escrevo isto eu não estou a precisar de nenhum caso em especial já (…) Na verdade, a expressão com variável é aquela que me dá a relação toda (…) sem eu necessitar de nenhuma especificidade para um caso … (…) É como se já tivessem saído todos e agora ponho aqui todos à minha frente e agora vou caracterizar como é que foram aquelas saídas daquela máquina … (Ana_S2)

Este mesmo aspecto é igualmente salientado por Beatriz, na mesma sessão de trabalho, ao referir que a análise da tabela funciona como um caminho para a generalização: ”Não consegues generalizar, se fores só alterando aqui numa linha [caso a caso] (…) perdemos completamente a noção …” (Beatriz_S2).

No contexto da análise de textos que relatam a exploração de tarefas por alunos e nas primeiras experiências que realizou, Beatriz, logo na 1ª sessão da equipa, identifica a potencialidade da passagem da generalização local para a expressão geral de uma sequência e da importância da natureza das questões a colocar:

> Eu pedia aqui … nesta ficha até … construir os pares … e o que é que eles foram fazer?! … Em vez de fazerem através da coluna A [sequência dos números naturais], escreveram a fórmula … [na coluna B], puseram um 2 na primeira linha e depois +2 (…) Eu aqui dizia que era a partir da coluna A … portanto e depois fazia … estava certo se eu não dissesse nada (…) Faziam no Excel e depois registavam aqui [na ficha] também … a fórmula. (Beatriz_S1)

Este aspecto volta a ser realçado por Beatriz na 2ª sessão: “Como é que eu obtenho os números pares? Qual é a máquina? Como é que eu posso obter o 2, o 4, o 6, o 8, a partir dos naturais?” (Beatriz_S2).

Na evolução dos seus alunos relativamente à generalização, Ana reconhece, tal como Beatriz, as potencialidades da folha de cálculo e a importância de colocar questões adequadas. Acrescenta ainda a importância de relacionar a interpretação em linguagem natural com a representação em tabela, na folha de cálculo:

> E a partir daqui foi surgindo, portanto, eu fui fazendo a sequência e no fim escrevi mesmo Posição (entre parêntesis) e lá em cima, 2 vezes posição, mais um … e aos poucos foi surgindo. Quando daqui surgiu o n, transitámos da posição para o n e depois foi só escrever. Aquilo agora tenho de pegar naquilo para trabalhar, não é?! Mas foi muito … senti que a turma percebeu muito bem que aquele n variava, porque eles têm a noção da posição que varia. E nunca tinha sentido que ficasse tão bem interiorizado que aquilo variaria, assim desta maneira. (Ana_S1)

As representações múltiplas. A tarefa das carteiras, na 3ª sessão, contextualiza uma primeira discussão sobre o modo como as múltiplas representações, favorecidas pelo uso da folha de cálculo, alicerçam ideias importantes do pensamento algébrico:

O dinheiro do Miguel e do Rodrigo

O Miguel tem 8€ na sua mão e o resto do seu dinheiro na carteira.

O Rodrigo tem exactamente 3 vezes mais dinheiro do que o Miguel tem na sua carteira.

O que se pode dizer da quantidade de dinheiro que o Miguel e o Rodrigo têm?

Figura 1. Tarefa – O dinheiro do Miguel e do Rodrigo

Beatriz hesita usar, para além da representação em tabela, a representação gráfica e reflecte sobre a importância de relacionar as duas representações:

> Estava a pensar, não sei se é bom se é mau, depois de construirmos a tabela pedir a construção do gráfico e depois fazer as questões quando é que o Miguel tem mais quantia do que o Rodrigo e fazer uma análise da tabela e gráfico em paralelo?! (…) E depois pedir, *Então escreve uma expressão que relacione ambas as quantias* e obtínhamos aí uma equação … e eles viam graficamente … (Beatriz_S3)

Ana considera que, usar a representação gráfica e numérica, em simultâneo, e traduzir uma na outra, constitui um desafio que vai além do programa.

Com a evolução do trabalho da equipa, Ana e Beatriz vão identificando mais-valias para a aprendizagem, que decorrem do uso das diferentes representações que a folha de cálculo disponibiliza. Ana, na 4ª sessão, refere que as diferentes representações a que recorre (numéricas, geométricas, gráficas, simbólicas algébricas ou mesmo a linguagem natural), a par daquelas que os alunos usam na abordagem dos problemas, vêm ao encontro dos diversos estilos de aprendizagem, permitindo que cada um 'agarre' melhor umas que outras, trazendo-lhes uma compreensão mais global: "É realmente o que eu sinto, também. Esta diversidade …" (Ana_S4).

Beatriz também salienta que o uso das diferentes representações da folha de cálculo, facilita uma apropriação dos conceitos, de modo natural, porque os representa de variadas formas, articuladas entre si: "Porque nós num problema conseguimos relacionar tabelas, relacionar gráficos, chegar às expressões… A articulação dos conteúdos é feita de uma forma natural" (Beatriz_S6). Ana partilha também desta ideia e salienta que a familiarização progressiva com um conceito está associada à experiência que os alunos têm tido com as diferentes representações, desde as tabelas numéricas, aos gráficos, até chegar às expressões algébricas. Resume esta ideia numa expressão que usa com alguma frequência (*elas já falam convosco*): "Vocês, quando olham para aquelas expressões, elas já falam convosco… já vos dizem coisas, não é?!" (Ana_S6).

O uso em simultâneo das duas representações, gráfica e em tabela, é para Ana uma mais-valia para estabelecer conexões e melhorar a compreensão dos alunos: "Isto é outra coisa que eu optei por fazer que é… que era para ter as duas coisas ao mesmo tempo. Assim, eu projectei ao mesmo tempo… que era para ver o gráfico ao mesmo tempo da tabela" (Ana_S9). Beatriz reforça e clarifica esta ideia ao reconhecer o contributo específico de cada uma das representações e, no final do trabalho colaborativo, vai mais longe ao admitir que este trabalho a leva a repensar a matemática que ensina e a forma de o fazer no futuro:

> São três modos de organização de dados que estiveram sempre constantes no nosso trabalho. E acho que isso foi muito pertinente e para os alunos torna-se ainda mais pertinente e tem uma razão de ser cada representação. Porque eles não viam a representação isolada, eles tinham que recorrer a uma e a outra para conseguirem interpretar os seus dados

> (…) Acho que aqui é o mais evidente e aquilo que se realça mais (…) Se calhar são alunos que são capazes de chegar ao 9.º ano e já não ter dúvidas (…) Isto agora só com a prática e o ir experimentando ao longo dos anos é que nós vamos verificando realmente… (Beatriz_E2)

Conclusão

No desenvolvimento do trabalho colaborativo, as professoras contactam com o processo de generalização a partir do que lêem em episódios de investigação sobre regularidades e do que discutem na equipa, quando procuram passar da análise dos casos específicos para o estabelecimento de uma lei geral. Apropriam-se progressivamente do papel da tecnologia, nomeadamente da folha de cálculo para generalizar, ao gerar grandes quantidades de dados numéricos em tabela, cuja análise revela relações subjacentes, contribuindo para clarificar o conceito de variável e desenvolver o pensamento algébrico, na linha do que referem vários autores (Haspekian, 2003; Tabach, Arcavi & Hershkowitz, 2008).

O uso de várias representações em simultâneo, nomeadamente a representação gráfica e a numérica em tabela, constituem para as duas professoras um desafio que vão integrando na sua prática. Fazem-no de forma mais deliberada quando reconhecem na tecnologia uma mais-valia no trabalho com regularidades e funções, por permitir visualizar cada uma delas em diferentes 'janelas' interdependentes, observar e reflectir sobre as implicações das mudanças de uma na outra, características referidas por Kaput (1989) e Yerushalmy e Chazan (2003). As professoras reconhecem a contribuição específica e diferente de cada uma das representações, que pode ir ao encontro da diversidade dos alunos presente na aula e contribuir para melhorar a aprendizagem, tendo em conta a natureza da tarefa e das questões colocadas, como referem Friedlander e Tabach (2001) e Morgan, Mariotti e Maffei (2009).

As professoras encaram com à vontade e integram a tecnologia nas suas aulas, mas os processos de trabalho e as formas de organização dos alunos variam consideravelmente. A evolução observada no modo como vêem e usam a tecnologia para desenvolver o pensamento algébrico dos seus alunos está intimamente ligada com a equipa colaborativa e com o contexto de trabalho criado, com o objectivo de elaborar e experimentar com os alunos tarefas sobre pensamento algébrico, usando a tecnologia, que se evidencia assim como muito promissor em termos de desenvolvimento profissional.

Referências

Bills, L., Wilson, K., & Ainley, J. (2005). Making links between arithmetic and algebraic thinking. *Research in Mathematics Education, 7(1)*, 67-81.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(9), 532-538.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. New York: Nichols.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 237-273). Roterdham: Sense.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Haspekian, M. (2003). Between arithmetic and algebra: A space for the spreadsheet? Contribution to an instrumental approach. In *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematicas Education*. Pisa, Italy, Universita di Pisa, Thematic Working Group 9. Acedido em 26 de Maio, 2010, de http://www.dm.unipi.it/~didatica/CERME3/proceedings/.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol Systems of algebra. In C. Kieran & S. Wagner (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Hillsdale: Erlbaum.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school trough college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (Student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 429-459). Rotherdam: Sense.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Acedido em 15 de Outubro, 2008, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/Programa Matematica.pdf.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education.* S. Francisco, CA: Jossey-Bass.

Mewborn, D. S. (2003). Teaching, teachers' knowledge, and their professional development. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D.Schifter (Eds.). *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 45-52). Reston: NCTM.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108(6)*, 1017-1054.

Morgan, C., Mariotti, M. A., & Maffei, L. (2009). Representation in computational environments: Epistemological and social distance. *International Journal for Computers in Mathematics Learning, 14*(3), 241-263.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ruthven, K., & Goodchild, S. (2008). Linking researching with teaching. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 561-588). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: .Erlbaum.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. I, pp. 157-223). Greenwich: Information Age.

Stake, R. E. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Tabach, M., Hershkowitz, R., Arcavi, A., & Dreyfus, T. (2008). Computerized environments in mathematics classrooms. In L. English (Ed.). *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 784-805). New York: Routledge.

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2003). Flux in school algebra: Curricular change, graphing technology, and research on student learning and teacher knowledge. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 725-755). Dordrecht: Kluwer.

WEB 2.0 E PADRÕES NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA UM ESTUDO DE CASO NO 8º ANO DE ESCOLARIDADE

Maria Luísa Almeida
Escola Básica e Secundária de Ferreira de Castro
luisaalmeida1975@hotmail.com

Isabel Cabrita
CIDTFF - Universidade de Aveiro
icabrita@ua.pt

Resumo

Nesta apresentação, colocaremos em destaque parte de uma investigação já concluída, inscrita num paradigma qualitativo, de estudo de caso, descritivo, analítico e interpretativo, que perseguia como principal objectivo avaliar o contributo da utilização de recursos da *Web* 2.0 (*applets* e plataforma de gestão da aprendizagem) na abordagem do domínio temático da Álgebra, mais concretamente, no estudo das funções, centrada nos padrões e regularidades, ao nível do desenvolvimento de: competências tecnológicas; apetências, conhecimentos e capacidades matemáticas, específicas e transversais, em particular de trabalho colaborativo. Decorreu em ambiente académico normal, num registo misto - presencial e a distância -, com alunos de uma turma do 8º ano de escolaridade. A análise a que foram submetidos os dados, recolhidos através de técnicas e instrumentos de recolha de informação variados, permitiu concluir que os recursos utilizados como apoio à abordagem didáctica implementada tiveram repercussões positivas ao nível do desenvolvimento de competências tecnológicas e matemáticas relacionadas com os tópicos referidos.

Palavras-Chave: Padrões, Funções, Novas tecnologias, Web 2.0.

Introdução

O ensino continua, genericamente, a obedecer a lugares definidos no tempo e no espaço, ou seja, o professor continua a ser o principal responsável pela transmissão de conteúdos e o papel do aluno continua a ser bastante passivo. Neste contexto, considera-se importante e urgente uma mudança. É necessário que as tecnologias de educação ocupem um espaço cada vez maior nas investigações e reflexões, de preferência desenvolvidas pelos próprios professores, para que sejam analisadas e confirmadas as suas potencialidades e em que circunstâncias se podem tornar um apoio consequente às práticas lectivas e à aprendizagem.

As plataformas de gestão da aprendizagem e *applets* permitem definir uma nova metodologia de ensino e aprendizagem, organizando o espaço de interacção, de acordo com uma dada intencionalidade, incentivando a auto-aprendizagem dos alunos recorrendo a uma rede de colaboração. No entanto, e apesar do uso se começar a generalizar, como concluíram Valente e Moreira (2007) a “plataforma é mais um reportório de informação do que de local de construção de conhecimento atendendo à diferença abismal entre visualizações e edições” (p. 789).

Por outro lado, apesar da maioria dos professores e investigadores, na área da Matemática, reconhecerem a importância dos padrões no ensino e aprendizagem, a sua abordagem em contexto de sala de aula é ainda pouco explorada. E importa perceber até que ponto os alunos são capazes de compreender e generalizar a diversidade de padrões numéricos que lhes são propostos. De facto, tal actividade revela-se fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico, que envolve a compreensão de conceitos algébricos, das estruturas e dos princípios que regem as manipulações simbólicas e de como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas.

Foi neste contexto que surgiu a investigação que apresentaremos nesta comunicação, cujo primordial objectivo foi avaliar o contributo da utilização de recursos da *Web* 2.0 (*applets* e plataforma de gestão da aprendizagem) na abordagem do domínio temático da Álgebra, mais concretamente, no estudo das funções, centrada no estudo de padrões e regularidades ao nível do desenvolvimento de competências várias, designadamente:

- matemáticas - transversais e específicas relacionadas com conhecimentos algébricos e capacidades de formulação e resolução de problemas, de raciocínio e de comunicação matemática;
- tecnológicas – apetência, destreza e autonomia na utilização de recursos da *Web* 2.0;
- interactivas – entre alunos, professor e conteúdos e, mais concretamente, ao nível do trabalho colaborativo (autonomia, espírito crítico, responsabilidade, iniciativa, integração em grupo, solidariedade e respeito pelo outro).

Enquadramento Teórico

Tecnologias

A *Web* começou por ser, sobretudo, texto com hiperligações, a que se vieram associar imagens, som e, mais tarde, vídeo. Assistiu-se a momentos em que os sítios *Web* pareciam mostruários de cor, som e de animações (Carvalho, 2007). Era uma *Web* (*Web* 1.0) unidireccional onde os utilizadores eram apenas consumidores de informação.

Com o aparecimento das funcionalidades da *Web* 2.0, a facilidade de publicação *online* e a facilidade de interacção entre cibernautas tornou-se uma realidade. O conceito da *Web 2.0* trás uma nova filosofia no cenário, pois os utilizadores da *Web* deixam de ser meros espectadores para assumirem um papel mais activo e participativo no processo de acesso e actualização da informação. A *Web* passou a ser encarada como uma plataforma, na qual tudo está facilmente acessível e em que publicar *online* deixou de exigir a criação de páginas *Web* e de saber armazena-las num servidor. A facilidade em publicar conteúdos e em comentar *posts* fez com que as redes sociais se desenvolvessem *online*. Com a *Web* 2.0 grandes mudanças ocorrem e está-se num processo contínuo de criação e de partilha.

O uso das TIC, nomeadamente, a *Internet* e a *Web*, colocadas ao serviço do processo de ensino e de aprendizagem, podem significar dinamismo, promoção de conhecimentos, em constante (co)construção, (co)reconstrução e (co)renegociação e, acima de tudo, proporcionar o prazer de estudar, de aprender, criar e recriar, numa lógica colaborativa, facilitando e estimulando as interacções entre as pessoas (Carrilho, 2006).

Dos sites interactivos que se encontram disponíveis na *Web* destacam-se, para o desenvolvimento deste estudo, os *applets*. Os *applets* começaram a ser usados na *Internet* no final de 1995 com o intuito de dar incremento visual e funcional às páginas da *Web*. Com o tempo, descobriu-se que os mesmos podiam ser usados numa grande variedade de situações e para um enorme número de aplicações específicas e que, quando devidamente inseridos em contextos educativos com objectivos claros e bem definidos, essas animações virtuais podem contribuir para a (co)construção partilhada de conhecimento pelos alunos, mais focada na construção de significados do que nos aspectos manipulativos. Uma das características dos *applets* é que permitem uma maior participação dos alunos na resolução das tarefas tornando o seu trabalho mais autónomo e mantendo os seus ritmos de aprendizagem. E quando explorados em díade ou em grupo permitem a partilha de saberes entre os alunos.

As plataformas ou ambientes virtuais de aprendizagem compreendem, na sua generalidade, serviços de comunicação e ferramentas de colaboração, funcionalidades que facilitam a partilha de conteúdos, bem como ferramentas de gestão que permitem gerir o acesso e o registo de utilizadores. A grande mais-valia destas diversas funcionalidades, em contexto educativo, talvez seja o facto de contribuírem para a construção de novos ambientes virtuais, capazes de beneficiar a comunicação e interacção entre aluno/aluno, aluno/professor e aluno/conteúdos, criando, desta forma, novas oportunidades para que o aluno possa participar de forma mais activa no processo de construção das suas aprendizagens. Estes novos ambientes implicam formas de interacção entre professor e aluno com uma forte vertente colaborativa o que

> marca um novo modelo de aprendizagem que ultrapassa o ensino tradicional reorientando-se para o construtivismo social. Ao promover um espaço de colaboração *online* permite a construção colectiva do conhecimento, pelas oportunidades de partilha, comunicação, interacção e promove a autonomia responsabilizando os alunos pelo seu processo de aprendizagem. (Flores, Flores & Escola, 2008, p. 40)

Neste sentido, considera-se que as plataformas de gestão de aprendizagem, como o *Moodle*, constituem uma boa ferramenta para o processo de ensino e de aprendizagem, quer como complemento às aulas presenciais, promovendo a extensão da escola a espaços informais, quer como ferramenta motivadora para consolidação de conhecimentos e desenvolvimento de competências provocando uma mudança no conteúdo curricular e nas metodologias utilizadas, redimensionando o papel do professor e do aluno, ajustando-se aos objectivos de cada etapa do ensino.

Em suma, a *Web* é um poderoso instrumento para a divulgação de materiais pedagógicos, fomenta a interacção entre as pessoas envolvidas em actividades muito diversas, incluindo professores, alunos, formadores, cientistas e muitos outros agentes sociais. Tudo isto é possível porque a *Internet* dispõe de um conjunto de facilidades que permitem a conversação e o trabalho cooperativo, em tempo real ou em diferido (Carrilho, 2006). Assim sendo, o sucesso presente e futuro encontra-se na conjugação equilibrada das tecnologias com as metodologias.

Interacção

As relações entre professor-aluno e aluno-aluno sempre foram e serão motivos de preocupação dos investigadores relacionados com a área da educação, visto que não há dúvidas que estas relações influenciam directamente o processo de ensino e aprendizagem.

Os ambientes virtuais de aprendizagem, em contexto educativo, permitem desenvolver a intereacção professor-aluno, aluno-aluno e aluno-conteúdos. No que respeita à interacção entre professor e o aluno, é necessário que o professor esteja consciente e aberto a uma mudança do seu papel. Num ambiente virtual, tanto o professor como o aluno estão igualmente envolvidos no processo de aprendizagem e na construção de novos saberes. O professor deve estar sempre atento e disponível para interagir com os alunos de forma a promover a cooperação, o conforto entre alunos e a construção de uma prática social com condições que favoreçam o processo de ensino e aprendizagem. A interacção entre alunos é uma característica das mais recentes gerações do ensino a distância. Os alunos, em interacção, passam a reflectir sobre a realidade a partir da experiência, ou seja, um ambiente virtual dá a possibilidade ao aluno de construir os seus conhecimentos, a partir da colaboração com os outros, dando-lhes "(…) a oportunidade de aprenderem uns com os outros através de debates, troca de ideias, partilha de experiências e conhecimentos" (Morais & Cabrita, 2006, p. 163). A interacção entre o aluno e os conteúdos está visível em praticamente todas as formas de educação, tendo assumido grande relevância nos ambientes virtuais de aprendizagem. Observando o cenário actual, verifica-se que, relativamente ao que acontecia no passado, as principais diferenças residem sobretudo nas características dos conteúdos com os quais o aluno pode interagir.

Para além dos tipos de interacção supracitados, Garrison e Anderson (2003) destacam também a interacção entre o professor e os conteúdos. De facto, seja qual for o contexto e o ambiente de aprendizagem (em sala de aula ou virtual), ao professor cabe-lhe o papel de desenvolver conteúdos didácticos. Neste contexto, o recurso aos mais diversos serviços da *Internet* veio trazer ao professor a oportunidade de utilizar e criar objectos de aprendizagem que possam ser automaticamente actualizados.

As actuais ferramentas de comunicação existentes em ambientes virtuais também vieram permitir que os professores possam interagir e colaborar entre si. Estas ferramentas favorecem a reflexão colaborativa e a resolução conjunta de problemas, bem como a troca de experiências sem as tradicionais condicionantes espaço-temporais.

Padrões e álgebra

Algumas visões mais recentes acerca da natureza da Matemática e do significado da actividade matemática convergem no sentido de se considerar a Matemática como a *ciência dos padrões* (Devlin, 2002). A Matemática, perspectivada como a *ciência dos padrões*, pode contribuir para uma nova visão desta disciplina por parte dos professores e proporcionar contextos de aprendizagem bastante ricos e motivantes para os estudantes, onde o seu poder matemático possa ser explorado (Vale & Barbosa, 2009; Vale et al., 2009).

Algumas ideias resultantes da investigação de Orton (1999) sugerem que os padrões: podem contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da Matemática; permitem o estabelecimento de conexões matemáticas; atraem e motivam os alunos porque apelam fortemente ao seu sentido estético e criatividade; permitem a promoção e desenvolvimento das capacidades e competências dos alunos; ajudam a desenvolver a capacidade de classificar e ordenar informação e permitem a compreensão da ligação entre a Matemática e o mundo em que se vive.

Nos últimos anos, a exploração de padrões tem sido realçada como uma abordagem ao ensino da álgebra. (Devlin, 2002; NCTM, 2000; Orton & Orton, 1999; Vale & Barbosa, 2009). Essa ligação é óbvia se pensarmos que a procura de padrões poderá conduzir à generalização, processo que se considera fundamental na álgebra (Sfard & Linchevski, 1995). A descoberta de padrões contribui, assim, para o desenvolvimento da abstracção e de outras capacidades matemáticas, designadamente, o pensamento algébrico cujo desenvolvimento se tornou, tal como já acontece com o pensamento geométrico, uma orientação transversal do currículo. Segundo Mason (1996) "A generalização é o coração da Matemática. Se os professores não têm consciência da sua presença e não têm por hábito propor que os alunos generalizem e expressem as suas generalizações, então não está a ocorrer pensamento matemático" (65).

No contexto português, quer o Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001) quer, mais recentemente, o novo programa nacional de matemática (Ponte et al., 2007) para o Ensino Básico, é notória a ênfase nos padrões onde as actividades à volta deste tema assumem um carácter transversal.

Enquadramento Metodológico

Fases do estudo e procedimentos

Atendendo a que se pretendia conhecer e reflectir sobre uma situação particular mas que se iram introduzindo as alterações necessárias, em função das reacções dos alunos, com vista à melhoria efectiva do processo de aprendizagem, foi efectuado um estudo de caso (Yin, 1989), num contexto próximo do da investigação-acção (Arrends, 1995, Ainscow, 1999), de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), embora se tenha recorrido pontualmente à análise quantitativa.

Desenvolveu-se, durante todo ano lectivo de 2008/2009, numa turma de 8.º ano de escolaridade, da qual a professora era a própria investigadora, constituída por 22 alunos dos quais foram seleccionados quatro sujeitos-caso, embora, no âmbito desta comunicação, apenas se dê ênfase a um dos casos seleccionados.

Realizou-se em três etapas distintas e decorreu em diferentes contextos espaço-temporais. Para que se fique com uma ideia global do mesmo, resumem-se, no esquema da figura 1, as principais etapas e as técnicas – inquirição, análise documental e observação - e instrumentos de recolha de dados – questionários e entrevistas, teste, grelhas de observação/análise, diário de bordo, produções dos alunos, registo fotográfico, dados estatísticos fornecidos pela plataforma - afectos a cada uma dessas etapas.

A primeira etapa decorreu nos 1.º e 2.º períodos e permitiu a pesquisa, análise e construção de recursos, o registo dos alunos na plataforma de gestão da aprendizagem *Moodle*, a análise e exploração de algumas ferramentas disponíveis na plataforma e a caracterização da amostra seleccionada. Para a caracterização da mesma aplicou-se o Questionário Inicial o qual permitiu conhecer com que frequência, de que forma e para que fins os alunos utilizavam o computador, em particular a *Web* 2.0, quer nas aulas quer extra-aula e qual a sua opinião relativamente ao uso do computador e da *Web* 2.0 a Matemática. Também se aplicou um teste (na modalidade pré-teste) com uma função diagnóstica dos conhecimentos algébricos dos alunos e relativos à formulação e resolução de problemas, raciocínio e comunicação e que, posteriormente, permitiu avaliar a evolução ocorrida. Tal teste é constituído por três partes:

- ✓ uma teórica, de resolução individual;
- ✓ uma prática, de resolução individual mas com recurso a *applets* e;
- ✓ uma 3ª parte realizada a pares, na plataforma *Moodle.*

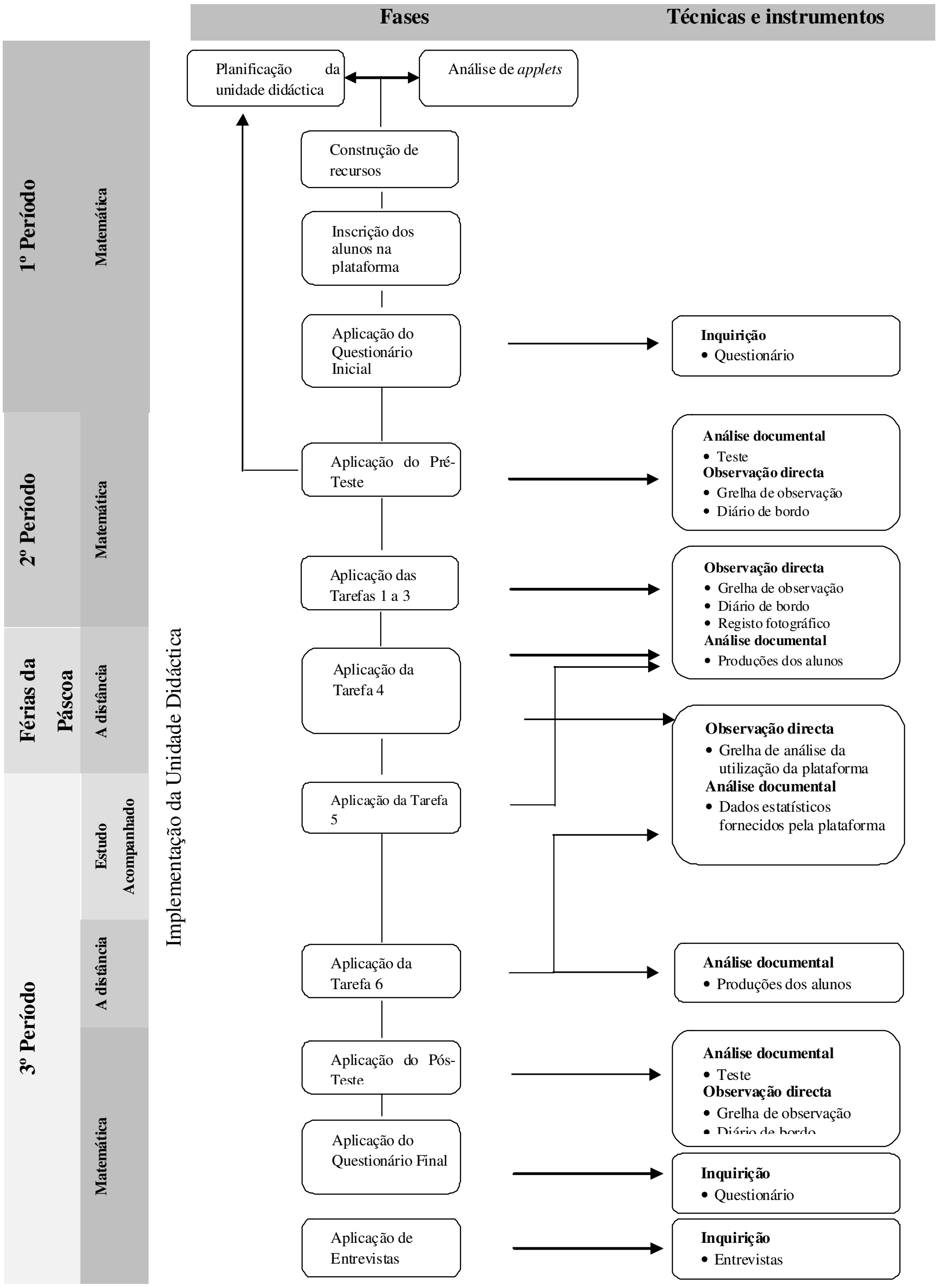


Figura 1. *Design* de Investigação.

A segunda etapa, que diz respeito à abordagem da implementação da unidade didáctica "Funções", decorreu no 2º e 3º períodos lectivos em diferentes contextos espaço-temporais (aulas de Matemática, sessões da Área Curricular Não Disciplinar de Estudo

Acompanhado e a distância). Foi proposta a resolução de tarefas de diferente natureza e realizadas:

- ✓ três em díade, com recurso aos mesmos *applets* que foram utilizados na 2ª parte do teste;
- ✓ Duas em grupo, duas recorrendo às diversas ferramentas disponibilizadas pela plataforma de gestão da aprendizagem *Moodle* (fóruns, *wiki*, glossário e *chat*) e uma sem auxílio da tecnologia.
- ✓ uma em díade mas sem recurso às tecnologias.

Na terceira etapa, analisou-se a evolução operada durante o estudo e, através da aplicação do Questionário Final e entrevistas, pretendeu-se conhecer com que frequência, de que forma e para que fins os alunos utilizaram o computador, em particular a *Web* 2.0 a Matemática após a vivência da experiência e esclarecer-se algumas questões que emergiram através da recolha dos dados durante o mesmo, respectivamente.

A utilização de diferentes instrumentos de recolha de dados, incluindo registos fotográficos das sessões presenciais e a resolução das tarefas propostas e iniciadas na aula mas para serem realizadas a distância, teve como principal finalidade permitir o cruzamento da informação, numa tentativa de validação dos resultados obtidos.

Apresentação e Análise dos Resultados

Os dados recolhidos foram alvo de uma análise de conteúdo orientada pelas seguintes categorias decorrentes dos objectivos de investigação que se definiram: caracterização do sujeito-caso; dimensão matemática: dimensão tecnológica; dimensão interactiva e apreciação global.

Como referimos anteriormente, nesta comunicação apenas se apresentam os resultados relativos a um dos sujeitos-caso seleccionados.

Caraterização do sujeito-caso – a Rita

A Rita era uma excelente aluna, muito interessada e bastante participativa nas tarefas escolares. Através do questionário inicial e no que concerne à utilização do computador e da *Web* 2.0 extra-aula, a mesma declarou que, antes da implementação do estudo, já gostava muito de utilizar o computador e usava-o às vezes em casa e na escola. Utilizava-o sempre para realizar trabalhos escolares, apresentações em *Power Point*, pesquisas na *Internet* e aceder a sites educativos. Por vezes, utilizava-o para comunicar com os amigos, aceder ao site da escola e à plataforma de gestão de aprendizagem *Moodle*, trocar e-mails, ver filmes e ouvir música. A Rita costumava aceder, às vezes, a sites educativos em casa e na escola para estudar e realizar certas tarefas propostas pelos professores para as quais era necessário recorrer a diversas fontes de informação.

No que respeita ao uso do computador e da *Web* 2.0 nas aulas, a Rita declarou gostar muito de o utilizar porque *"…nos ajuda na realização de trabalhos e na pesquisa para esses"* mas, antes da implementação do estudo, utilizava-o apenas nas Áreas Curriculares Não Disciplinares de Estudo Acompanhado e Área de Projecto para realizar tarefas, individuais ou em grupo, propostas pelos professores, apresentar trabalhos e pesquisar informação.

Dimensão matemática

Através da aplicação do pré-teste, verificou-se que a Rita, na 1ª parte, a partir de uma situação real, determinou o termo geral de uma sequência, identificou uma relação de proporcionalidade directa, indicou a constante de uma relação de proporcionalidade directa, interpretou o seu significado no contexto do problema apresentado e conseguiu formular e resolver problemas envolvendo grandezas directamente proporcionais. No entanto, teve dificuldades em justificar porque é que a relação entre duas variáveis era de proporcionalidade directa, em representar graficamente duas variáveis directamente proporcionais discretas e não conseguiu justificar a posição relativa de duas rectas que definem uma função afim e uma função linear a partir da sua visualização gráfica. Também teve dificuldade em construir uma tabela com termos próximos e distantes a partir da representação gráfica da situação apresentada e registar as regularidades encontradas. A Rita não conseguiu identificar o gráfico de uma relação de proporcionalidade directa, não determinou termos distantes de uma sequência implícita na situação apresentada e, ao analisar uma função afim a partir das suas diferentes representações, não conseguiu determinar a ordenada na origem nem representou algebricamente uma função linear e uma função afim.

Na 2ª parte do teste, onde foi apresentada outra situação do quotidiano com recurso a *applets*, a Rita determinou, com alguma facilidade, termos próximos de algumas sequências e, conhecendo termos distantes dessas sequências, determinou a respectiva ordem. Também identificou uma relação de proporcionalidade directa e representou correctamente, num referencial cartesiano, os pontos coordenados referentes a uma situação apresentada. No entanto, uniu os pontos, o que não fazia sentido no contexto dessa situação e revelou dificuldades em determinar o termo geral de uma sequência de uma relação entre duas variáveis apresentada. Além disso, errou algumas questões envolvendo generalização (próxima ou distante), como se ilustra na figura 2.

2. O Carlos viu dois anúncios de duas companhias de telemóveis. A "Contacto", oferecia um serviço telefónico com uma mensalidade de €5, mais €0,20 por cada minuto de chamadas. A "Fala-Barato" não possuía nenhuma mensalidade, embora cobrasse €0,40 por minuto.

Ambas as companhias usam uma tecnologia que permite cobrar o tempo exacto de utilização do telefone; não "arredondam" o tempo ao minuto mais próximo, como outras companhias concorrentes fazem.

2.1. Compara os preços praticados pelas companhias, relativamente ao tempo das chamadas efectuadas durante um mês, preenchendo a seguinte tabela:

Nº de minutos	0	10	20	30	40	50	60
Contacto	5	7	9	11	13	15	17
Fala-Barato	0	3,6	7,6	11,6	15,6	19,6	23,6

Figura 2. Resolução da Rita da questão 2.1 do pré-teste (2ª parte).

Revelou, ainda, dificuldades em: interpretar representações gráficas de uma função linear e de uma função afim e em representá-las algebricamente; justificar a razão da representação de uma função conter a origem de um referencial e de outra não; a partir da representação de uma função afim, com recurso a um *applet*[1], analisar a variação do seu declive e da sua ordenada na origem e justificar as suas opções e raciocínios.

Na 3ª parte do teste, a Rita revelou dificuldades na resolução de problemas e em justificar as suas ideias e raciocínios.

Durante a abordagem da unidade temática, na aplicação da tarefa nº 1, a pares e com recurso a um *applet*[2], verificou-se que a Rita determinou termos próximos e distantes

[1] http://www.shodor.org/interactivate/activities/slopeSlider/ [acedido em 15 de Abril de 2011].
[2] http://www.shodor.org/interactivate/activities/Graphit [acedido em 15 de Abril de 2011].

das sequências apresentadas (figura 3), apesar de ainda não ter registado as regularidades encontradas.

8. Considerem agora que *f* representa o número de filas de cubos cinzentos.
Completem a tabela e registem todas as regularidades que conseguirem encontrar.

Nº de filas de cubos cinzentos	Nº de cubos cinzentos	Nº total de cubos (cinzentos e brancos)
1	4	12
2	8	16
3	12	20
4	16	24
5	20	28
6	24	32
⋮	⋮	⋮
9	36	44
⋮	⋮	⋮
12	48	56
⋮	⋮	⋮
f	168	176

Figura 3. Resolução da Rita e do seu da questão 8 da tarefa n.º 1.

Na tarefa nº 2, também realizada a pares e com recurso a um *applet*[3], verificou-se que a Rita já registou as regularidades encontradas na tabela construída e explicou o significado da constante de proporcionalidade directa existente na relação entre duas variáveis no contexto de uma situação apresentada (figura 4).

1.2. As grandezas - preço total a pagar e número de litros de gasolina adquiridos - são directamente proporcionais em algum dos postos de abastecimento?
Em caso afirmativo, indiquem em qual das empresas isso se verifica.
Calculem a constante de proporcionalidade directa e expliquem o seu significado real.

Sim, na gasolineira Pb.
1,3 : 1 = 1,3 -> constante de ~~por~~ proporcionalidade
A constante de proporcionalidade significa o preço de cada litro de gasolina.

Figura 4. Resolução da Rita da questão 1.2 da tarefa n.º 2.

A aluna, na resolução desta tarefa, revelou uma evolução ao nível da comunicação matemática, como se pode confirmar na justificação que a mesma deu a uma questão (figura 5).

2.4. Numa pequena composição, justifiquem se esta promoção é ou não vantajosa. Caso seja vantajosa, referiram em que condições.

Sim, esta promoção é vantajosa para aquelas pessoas que abastecem o seu depósito e pagam 50 € quando antes pagavam mais. Ou seja, as pessoas que abastecem o depósito com grandes quantidades são beneficiadas.

Figura 5. Resolução da Rita da questão 2.4 da tarefa n.º 2.

[3] http://www.shodor.org/interactivate/activities/SimplePlot [acedido em 18 de Abril de 2011].

Na 3ª tarefa, ainda continuou a revelar dificuldades em analisar a variação do seu declive e da sua ordenada na origem, a partir da representação de uma função (figura 6).

1,31ℓ-0,10ℓ= 1,20ℓ Primeiro, a linha afasta-se do eixo dos x e aproxima-se do eixo dos y.
1,30ℓ-0,30ℓ = 1ℓ Na segunda está a igual distância de ambos os eixos.
1,60ℓ Na terceira aproxima-se do eixo do y e afasta-se do eixo do x.
~~Primeiro~~, ~~a linha vai-se aproximar do eixo dos x e depois~~,
~~quando o valor aumenta a linha~~ ~~afasta~~ ~~afasta-se~~.

Figura 6. Resolução da Rita da questão 2 da tarefa n.º 3.

Na tarefa 4, que foi proposta na plataforma de gestão da aprendizagem e teria que ser resolvida em grupo, os alunos tinham que pesquisar na *Web* informação que lhes permitisse formular um problema do quotidiano que envolvesse o estudo de funções, centrado no estudo dos padrões e regularidades. A Rita revelou essa capacidade, formulando um problema com mais propriedade do que no pré-teste (figura 7).

Brinquedos em Promoção

Durante o mês de Março, duas lojas de brinquedos estiveram em promoção.
Na loja "Martibrinca", cada brinquedo, independentemente de qual fosse o brinquedo, custava 20€.
Na loja "Mundo dos brinquedos" fez-se a seguinte promoção:

	Sem promoção	Em promoção
Barbie	20€	18€
Nenuco	18€	16,20€
Carro telecomandado	35€	31,50€
Bola de futebol	10€	9€
Casa das Barbies	50€	45€
Estojo de maquilhagem	40€	36€

1. Completa as seguintes tabelas:

Martibrinca

Barbie	Nenuco	Carro telecomandando	Bola de futebol	Estojo de maquilhagem	Casa das barbies
20 Euros		20 Euros			

Mundo dos brinquedos

Barbie	Nenuco	Carro telecomandado	Bola de futebol	Estojo de maquilhagem	Casa das barbies
18 Euros					36 Euros

2. Existe uma razão constante em todos os brinquedos, na loja "Mundo dos Brinquedos, entre o preço antes da promoção e o preço depois da promoção? Se sim, qual é?
3. Quanto custaria um brinquedo em promoção, na loja "Mundo dos Brinquedos", que antes custasse 54,34€?
4. Qual das promoções será mais benéfica para o cliente? Justifica.
5. Se realizasses um gráfico para cada loja, o que observarias para cada caso?

Figura 7. Formulação do problema feita pela Rita na tarefa n.º 4

Na tarefa nº 5, para ser resolvida a pares mas sem recurso às tecnologias, a Rita já determinou, sem dificuldades, a ordenada na origem para cada uma das representações gráficas apresentadas e calculou o seu declive indicando correctamente a posição relativa das rectas representadas (figura 8).

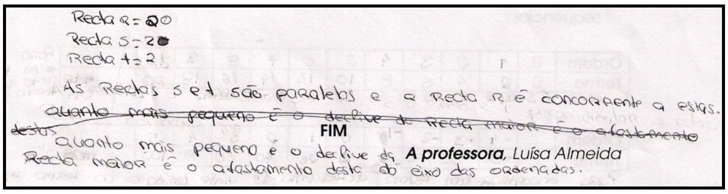
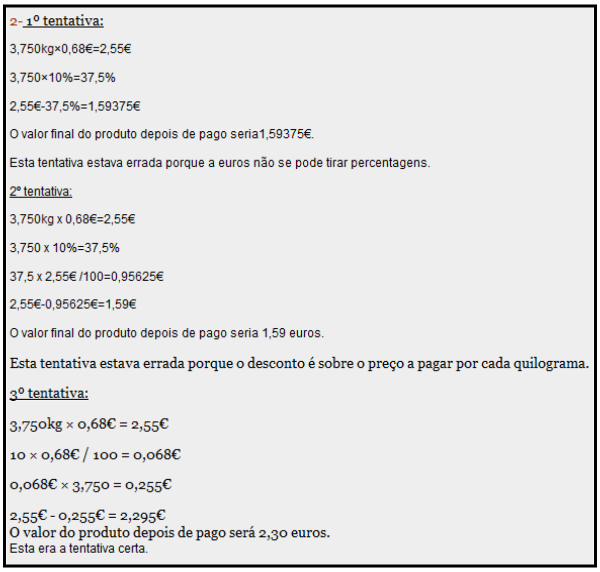

Recta r = 0
Recta s = 2
Recta t = 2
As Rectas s e t são paralelas e a Recta r é concorrente a estas.
~~Quanto mais pequeno é o declive da Recta maior é o afastamento destas~~
FIM
Quanto mais pequeno é o declive da Recta maior é o afastamento desta do eixo das ordenadas.
A professora, Luísa Almeida

Figura 8. Resolução da Rita da questão 3.3 da tarefa n.º 5

Na tarefa nº 6, também proposta na plataforma de gestão de aprendizagem *Moodle* para ser resolvida em grupo, a Rita revelou capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemáticas (figura 9).


2- 1º tentativa:

3,750kg×0,68€=2,55€

3,750×10%=37,5%

2,55€-37,5%=1,59375€

O valor final do produto depois de pago seria1,59375€.

Esta tentativa estava errada porque a euros não se pode tirar percentagens.

2º tentativa:

3,750kg x 0,68€=2,55€

3,750 x 10%=37,5%

37,5 x 2,55€ /100=0,95625€

2,55€-0,95625€=1,59€

O valor final do produto depois de pago seria 1,59 euros.

Esta tentativa estava errada porque o desconto é sobre o preço a pagar por cada quilograma.

3º tentativa:

3,750kg × 0,68€ = 2,55€

10 × 0,68€ / 100 = 0,068€

0,068€ × 3,750 = 0,255€

2,55€ - 0,255€ = 2,295€
O valor do produto depois de pago será 2,30 euros.
Esta era a tentativa certa.

Figura 9. Resolução da Rita da questão 2 do problema

Pela análise dos resultados do pós-teste, verificou-se que a Rita evolui ao nível das competências transversais designadamente do raciocínio e comunicação matemática, pois apresentou as justificações mais claras e completas dos raciocínios, mais formais, efectuados, bem como específicas, relativas ao conteúdo matemático envolvido.

Dimensão tecnológica

A primeira vez que a Rita teve contacto com os *applets* usados no estudo foi aquando da realização da 2ª parte do pré-teste. Acedeu aos mesmos facilmente, mas teve alguma dificuldade em explora-los. Posteriormente, durante a exploração das três tarefas que envolviam o recurso aos *applets,* verificou-se uma evolução ao nível das apetências no uso das tecnologias, destreza e autonomia.

Como se pode verificar, no Pós-Teste, a Rita já escreveu correctamente a expressão algébrica, traçou a representação da mesma e verificou que os pontos representados se encontravam sobre a recta que representava a expressão escrita (figura 10).

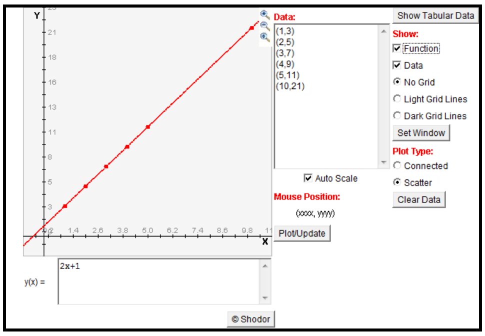


Figura 10. Representação gráfica da Rita na questão 1.7 no Pós-Teste (2ª parte).

No que respeita à realização das tarefas com recurso à plataforma de gestão da aprendizagem *Moodle* (3ª parte do teste e tarefas 4 e 6), a Rita não teve dificuldade em explorar este recurso dado que já tinha realizado uma tarefa desta natureza antes do estudo. Acedeu à plataforma e ao problema sem dificuldades e a sua entrega decorreu com segurança.

Após a proposta da tarefa nº 4, a Rita demonstrou alguma ansiedade ao saber que a iria realizar a distância. Na entrevista, quando questionada acerca disso, referiu que *"…ao princípio a ideia* de *estarmos de férias mas a fazer um trabalho que tinha que ser contínuo parece que não agradou muito, mas depois…foi uma experiência boa porque não perdemos o contacto total com os colegas durante as férias e também assim permitiu-nos lembrar e não esquecer a matéria que estávamos a dar, durante as férias"*.

Durante o desenvolvimento das tarefas nº 4 e 6, a aluna acedeu e participou com regularidade nas diversas actividades disponibilizadas pela mesma (fóruns, *chat*, *wiki*, glossário, directório "Funções"). Apesar de o número de acessos ser muito superior ao número de publicações (figura 11), a sua participação na plataforma foi boa, tendo acompanhado com regularidade o trabalho desenvolvido pelos colegas, nomeadamente, os que estavam responsáveis por resolver o problema elaborado pelo seu grupo. Transcreve-se um excerto da sua intervenção a propósito – "*Olá grupo 2! Eu estive a ver a vossa resolução e verifiquei que ao completarem a tabela esqueceram-se do espaço que respeito a 3 pistolas na loja do quico e o espaço que fiz respeito a 4 pistolas na bricolandia. Bom trabalho*!" (Domingo, 26 de Abril de 2009, 13:15)

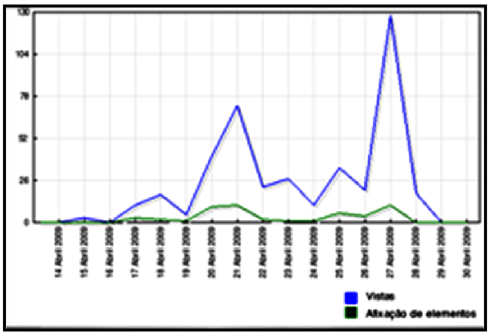


Figura 11. Dados estatísticos relativos à utilização da plataforma *Moodle* na tarefa n.º 6 pela Rita

Através do Questionário Final, a Rita revelou que o maior problema sentido na realização destas tarefas, a distância, com recurso à plataforma de gestão da aprendizagem, foi a lentidão no acesso à plataforma por dificuldade na ligação à *Internet*.

Dimensão Interactiva

A Rita demonstrou iniciativa, responsabilidade, autonomia, espírito crítico e colaboração e interacção entre os seus pares e com a professora.

Na figura seguinte, regista-se uma interacção entre a Rita e o seu colega e a professora/investigadora no sentido de esclarecer dúvidas surgidas ao longo da resolução das mesmas (figura 12).

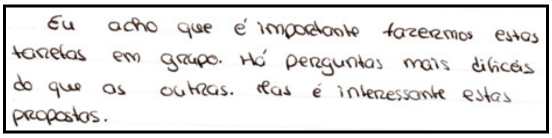
Do par com a professora	Bastante ☒ Alguma ☐ Pouca ☐	Esclareceram dúvidas e certificaram-se de respostas. O Diogo quis saber qual o significado do icon "Mouse Position".

Figura 12. Registo na Grelha de Observação da interacção estabelecida entre a Rita e o seu par com a professora/investigadora.

Também na resolução da tarefa nº 2, com recurso a um *applet,* houve interacção e colaboração entre a Rita e o seu par - debateram ideias, esclareceram dúvidas e dividiram tarefas - e com os restantes colegas da turma (figura 13).

Figura 13. Discussão entre a Rita e o Diogo com colegas da turma das questões da tarefa n.º 2.

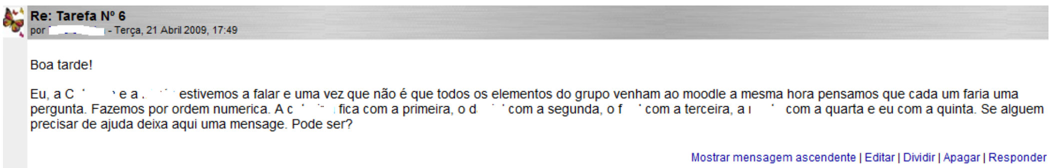
A própria aluna valorizou esta forma de realizar as tarefas, tal como expresso na figura seguinte.



Eu acho que é importante fazermos estas tarefas em grupo. Há perguntas mais dificéis do que as outras. Mas é interessante estas propostas.

Figura 14. Opinião da Rita relativa à tarefa n.º 2.

Nas tarefas com recurso à plataforma de gestão da aprendizagem *Moodle,* a Rita interagiu com os colegas, de grupo ou não, através do fórum "Cantinho da partilha" (figura 15) e do chat *"Troca directa"*, com o objectivo de dar início ao trabalho, orientar na divisão de funções a realizar por cada elemento do grupo, participar na resolução das tarefas e transmitir informações.



Re: Tarefa Nº 6
por - Terça, 21 Abril 2009, 17:49

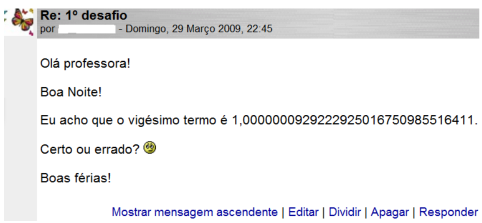
Boa tarde!

Eu, a C e a estivemos a falar e uma vez que não é que todos os elementos do grupo venham ao moodle a mesma hora pensamos que cada um faria uma pergunta. Fazemos por ordem numerica. A c fica com a primeira, o d com a segunda, o f com a terceira, a com a quarta e eu com a quinta. Se alguem precisar de ajuda deixa aqui uma mensage. Pode ser?

Mostrar mensagem ascendente | Editar | Dividir | Apagar | Responder

Figura 15. Interacção da Rita com os colegas de grupo através do fórum *"Cantinho da partilha"*

Também interagiu regularmente com a professora/investigadora nos fóruns a fim de transmitir algumas informações, esclarecer dúvidas e resolver os desafios colocados por esta (figura 16).



Re: 1º desafio
por - Domingo, 29 Março 2009, 22:45

Olá professora!

Boa Noite!

Eu acho que o vigésimo termo é 1,0000000929222925016750985516411.

Certo ou errado?

Boas férias!

Mostrar mensagem ascendente | Editar | Dividir | Apagar | Responder

Figura 16. Interacção da Rita com a professora/investigadora nos fóruns.

A partir do Questionário Final, apurou-se que a Rita considerou que, durante o desenvolvimento destas tarefas, a utilização da plataforma permitiu uma maior interacção com os conteúdos. E quando questionada acerca desta forma de trabalho, a mesma referiu que ser interessante pela interacção que se gera (figura 17).

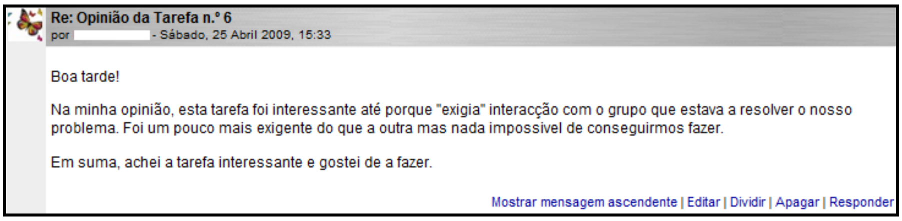


Figura 17. Opinião da Rita relativamente à Tarefa n.º 6.

Apreciação global

Durante o estudo foi notório que, de uma maneira geral, a Rita mostrou agrado em utilizar *apllets* e a plataforma de gestão de aprendizagem *Moodle*. Através do Questionário Final, assinalou que o uso adequado do computador e da *Web 2.0* no ensino e aprendizagem da matemática contribui para uma visão mais positiva e dinâmica da matemática; torna a aprendizagem mais desafiante permitindo ao aluno um maior controlo sobre ela; promove o desenvolvimento do raciocínio matemático; contribui para o desenvolvimento de competências de resolução de problemas; permite realizar trabalhos de investigação ou pesquisa; estimula a auto-aprendizagem e promove a partilha de opiniões e ideias matemáticas.

Relativamente às tarefas realizadas com recurso aos *applets* (tarefas 1, 2 e 3), a Rita, na Entrevista, declarou que as mesmas foram "*fáceis*" de fazer e gostou de as realizar a pares: *"…porque é uma experiência diferente, nunca tínhamos tido nada do género. Embora seja para avaliação, é a pares e assim também podemos tirar algumas dúvidas com os colegas"*. No entanto, a aluna referiu que sentiu dificuldades na exploração do *applet* "*slopeSlider"* porque, primeiro, teve que *"perceber como funcionava"*.

No que concerne às actividades desenvolvidas a distância com recurso à plataforma de gestão de aprendizagem *Moodle*, a Rita declarou que gostou de as realizar porque *"…é uma experiência diferente"*. Em particular, gostou da Tarefa n.º 6 – *"Partilhar e aplicar…"* porque *"tínhamos que resolver o problema do outro grupo e também porque havia interacção entre os grupos"* e esta interacção permitiu o esclarecimento de dúvidas entre os alunos, *"…quando tínhamos dúvidas podíamos ajudar-nos uns aos* *outros…”*. Também considerou que estas tarefas permitiram desenvolver a autonomia porque *“às vezes era preciso tomar a iniciativa para começar a fazer o trabalho ou para ajudar os colegas quando eles não estavam a conseguir fazer”*. A aluna considerou, ainda, importante a sua utilização como forma de estimular e favorecer o processo de ensino e como meio de partilha de informação e construção de conhecimento partilhado.

Finalmente, no que concerne à importância dos serviços oferecidos pela *Internet*, nomeadamente, *applets* e plataforma de gestão de aprendizagem *Moodle*, no auxílio ao estudo da Matemática, a Rita considera que: *“ajuda-nos a perceber certas coisas, a desenvolver a nossa motivação”*.

Conclusões

Com este estudo, conclui-se que uma adequada utilização dos *applets e* da plataforma *Moodle,* suportando a realização efectiva, por parte dos alunos, individualmente ou em grupo, de tarefas complexas e desafiantes e tirando-se partido das ferramentas de comunicação, permite a assunção de um novo papel ao aluno, agora mais activo nas suas aprendizagens matemáticas.

Uma comunidade virtual de aprendizagem apresenta como principal traço definidor e distintivo a mediação colaborativa e tecnológica dos processos de interacção (Dias, 2004) e, pelo que nos foi possível perceber, houve situações, nesta comunidade, onde tais processos estiveram presentes.

O recurso aos *applets* e às ferramentas de comunicação utilizadas através da plataforma promoveu claramente uma interacção não só funcional mas, principalmente, intencional entre os alunos, professora/investigadora e conteúdos e, consequentemente, o desenvolvimento de competências matemáticas e tecnológicas em estudo, envolvendo conhecimentos, capacidades e atitudes.

Referências

Ainscow, M. (1999). *Understanding the development of inclusive schools*. London: Falmer Press.

Almeida, L. (2010). *Web 2.0 e padrões na aprendizagem da matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro.

Arends, R. I. (1995). *Aprender e Ensinar*. Lisboa: McGraw-Hill.

Bodgan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Carvalho, A. (2007). Rentabilizar a Internet no Ensino Básico e Secundário: dos Recursos e Ferramentas Online aos LMS. Sísifo. *Revista de Ciências da Educação, 03*, 25-40. Acedido em 1 de Maio, 2008, de http://sisifo.fpce.ul.pt.

Carrilho, C. (2006). *A WWW na aprendizagem da matemática no âmbito do "Estudo Acompanhado"*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro.

Devlin, K. (2002). *Matemática. A ciência dos padrões*. Porto Editora.

Dias, P. (2004). Comunidades de aprendizagem e formação on-line. *Nova Formação. Revista semestral sobre Formação à Distância & E-learning, 3* – Julho, 2004, INOFORE.

Flores, Q., Flores, A., & Escola, J. (2008). *A plataforma Moodle no 1º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Superio*r. In CaldasMoodle08. Caldas da Rainha: Educom.

Garrison, D., & Andreson, T (2003). *E-learning in the 21 st Century: A Framework for Research na Practice.*London: Routledge Falmer.

Mason, R. (1996). The university: current challenges and opportunities. In S. D' Antoni (ed.). *The Virtual University*, (pp. 49-69). Paris: UNESCO

ME-DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. (pp. 57-71). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Morais, N. S., & Cabrita I. Ambientes virtuais de aprendizagem: comunicação (as)síncrona e interacção no ensino superior. *Prisma.com, 6* (158-177).

NCTM (2000). *Principles and Standards for school Mathematics*. Reston: NCTM.

Orton, A. (1999). *Pattern in the teaching and learning of mathematics.* London : Cassell.

Orton, A., & Orton, J. (1999). *Pattern and the approach to algebra*. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of Mathematics*. London: Cassell.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Brenda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Acedido de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatemática.pdf

Sfard, A., & Linchevski, L. (1995). *The gains and pitfalls of reification: the case of algebra. Educational Studies in Mathematics, 26,* 191- 228.

Vale, I., & A. Barbosa (Org.) *Patterns-Multiple Perspectives and Contexts in Mathematics Education* (pp. 69-80). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo – Projecto Padrões. ISBN: 978-989-95980-4-1

Vale, I.; Barbosa, A.; Borralho, A.; Barbosa, E.; Cabrita, I.; Fonseca, L.; & Pimentel, T. (2009). *Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática – Propostas curriculares para o Ensino Básico*. Viana de Castelo: Escola Superior do Instituto Politécnico de Viana do Castelo. ISBN 978-989-95980-2-7.

Valente, L., & Moreira, P. (2007). *Moodle: moda, mania ou inovação na formação?* – Testemunhos do Centro de Competência da Universidade do Minho. In P. Dias; C. V. Freitas; B. Silva; A. Osório &A. Ramos (orgs.), *Actas da V Conferência Internacional de Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação* – Challenges 2007. (pp. 781-790). Braga: Centro de Competência da Universidade do Minho

Yin, K. (1989). *Case study research: design and methods*. Londres, Sage.

COMO RECONHECER O ENTE MATEMÁTICO, SE ELE TEM DIFERENTES FACES?

Miguel Silva
Escola Secundária Jorge Peixinho - Montijo - FCT/UNL- (UIED)
leugimangelo@sapo.pt

António Domingos
Departamento de Matemática da FCT/UNL- (UIED)
amdd@fct.unl.pt

Resumo

A compreensão das razões do (in)sucesso na disciplina de Matemática, tem despertado o interesse de muitos investigadores. A inegável complexidade que a disciplina envolve, fruto das diferentes representações de um mesmo ente matemático, concorre porventura para esse (in)sucesso. Conhecem-se análises curriculares, sociais, culturais e até antropológicas que procuram contribuir para uma melhor compreensão do fenómeno. Através do conhecimento de algumas teorias, pretende-se perceber que implicações podemos retirar que ajudem à compreensão das diferentes interacções ocorridas em sala de aula. Muitas dessas teorias, tentam descrever o processo de "como os alunos pensam" e de como procuram integrar as novas ideias na estrutura mental que já possuem. De uma forma integradora poderá considerar-se que este artigo tem um duplo objectivo. Na primeira parte faz-se uma abordagem que contempla diferentes teorias não no intuito da criação de uma meta-teoria que seja suporte de todos os aspectos relevantes de cada um dos autores, mas como meio que enriqueça a análise que podemos fazer relativamente às acções desenvolvidas pelos alunos em sala de aula. Esta conexão de teorias surge ainda da necessidade de reduzir a inflação de perspectivas, tendo no entanto sempre a preocupação de manter a coerência entre o discurso sem alterar os suportes de cada uma delas. Nesta análise será dado especial relevância à abordagem semiótica defendida por Radford acerca de teoria da objectificação. Na segunda parte do artigo pretende-se analisar os significados que os alunos dão a informação disponibilizada através de gráficos, tendo em conta os contributos das teorias entretanto abordadas. Os dados empíricos recolhidos seguem uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa e mostram-nos como é possível caracterizar diferentes níveis de desenvolvimento conceptual que os alunos manifestam quando colocados perante tarefas que envolvem pensamento matemático complexo.

Palavras-chave: Funções, Conexões entre Teorias, Objectificação, Semiótica, Pensamento matemático complexo, Gráficos de funções.

Introdução

Mais importante que identificar a teoria que se revela mais apropriada ou que explica de forma mais objectiva o processo de aprendizagem, é perceber de que situação concreta ou fenómeno estamos a tratar clarificando as palavras e nomenclaturas para que consigamos entender a que objectos ou sujeitos nos referimos e de que forma chegámos àquelas conclusões (Mason, 2011). Este autor defende ainda, que a colecção de definições, propriedades e sentidos dadas pelas diferentes teorias, só faz sentido se a situação a estudar estiver completamente identificada. Mason considera assim que não faz sentido falar sobre um conjunto complexo de conjunturas que teorize sobre situações demasiado abrangentes que lhe confiram um extremo grau de incerteza, subjectividade e uma aplicabilidade incerta.

Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello (2008) propõem um meio conciliador entre teorias, seguindo uma lógica de graus de aproximação, como sugerido na figura 1.

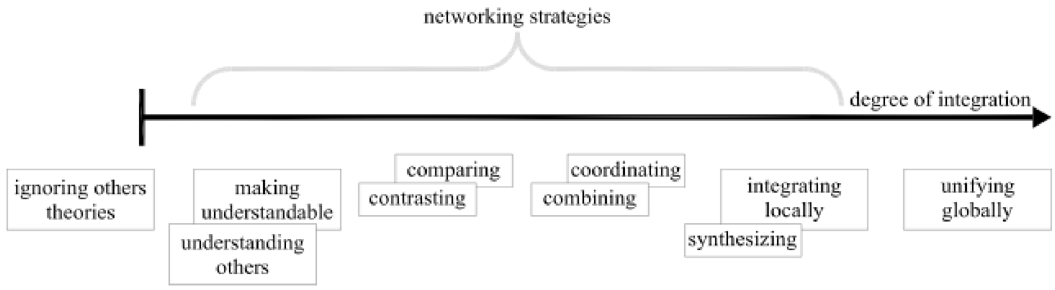


Figura 1. Graus de integração das estratégias de trabalho.

Neste artigo, vamos optar por uma abordagem que privilegia a coordenação entre as estratégias presentes nas teorias abordadas, procurando os seus pontos comuns, não negligenciando no entanto as suas fragilidades.

Perspectiva semiótica

Inspirado numa corrente social-cultural Vygotskiana, onde a influência Piagetiana se sente na importância dada à acção sobre os objectos, o trabalho de Radford foca-se em aspectos específicos de aprendizagem como tomada de consciência e de construção do indivíduo bem como na importância das dimensões sociais da actividade matemática. Radford (2008), desenvolve uma teoria do conhecimento a que dá o nome de Teoria da Objectificação (TO). A TO assenta numa ideia que releva a importância das dimensões antropológica e histórico-cultural na construção do conhecimento. É uma teoria que tenta afastar a ideia de que a construção do conhecimento é um processo puramente individual e que tem apenas em conta o próprio aprendente. Consequentemente, a TO assenta na ideia de que o processo de ensino e aprendizagem é um processo social, preenchido de influências históricas e culturais resultantes do percurso de vida dos indivíduos envolvidos. Trata-se por isso, de um processo reflexivo que cada indivíduo produz assente nas suas vivências culturais sejam elas passadas ou presentes. Por conseguinte, e deste ponto de vista, "pensar" não é apenas um processo mental ganhando extraordinária importância a influência sócio-cultural.

Segundo Radford (2008) as várias teorias de aprendizagem diferem sobretudo em três grandes aspectos.

a) Conteúdo a ser aprendido que pode ser visto segundo vários ângulos como nos é apresentado por Gimeno (1998) - Currículo apresentado aos professores, currículo modelado pelos professores, currículo apresentado à turma, currículo avaliado;
b) O aprendente;
c) Como se desenvolve o processo de aprendizagem.

A teoria de Radford (2008), de uma forma geral ocupa-se das três vertentes, enfatizando o ecossistema cultural no qual decorre a aprendizagem. Vários autores falam-nos da importância da componente social (Vygotsky, 1998) e dos ambientes de aprendizagem (Ausubel, 2003; Serrazina & Oliveira, 2010; Valadares & Moreira, 2009) mas Radford atribui-lhe uma centralidade que vai para além da aprendizagem dos conceitos, sendo sobretudo importante para a construção do pensamento do *eu* indivíduo. Para Radford, os ambientes culturais desempenham um papel primordial na maneira como chegamos ao conhecimento, para além da influência que vão tendo na definição da construção do próprio individuo.

Tal como Ausubel (2003), Radford admite que existe uma corrente na comunidade científica que considera que o aluno consegue através de um processo de descoberta alcançar uma forma de conhecimento matemático institucionalmente aceite pela comunidade escolar. Embora não defenda essa ideia, argumenta que esse conhecimento não pode ser desprezado pois será uma forma de os alunos começarem a atribuir significado a alguns objectos matemáticos com que se deparam no seu percurso. Desta forma Radford considera que as estratégias que os alunos utilizam na elaboração dos seus raciocínios não podem ser desprezadas, nomeadamente todo o tipo de artefactos que utilizam para dar corpo ao seu entendimento. Para além disso considera que os artefactos não são apenas facilitadores e indutores do raciocínio, sendo a parte corpórea do mesmo, tendo por isso um papel central na resolução das actividades (Arcavi, 2003) .

Os artefactos são vistos como sendo objectos materializadores do pensamento, são parte integrante do mesmo (Radford, 2008).

Tendo em conta o papel que a envolvência social e a herança cultural detêm no processo de ensino e aprendizagem defendido por Radford, é importante que o aluno tenha um papel activo na apropriação do conhecimento num constante movimento de reflexividade, que pode ser encarado como um processo de dissecação e reconstrução da informação tendo como ferramentas o seu percurso antropológico, a sua herança sócio-cultural e o seu conhecimento das proposições e regras matemáticas que oferecem a este movimento reflexivo e refractário a subjectividade inerente a cada aprendente.

Desta forma, Radford (2008), tal como ilustrado na figura 2, desenvolve a TO assente num sistema Semiótico que visa a interacção de três grandes eixos: primeiro - *sistema semiótico de significância cultural* (Radford 2003), onde estão inseridos os objectos matemáticos, suas concepções, e relações com o mundo real; segundo - o *território do pensamento baseado nos artefactos*, e em terceiro - *a actividade*, ou seja que tipo de acções, operações e actividades realizamos com os objectos.

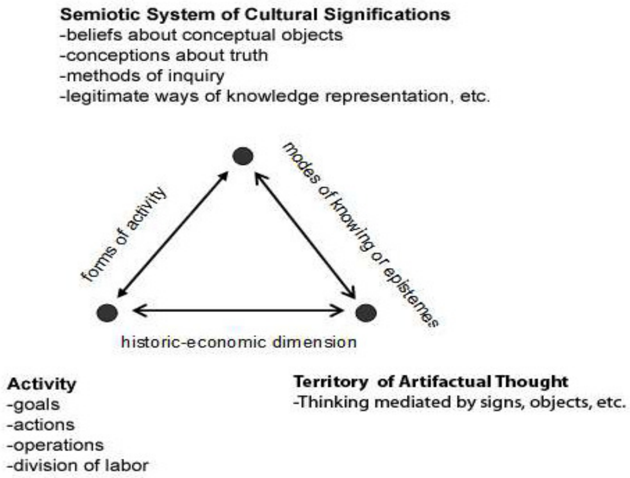


Figura 2[1]. Três Eixos do Sistema Semiótico.

Nesta teoria da Objectificação, os objectos matemáticos vão sendo gerados durante o processo de actividade matemática do indivíduo. Esta perspectiva contrasta com a

---

[1] The arrows show the interaction between a Semiotic System of Cultural Significations, Activity and the Territory of the Artifactual Thought. The interaction generates the forms of activity and the modes of knowing on the base of the specific historic-economic dimension. In a dialectic process, forms of activity, modes of knowing, and the historic-economic dimension alter the triangles vertices (Radford, 2008, p. 220)

perspectiva semiótica defendida Duval (2006) onde os objectos matemáticos já existem à partida e em que os signos vão tentando reproduzir de uma forma ou de outra o que o ente matemático, que para este autor é um ser inatingível, representa.

No entanto, a teoria da Objectificação não é apenas um processo de construção do conhecimento. Torna-se em algo mais rico, algo que vai para além de um movimento de atribuição de significado dos conceitos que vai encontrando no seu trajecto tendo em conta o seu percurso histórico e o ecossistema cultural que o envolve. Deste processo brota não apenas conhecimento matemático mas sobretudo uma alteração do próprio indivíduo a nível pessoal e na criação do seu *eu*.

Para que todo esse processo de construção do indivíduo ocorra, sobretudo no que concerne à atribuição de significados, o autor destaca duas fontes importantes: a dimensão do "conhecimento residente nos artefactos" e a dimensão da "interacção social".

A primeira fonte prende-se com a informação que a manipulação dos objectos nos desperta. A vertente social e o contexto em que esses objectos são utilizados bem como a interacção e a convivência com quem sabe descodificar os objectos é uma fonte de criação de significados para o aprendente. Seja um mestre num ofício ou mesmo um professor numa escola, a interacção entre o aprendente e o seu instrutor que é hábil em manipular e descodificar as várias valências do objecto, promove no aluno uma quantidade de novas perspectivas, criando e abrindo diante de si uma quantidade novos caminhos de aprendizagem. Desta forma, a linguagem simbólica característica da sala de aula que é utilizada como norma (Marques, 2008; Cobb, Wood, Yackel, & McNeal, 1992), poderá ser considerada como um exemplo claro de artefacto característico e normativo da aprendizagem numa aula de matemática que surge como mediador, gerador e regulador de aprendizagens. Nos artefactos podemos incluir signos e objectos de diferentes ordens: símbolos matemáticos, gráficos, gestos, palavras, textos, calculadoras, instrumentos de medida, entre outros. As perspectivas atrás referidas que surgem com a manipulação dos objectos são de tal forma importantes que os próprios objectos mudam a nossa forma de pensar e agir perante novas situações. Como exemplo pense-se nas inúmeras possibilidades de iteração e de criação de exemplos que instrumentos tecnológicos fizeram surgir não há muitos anos em sala de aula. Indo um pouco mais longe poderemos ainda acrescentar que o grau de destreza bem como as diferentes utilidades que se dão a cada um destes artefactos utilizados *per sí* ou as conexões entre os vários objectos poderão ser importantes para aferir como os alunos manuseiam os conceitos matemáticos e em que medida deixam de considerar o objecto matemático como sendo o objecto operatório e ao mesmo tempo são capazes de enveredar por um caminho de generalização em direcção à abstracção que os objectos permitem (Dreyfus, 1991; Domingos & Silva, 2010). Assim, a maneira como os alunos vão usando de uma forma cada vez mais adequada os meios de objectificação (artefactos) permite ao professor aferir qual a sua evolução quer a nível de aquisição dos objectos matemáticos de uma forma universalmente aceite, bem como da sua maturação como indivíduo matematicamente competente. Este processo de maturação vai para além da caracterização de um processo individual, ganhando uma dimensão externa transformando-se num processo social. Assim sendo, a TO procura promover, não só a autonomia individual, mas sobretudo uma autonomia sensível à sua cultura e comunidade, onde a relação com os outros surge como um compromisso social que cada indivíduo terá que honrar e que leva ao conhecimento comum.

A segunda fonte tida como fundamental e procedência de atribuição de significado segundo a TO, é a dimensão social. Aqui a interacção social poderá ser encarada como as interacções que se criam na sala de aula entre os alunos e o professor, entre os próprios alunos e entre os alunos e toda a envolvência social, física e normativa da aula. Desta forma, o olhar para a sala de aula terá de ser mais rico e decisivo, do que "apenas" o local onde se negoceiam significados. Segundo esta perspectiva, a sala de aula é um espaço simbólico (artefacto) onde existem regras e rituais que influenciam e impelem o indivíduo ao movimento refractivo que é estruturante da aprendizagem. Esses movimentos, estão carregados de influências culturais, quer na linguagem, quer nas normas que obedecem ao ambiente social envolvente e até mesmo do ambiente particular propiciado, quer pela disciplina, professor ou grupo de trabalho em si. Defende-se por isso que a influência cultural e histórica, bem como normativa, não permitam uma negociação total do meio e dos significados que vão ser trabalhados na aprendizagem. Consequentemente, existem por isso, pré-condicionantes que se mantêm dada a sua natureza cultural profundamente instituídas e que são elos suporte e condutores dessa aprendizagem.

De acordo com este ponto de vista as interacções sociais não são apenas catalisadores da aprendizagem, tomam um papel fundamental na consubstanciação da aprendizagem. Desta forma a aprendizagem é mais de que um processo de apropriação de conhecimento científico. Ganhando uma nova dimensão, passa a ser reconhecido como um processo de procura do conhecimento, bem como de procura da identidade do indivíduo. A esta procura da construção do indivíduo Radford (2008) chama de subjectificação, crendo que a partir da objectificação atribuída ao conceito matemático, o sujeito constrói-se a si mesmo e por conseguinte o processo de aprendizagem é não só e apenas um processo de crescimento de estruturas de conhecimento mas também de crescimento pessoal (Radford, 2008).

Este processo de aprendizagem não é visto na mesma perspectiva por professores e aprendentes. Enquanto que para os professores está bastante claro nas suas cabeças o que se pretende com determinado passo ou movimento de aprendizagem, para o aluno esses movimentos não são à partida previsíveis. O professor, como detentor do conhecimento, consegue ter uma perspectiva global do caminho a percorrer, enquanto que o aluno percorre uma tripla dificuldade: primeiro não conhece o conceito final que é previsto apreender; segundo não tem toda uma riqueza cultural que o professor tem quer a nível histórico, quer na manipulação dos artefactos; em terceiro todo o percurso que leva ao conceito final, pode não ser sempre intuitivo tendo em conta a suas experiências anteriores. Estas diferentes formas de encarar o processo de ensino e aprendizagem (ensino pelas lentes do professor e aprendizagem segundo os alunos), poderão ser motivo de não entendimentos sendo importante para os professores conseguirem fazerem um percurso de regressão, que permita perceber quais e quão limitadas são as experiências a que os alunos podem fazer apelo para sustentarem as novas aprendizagens. São "apenas" nessas experiências que os alunos se vão alicerçar para dar significado às novas aprendizagens e por isso algo aparentemente fácil aos olhos do professor não consegue fixar-se na estrutura cognitiva do aluno.

A importância da compreensão é preocupação de muitos autores. Também para o *National Council of Teachers of Mathematics* (NTCM) nos princípios e normas para a matemática escolar se dá especial ênfase à importância da compreensão na aprendizagem da matemática. Refere-se mesmo que "a compreensão é facilitadora da aprendizagem subsequente e do desenvolvimento da autonomia dos alunos e da sua capacidade de enfrentar novas situações e problemas" (NTCM, 2007, p. IX). A utilização da matemática em novas situações, ou a competência para a utilização da matemática como um saber em acção, ou transferível, está intimamente ligada a essa compreensão. Mas vários autores acreditam poder ir mais longe considerando que a capacidade de utilizar adequadamente a Matemática em contextos variados é associada à compreensão dos conceitos, mas também ao conhecimento factual e ao domínio dos procedimentos matemáticos. Desta forma a resolução de problemas é uma das normas apresentadas pelo NTCM como estratégia importante da compreensão dos conceitos matemáticos. No entanto, segundo Radford a resolução de problemas é um meio que, através dos movimentos de reflexão, conjecturas e proposições, obriga a que cheguemos a uma aprendizagem matemática. Essa reflexão envolve o problema que é proposto, a cultura social do indivíduo e toda a estrutura de artefactos aí incluídos. Desta forma, considera-se que aprender matemática não é apenas ter habilidade para resolver problemas que envolvem conceitos matemáticos, mas sobretudo é um processo mais profundo da construção do indivíduo que aprende a pensar matematicamente com toda a influência que isto terá na construção da personalidade.

(Des)conexões

Mas de que forma os entes matemáticos ficam conhecidos pelos seus representantes ou signos? Será que conseguimos reconhecer os entes matemáticos apesar das diferentes faces que estes podem apresentar? Até que ponto o ente matemático fica completamente representado pelo seu símbolo? Mais do que responder a estas questões precisamos reflectir sobre o papel desempenhado pelas diferentes representações que os entes matemáticos podem assumir. Como sabemos a sua representação não é única e por isso os alunos têm tanta dificuldade em fazer a tradução entre representações. Podemos por exemplo questionar-nos: O que significa o símbolo π ? Representa a amplitude de um ângulo ou a razão entre o perímetro e diâmetro de uma circunferência? Desta dificuldade surge a certeza de que os alunos têm necessidade de ver para além do que se vê, do que é manipulável e palpável. Precisam ir para além do mundo corpóreo "conceptual-embodied world" Tall (2004). Neste primeiro dos seus três mundos, David Tall refere que este é construído através da percepção do mundo que nos rodeia, e da reflexão que fazemos sobre esses objectos, quer sejam físicos ou mentais. Através da reflexão e de uma crescente riqueza de linguagem conseguimos construir noções matemáticas para além do mundo físico que conseguimos percepcionar. Acrescido aos objectos físicos, este mundo inclui percepções mentais do imaginário espacial que o indivíduo possui. Esta visão tem pontos de contacto com a TO de Radford, que para além de artefactos como os gestos, calculadoras, réguas, etc., enfatiza também os artefactos linguísticos como meios de objectificação ou de construção do conhecimento, considerando que o facto de a restrição do processo de construção de conhecimento se limitar à manipulação dos sistemas simbólicos como é defendido por Duval, se torna imensamente limitador. O argumento é simples e sustenta que a linguagem matemática não pode ser um sistema hermético e fechado de manipulação de símbolos, defendendo os artefactos linguísticos como meios de objectificação. Tal como numa língua materna, na linguagem matemática esses símbolos não fazem sentido e necessitam de um contexto social que os consubstancie. A propósito do desenvolvimento humano assente na discussão narrativa Jerome Bruner refere que:

> … Este método de negociação e renegociação de significados através da mediação da interpretação narrativa é, parece-me, uma das realizações máximas do desenvolvimento humano nos sentidos ontogénico, cultural e filogénico da expressão. Na perspectiva cultural, é imensamente suportado, claro, por recursos narrativos armazenados de uma comunidade e, igualmente, pela sua preciosa panóplia de técnicas interpretativas… (Bruner, 2002, p. 75)

Consequentemente o papel do professor parece tornar-se a dado ponto do processo de aprendizagem mais importante. Nesta altura, a intervenção do professor com os artefactos necessários, não deverá ser de todo ingénua. Levar o aluno a pensar para além dos seus sentidos, ver o que não é visível, transporta o aluno para uma outra dimensão, *a abstracção*. A preocupação com a passagem à abstracção também a encontramos em Radford, tal como o encontráramos na representação-abstracção (Dreyfus, 1991); no movimento entre abstracção empírica - abstracção pseudoempirica - abstracção reflexiva (Dubinsky, 1991) ou na passagem entre os mundos *conceptual-embodied world*; *proceptual symbolic-world*, e *formal-axiomatic world* (Tall, 2007). Radford, sustenta que o aprendente passa de uma percepção material do objecto para um estado de generalização, que lhe permite intuir resultados que não estão ao alcance da visão. O processo começa com uma objectificação, que através da acção e reflexão dá corpo às ideias matemáticas. Depois o aluno cria um estado de sensibilidade emergente para a actividade e Radford chega a defender ser necessária uma "*domesticação do olho*" para poder ter a sensibilidade que o permita transformá-lo num "órgão de percepção teórico-cultural", (Radford, 2010, p. 6). Porém este momento em que o aluno vai para além da percepção física do objecto, surge invariavelmente da interacção social com os pares e com o professor que o vai alertando para pormenores, propriedades e regularidades, tendo em conta a envolvência sócio cultural dos intervenientes. Nesta interacção recorre-se a uma série de artefactos (gestos, linguagem, gráficos, etc.) que desta forma, apesar de “serem bastante materiais”, se tornam estruturantes do pensamento abstracto. Este despertar provocado no aluno permite uma generalização assente na capacidade de sintetizar e ser sensível a encontrar diferenças entre iguais e similitudes entre diferentes, largando as amarras do objecto primeiramente percepcionado. Na verdade, o aluno não age nem generaliza naturalmente de uma forma algébrica, mas sim através de acções de forma eminentemente empírica assente nas suas crenças e concepções que promove sobre o objecto.

Passando a outro nível de questões podemos pensar como se consegue reconhecer o ente representado pelos seus diferentes representantes? Como podemos alternar entre os diferentes representantes, sem perder a essência do ente representado? Olhando segundo a perspectiva de Duval (2006), esse salto entre representantes é o movimento mais difícil de concretizar. Considerados como sendo à *priori* inacessíveis, os objectos matemáticos surgem apenas perante nós através dos seus representantes sendo que as conexões entre as suas várias faces e entre estas e o que elas representam (objecto ou significado que este quer representar) obedecem a um conjunto de operações *de tratamento* e *conversão***.** Desta forma Duval, defende um sistema semiótico caracterizado por um conjunto de sinais elementares, conjunto de regras e uma estrutura de significados decorrentes da relação entre os signos dentro do sistema. Assim sendo, os objectos matemáticos considerados como entidades invariantes que ligam diferentes sistemas semióticos à medida que se vão fazendo operações de tratamento e conversão, entendendo a cognição matemática como o produto da coordenação dos diferentes sistemas semióticos.

Duval defende que todo o desenvolvimento da matemática tal como o da sua aprendizagem é acompanhado das interacções entre os sistemas semióticos. O signo ganha um duplo sentido: 1) estrutura semiótica e 2) representante do objecto. A criação de sentido e a aprendizagem requerem que lidemos com diferentes sinais de diferentes signos em diferentes sistemas semióticos sem nunca perder a noção do objecto matemático por eles representado e que estamos a estudar.

Percebe-se desta forma que a semiótica assume um papel representativo dos objectos matemáticos e torna-se essência da cognição que é enriquecida pela fluente coordenação dos vários sistemas semióticos. As representações semióticas são diacrónicas e são coordenadas através de um processo de *tratamento e conversão***.** A abordagem de Duval apresenta uma relação *sinal/objecto* que ganha sentido através da semiótica. A esta abordagem chamamos *estrutural/funcional*, passando a actividade matemática a ser caracterizada pela transformação dos sinais no complexo sistema semiótico. Essas transformações concorrem para a construção de significados e advêm das reflexões estabelecidas entre o signo e a entidade por si representada conectada nos diferentes sistemas semióticos. Os sinais representam objectos através das várias transformações semióticas. No sistema de Duval o signo é tratado de forma diacrónica transformando-se noutros signos dentro do mesmo sistema semiótico, ou mesmo noutro signo de outro sistema semiótico, mas representado o mesmo objecto. Se não tomarmos os sinais como representativos dos objectos, estes serão inatingíveis e não racionalizáveis como hoje os conhecemos.

Metodologia

Este estudo segue uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 2006), integrando uma perspectiva de experiência de ensino (Shulman, 1986). Trata-se de uma ferramenta poderosa na metodologia de investigação utilizada na formulação de explicações do comportamento matemático dos alunos e que tem como objectivo "'apanhar' os processos no seu desenvolvimento e determinar como é que o ensino pode influenciar de maneira optimizada esses processos" (Kantowski, 1978, p. 45). Esta abordagem visa descrever e interpretar os processos de desenvolvimento dos fenómenos sobre que se debruçam induzidos por meio de intervenções planificadas.

A tarefa foi realizada em duas turmas de alunos do 7º ano, de uma Escola do Distrito de Setúbal do qual o primeiro autor é professor. Esta tarefa surge como uma das sugeridas nas brochuras (Ponte, Matos, & Branco, 2009), de apoio à implementação do novo programa do ensino básico de matemática (Ministério Educação, 2007) existentes na página da Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC), no capítulo de funções. Esta tarefa consiste na elaboração por parte dos alunos, tendo apenas a informação que surge nos gráficos, de uma história que possa ser uma descrição da interacção dos dois gráficos onde surgem como variáveis *Distância a casa* vs *Tempo* e *Fome* vs *Tempo*, respectivamente. Apesar de surgir nas brochuras com outros objectivos, a tarefa foi escolhida para ser aplicada no início do capítulo de funções para que o professor pudesse aferir qual o entendimento que os alunos têm de informação apresentada segundo uma representação gráfica, antes do tema ser tratado na aula pelo professor. Desta forma, toda a construção e o significado que os alunos produziram são baseados nas suas experiências anteriores, sem ter grande preocupação com rigor matemático ao nível das variáveis e da construção dos próprios gráficos. O desenvolvimento desta tarefa foi trabalhado individualmente. Esperava-se que no fim, alguns alunos apresentassem à turma a sua história, onde todos eram convidados a comentar, acrescentar e corrigir algo que considerassem pertinente.

Análise de dados

Nesta secção pretende-se ilustrar de que forma os alunos conseguem invocar as diferentes representações que lhe são dadas através dos gráficos e a forma como conseguem fazer traduções entre elas. Procura-se ainda compreender como é que a Teoria da Objectificação nos pode ajudar a descrever as acções dos alunos através do seu sistema semiótico. Apresentamos de seguida algumas das categorias que foi possível identificar.

Numa primeira categoria podemos considerar os alunos que se fixam nos gráficos e fazem uma interpretação pictórica da situação.

Ao analisar os gráficos da figura 3, os alunos tendem a referir que o passeio se realizou numa montanha que subiram e desceram, como se o traçado do gráfico representasse o próprio monte.

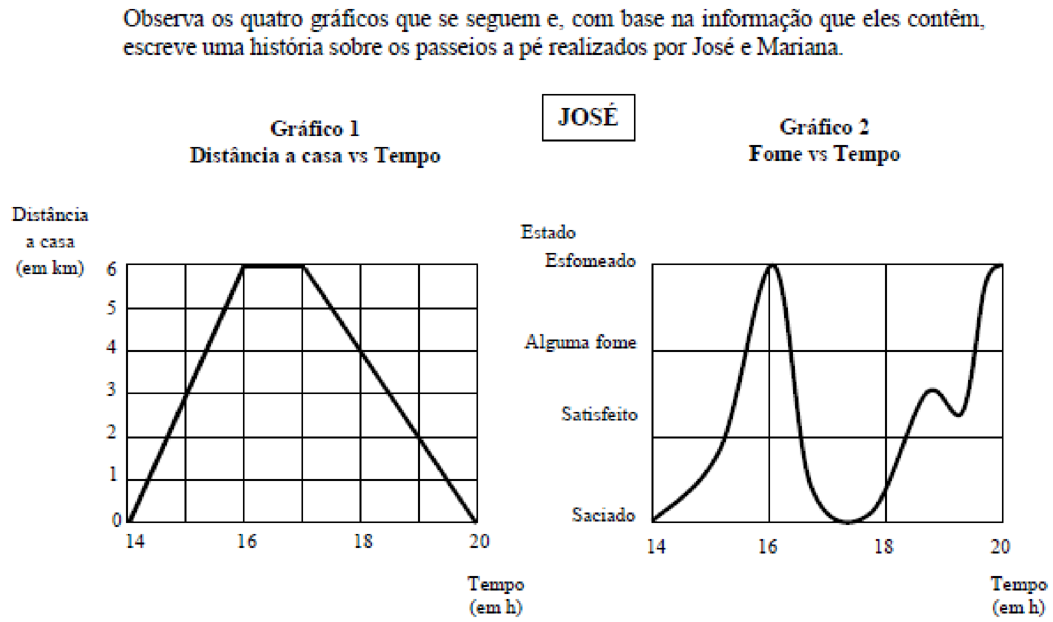
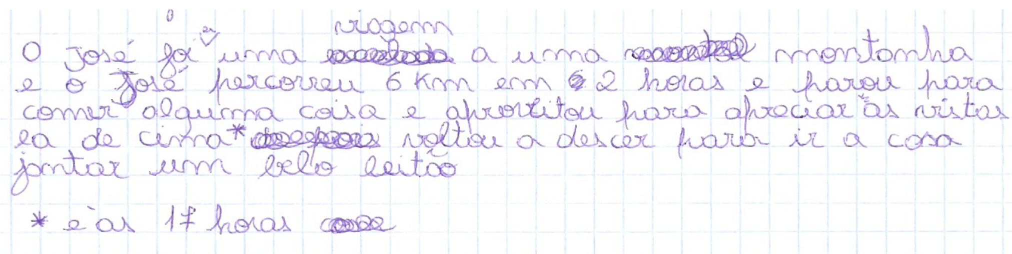


Figura 3. Tarefa proposta aos alunos.

É o caso do Humberto (figura 4) que apenas valoriza alguns dos pontos críticos, como o "cimo da montanha" ou o "jantar".

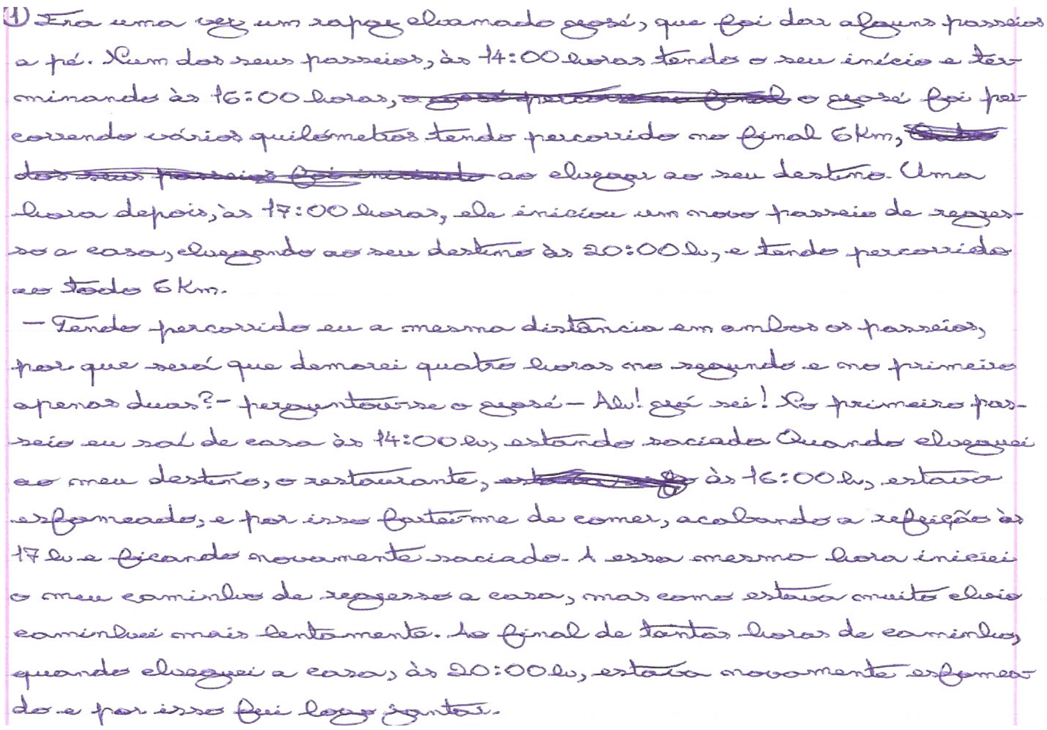

O José foi ~~[illegible]~~ viagem a uma ~~[illegible]~~ montanha e o José percorreu 6 Km em ~~6~~ 2 horas e parou para comer alguma coisa e aproveitou para apreciar as vistas lá de cima* ~~[illegible]~~ voltou a descer para ir a casa jantar um belo leitão

* é às 17 horas ~~[illegible]~~

Figura 4. Descrição do passeio – Humberto.

Neste caso ele apenas concretiza os valores das variáveis em causa nesses pontos, não conseguindo integrar esses dados com os do segundo gráfico dado. Para o Humberto há uma notória dificuldade em relacionar os dois gráficos, fixando-se sobretudo nas características do primeiro. Ele consegue fazer uma leitura pontual em cada um dos gráficos mostrando ser capaz de atribuir significado a determinadas acções descritas em pontos específicos. Do ponto de vista da teoria da objectificação nota-se uma grande dificuldade em evidenciar os objectos matemáticos envolvidos, centrando-se sobretudo no seu sistema semiótico das significações culturais (figura 2) sem que os artefactos presentes sejam evidenciados. Esta abordagem, baseada no *background* cultural, é apresentada por vários outros alunos que se referem ao segundo gráfico evidenciando apenas as situações onde se verifica uma situação de "fome" ou de "estado de saciedade" sem conseguir estabelecer uma relação entre as acções simultâneas que decorrem da integração dos dois gráficos. A integração de ambas as representações gráficas revela-se assim uma tarefa complexa que dificulta a tradução para uma vertente de comunicação escrita.

Numa segunda categoria podemos incluir os alunos que conseguem fazer uma leitura mais pormenorizada de cada um dos gráficos mas ainda não conseguem integrar toda a informação disponibilizada por estes. É o caso da Sónia (figura 5) que faz uma descrição do primeiro gráfico justificando as várias etapas, mas que depois não consegue integrar toda a informação disponibilizada pelo segundo.


1) Era uma vez um rapaz chamado José, que foi dar alguns passeios a pé. Num dos seus passeios, às 14:00 horas tendo o seu início e terminando às 16:00 horas, o José foi percorrendo vários quilómetros tendo percorrido no final 6Km, ao chegar ao seu destino. Uma hora depois, às 17:00 horas, ele iniciou um novo passeio de regresso a casa, chegando ao seu destino às 20:00h, e tendo percorrido ao todo 6Km.

– Tendo percorrido eu a mesma distância em ambos os passeios, por que será que demorei quatro horas no segundo e no primeiro apenas duas? – perguntou-se o José – Ah! Já sei! No primeiro passeio eu sai de casa às 14:00h, estando saciado. Quando cheguei ao meu destino, o restaurante, às 16:00h, estava esfomeado, e por isso fartei-me de comer, acabando a refeição às 17h e ficando novamente saciado. A essa mesma hora iniciei o meu caminho de regresso a casa, mas como estava muito cheio caminhei mais lentamente. Ao final de tantas horas de caminho, quando cheguei a casa, às 20:00h, estava novamente esfomeado e por isso fui logo jantar.

Figura 5. Descrição do passeio – Sónia.

Neste caso a Sónia mostra ser capaz de, em cada gráfico isolado, relacionar ambas as variáveis dando-lhe um significado único. Esta abordagem parece revelar que há um pensamento baseado nos artefactos que a actividade conduz à consolidação do seu sistema semiótico das significações culturais. Nota-se, no entanto, que o primeiro gráfico é interpretado com mais pormenor, provavelmente pelo facto de ser constituído por segmentos de recta. No segundo gráfico as pequenas variações apresentadas não são destacadas o que parece revelar alguma dificuldade em integrar todos os artefactos presentes condicionando assim o seu pensamento. Estes alunos mostram que são detentores de um conhecimento que vai sendo objectificado pela actividade dirigida para o território do pensamento baseado nos artefactos enriquecendo assim o seu sistema semiótico de significações culturais. Conseguimos assim observar a objectificação do conhecimento baseada numa interacção entre os 3 vértices do triângulo de Radford. No que se refere à integração de ambas as representações gráficas a Sónia revela alguma dificuldade em descrevê-las em simultâneo, evidenciando a complexidade da tarefa proposta, no entanto a tradução que faz de ambos os gráficos para linguagem corrente demostra uma boa compreensão na relação que estabelece entre as variáveis envolvidas em cada um deles.

Conclusões

A procura dos objectos matemáticos e a forma como eles são formados na nossa mente têm sido alvo de uma busca por parte de muitos investigadores. São várias as teorias de aprendizagem que se têm debruçado sobre esta problemática, trazendo todas elas contributos para uma melhor compreensão das questões em estudo. Nesta comunicação procuramos evidenciar algumas das características que nos são apresentadas pela Semiótica, nomeadamente as presentes na Teoria da Objectificação de Radford, comparando-as com as que são evidenciadas pelas teorias cognitivas ligadas ao Pensamento Matemático Avançado. Estas abordagens, quando conjugadas, podem ser encaradas como complementares ao procuramos explicar a forma como os conceitos matemáticos são construídos e desenvolvidos pelos alunos. Dão-nos uma dupla perspectiva, a forma como os conceitos podem ser manipulados na mente do alunos e ao mesmo tempo o modo como esses alunos se tornam indivíduos socialmente mais capazes.

Com base na dimensão semiótica estudada procurámos compreender de que forma os alunos dão significado a uma situação de aprendizagem baseada na interpretação de gráficos, situação esta que pode ser considerada como envolvendo um pensamento matemático complexo. Com base na teoria da Objectificação perece ser possível explicar e compreender com mais profundidade as diferentes componentes do sistema semiótico que são activadas, sendo desta forma possível explicitar a forma como o conhecimento é construído. A abordagem semiótica, permite-nos ter uma visão mais alargada e abrangente se comparada com as teorias cognitivas visto que as dimensões culturais, sociais e históricas assumem um papel central na explicação da forma de como os alunos constroem o conhecimento. Os dados apresentados permitem perceber que a abordagem Semótica é uma ferramenta bastante válida na compreensão dos processos de construção do conhecimento por parte dos alunos.

Referências

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning. In *Educational Studies in Mathematics 52*, 215-241. Netherlads: Kluwer.

Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e Retenção de Conhecimento: Uma Perspectiva Cognitiva.* Lisboa: Plátano Editora.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2006). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria dos Métodos.* Porto, Portugal: Porto Editora.

Bruner, J. (2002). *Actos de Significado: para uma psicologia cultural.* Coimbra: Edições 70.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal 29*(3), 573-604.

Domingos, A., & Silva, M. (2010). Abordagens Teóricas da Construção do Conhecimento Matemático e suas Implicações Escolares. *Actas do XXI SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática)* (pp. 641-658). Lisboa: APM.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In T. David, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academics.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academics.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques. In L. Radford, & B. D'Amore, *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático* (pp. 45-81).

Gimeno, S. (1998). *O currículo: uma reflexão sobre a prática.* Porto Alegre: Artmed.

Kantowski, M. G. (1978). The teaching experiment and Soviet studies of problem solving. In L. L. (Ed.), *Mathematical problem solving* (pp. 43-52). Columbus, Ohio: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Marques, A. (2008). A utilização da calculadora gráfica. Um estudo no 12º de escolaridade. *Tese de Mestrado*. Lisboa: Universidade Aberta.

Mason, J. (2011). Discerning in and Between Theories in Mathematics Education. *European Conference in Mathematics Education (CERME)*, (Comunicação aprsentada no Working Group 16). Rzeszow: Univerzity of Rzeszow, Poland.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Acedido Março 2010, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/Programa Matematica .pdf

NTCM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Matos, A., & Branco, N. (2009). *Sequências e Funções.* Acedido em 10 de Fevereiro, 2011, de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/02 3_Sequencia_ Sequencias_e_Funcoes_NPMEB_3c7.pdf

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 165-178.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing:Toward a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger, *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History and Culture* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics 30*.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2010). Trajectórias de Aprendizagem e Ensinar para a Compreensão. In G. d. Investigação, *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 43-59). APM.

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporany perspective. In M. Wittrock, *Handbook of research on teaching (3ª edição)* (pp. 3-36). New York: Macmillan.

Tall, D. (2007). Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education. *Conferência plenária apresentada na 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*, (pp. 22-27). San Diego, USA.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 281–288). Bergen, Norway.

Valadares, J., & Moreira, M. (2009). *A Teoria da Aprendizagem Significativa: sua fundamentação e implementação.* Coimbra, Portugal: Almedina.

Vygotsky, L. S. (1998). *A Formação Social da Mente* (6ª ed.). São Paulo: Martins Fontes Editora.

REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS DE FUNÇÕES EM AMBIENTE COM GEOGEBRA: UM ESTUDO SOBRE O SEU USO POR ALUNOS DE 9º ANO[1]

Ana Patrícia Gafanhoto
Escola Secundária Mouzinho da Silveira, Portalegre
patriciagafanhoto@hotmail.com

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
apc@uevora.pt

Resumo

O presente artigo refere-se a um estudo em que se investigou de que modo os alunos utilizam as representações múltiplas na resolução de tarefas que implicam a utilização de Funções num contexto de trabalho com o *Geogebra*. O estudo procurou identificar quais as representações a que os alunos recorrem, os factores que influenciam a sua escolha e a forma como relacionam as diferentes representações. O estudo desenvolveu-se numa turma de 9º ano que já tinha trabalhado com o Geogebra. Este *software* tem inúmeras potencialidades no estabelecimento de conexões entre a Geometria e a Álgebra e permite ao utilizador trabalhar com distintas representações das Funções, nomeadamente as representações numérica, tabular, algébrica e gráfica. Os alunos realizaram um conjunto de tarefas diversificadas em que podiam livremente recorrer ao Geogebra. A investigadora assumiu essencialmente o papel de observadora participante durante a recolha de dados (registos de aula e produções dos alunos). Foi elaborado um estudo de caso descritivo e analítico da turma. As conclusões apontam que os alunos tendem, predominantemente, a recorrer à representação gráfica, mas conseguem usar eficazmente uma variedade de representações no seu trabalho com Funções. Os alunos revelam também estabelecer relações entre diferentes representações. A escolha pelas representações usadas parece estar relacionada com o tipo de conhecimento matemático que as questões evocam, bem como com a predisposição dos alunos para as distintas representações proporcionadas pelo Geogebra.

Palavras-Chave: Representações múltiplas, Funções, Geogebra.

Introdução

As representações assumem um papel importante em toda a aprendizagem da Matemática. Elas são encaradas como elementos essenciais na compreensão de

---

[1] Trabalho realizado no âmbito do Projecto *Práticas Professional dos Professores de Matemática*, com apoio da FCT, contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008.

conceitos e das relações matemáticas; na comunicação de abordagens, de argumentos e de conhecimentos matemáticos; na explicitação de raciocínios; na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados; e na aplicação da Matemática a problemas realistas ou modelação (NCTM, 2007).

É importante que os alunos compreendam que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas e que adquiram a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra, estabelecendo desta forma relações entre diferentes ideias matemáticas sobre um tema, em particular no estudo das Funções, domínio da Matemática onde existe uma grande riqueza de representações (NCTM, 2007; Kieran, 2007).

As novas tecnologias vieram criar novas oportunidades de enfatizar o uso de múltiplas representações no ensino da Matemática (Zbiek et al., 2007). O uso de tecnologias é referido no actual Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007). Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar o computador em situações diversas e, em particular, devem ter oportunidade de trabalhar com diversos programas educativos, nomeadamente de gráficos de funções e de geometria dinâmica, que permitem conciliar as diferentes representações das funções.

Neste contexto, torna-se relevante compreender de que modo os alunos lidam com as representações das funções quando trabalham com o *Geogebra*[2], *software* que reúne ferramentas de Álgebra, Geometria e uma folha de cálculo e oferece a possibilidade de explorar múltiplas representações. As questões orientadoras do estudo são:

1. Quais são as representações a que os alunos mais recorrem?
2. Que factores influenciam a escolha da representação?
3. Como é que os alunos conciliam as diferentes representações?

[2] O Geogebra foi desenvolvido principalmente para o ensino e aprendizagem da Matemática ao nível do Ensino Básico e Secundário, por Markus Hohenwarter, na universidade americana Florida Atlantic University. Este *software,* para além de ter uma versão portuguesa e de dispor de uma vasta combinação de ferramentas, apresenta uma outra mais valia que é ser de uso livre, ficando assim disponível para professores e alunos, nas escolas e em casa.

Funções, representações e tecnologia

A Álgebra é um tema da maior importância nos currículos de Matemática (Kaput, 1999) que tem vindo a ver a sua abordagem alterada e antecipada junto dos alunos, com vista a um maior reforço dos seus aspectos conceptuais e uma não focalização exclusiva na manipulação simbólica e reprodução de técnicas desprovidas de sentido. O NCTM (2007) recomenda que os programas de Matemática, do ensino pré-escolar ao 12.º ano, habilitem os alunos para:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usem modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos. (NCTM, 2007, p. 39)

Uma tendência semelhante pode ser identificada no nosso país nos últimos anos (Ponte, 2006). No Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001), "Álgebra e Funções" surge como um grande tema curricular e propõe-se que neste domínio, ao longo de todos os ciclos do ensino básico, seja desenvolvida a competência matemática que inclui:

- A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;
- A aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- A aptidão para construir e interpretar tabelas valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos;
- A aptidão para concretizar, em casos particulares, relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples;
- A sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas. (ME, 2001, p.66)

Com o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), a Álgebra surge como um dos quatro grandes temas. Prevê-se que o seu estudo se inicie nos primeiros anos de escolaridade e, no 3.º ciclo, institucionaliza-se o uso da linguagem algébrica, trabalha-se com expressões, equações, inequações e funções, procurando desenvolver no aluno a capacidade de lidar com diversos tipos de relações matemáticas e estudar situações de variação em contextos significativos. Assim, o estudo das Funções surge valorizado no 3.º ciclo.

Também as representações têm vindo a assumir especial destaque nas orientações curriculares para o ensino da Matemática. O NCTM (2007) dedica uma norma específica à representação matemática, considerando como objectivos para os alunos, desde o pré-escolar até ao 12.º ano (NCTM, 2007, p. 160):

- Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
- Seleccionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
- Usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos.

Segundo o NCTM (2007), é necessário estimular os alunos para a representação das suas ideias, ainda que inicialmente estes o façam recorrendo a formas não convencionais mas que para eles têm sentido. Todavia, é importante que os alunos aprendam formas de representação convencionais, para facilitar quer a aprendizagem da Matemática, quer a comunicação das suas ideias matemáticas.

Também os documentos curriculares portugueses têm vindo a valorizar as representações. O Currículo Nacional do Ensino Básico (ME/DEB, 2001) defende que ser-se matematicamente competente implica o desenvolvimento de atitudes, capacidades e competências, destacando-se aqui as que dizem respeito às representações, ainda que implicitamente: "a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação" (ME/DEB, 2001).

No Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) as representações matemáticas são uma das dimensões da aprendizagem mais valorizada. Neste documento é apresentado como objectivo geral do ensino da Matemática:

> Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações. Isto é, devem ser capazes de:

- ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação;
- traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
- elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas;
- usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais. (Ponte et al., 2007, pp. 4-5)

Ainda neste documento é referido a importância das representações matemáticas na aprendizagem dos alunos e do trabalho com múltiplas representações, sempre que possível. Defende-se que os alunos, ao trabalharem com diversas representações para as ideias matemáticas, adquirem a capacidade de passar de uma forma de representação para outra, que é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada.

O conceito de função, como já foi referido anteriormente, deve ser abordado de forma a englobar as diferentes representações e a utilização de ferramentas tecnológicas pode, em certa medida, permitir que sejam ultrapassados alguns problemas de representação e manipulação de funções. Segundo Gomez (1997), o recurso às tecnologias para o ensino e aprendizagem das funções permite uma melhor e mais fácil consolidação do conceito de função em comparação com a abordagem clássica do estudo formal das funções, em que se partia das representações simbólicas e se traduziam por representações tabulares e finalmente por representações gráficas (Coulombe & Berenson, 2001). As tecnologias que foram progressivamente ficando acessíveis ao ensino da Matemática, nomeadamente aquelas que exibem capacidades gráficas, permitem a criação de múltiplas representações, ainda com as vantagens de exibirem representações diversas e também permitirem acções sobre essas representações.

Destaca-se aqui a utilização do *software* de geometria dinâmica, com o seu carácter dinâmico que potencia a exploração de representações e sua inter-relação, em especial de gráficos, tabela e expressões algébricas. Este tipo de *software* permite trabalhar e compreender a Matemática de uma forma que não é possível com as tradicionais ferramentas como o papel e o lápis, proporcionando aos alunos acrescidas oportunidades, destacando-se: a exploração de problemas e conceitos matemáticos complexos, a execução de procedimentos rotineiros de forma mais rápida e precisa, deixando os alunos mais disponíveis para as tomadas de decisões, para a reflexão e raciocínio, e a análise de exemplos ou formas de representação (NCTM, 2007).

A compreensão das relações existentes entre as várias representações de um mesmo conceito e a identificação das suas semelhanças e diferenças contribui para uma melhor compreensão do conceito por parte dos alunos (Goldin & Shteingold, 2001). Quando é utilizada uma forma de representação e essa não representa na totalidade a ideia matemática, é necessário recorrer a mais formas de representação (Hadmard, 1945, citado por Wong, 2004).

Friedland e Tabach (2001) apresentam quatro modos de representação essenciais ao ensino da Matemática, nomeadamente da Álgebra – representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. O uso de diferentes representações tem o potencial de fazer com que o processo de aprendizagem da Álgebra, em particular das Funções, seja significativo e efectivo. Estes autores apresentam as vantagens e desvantagens associadas a cada uma das formas de representação que identificam:

a) *representação verbal* – está normalmente associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos, dá ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano. Esta forma de representação pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorrectas.

b) *representação numérica* – é uma representação natural para os alunos que se encontram a iniciar o estudo da álgebra e, normalmente, precede qualquer outro tipo de representação. Este tipo de representação é importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares, no entanto, não é generalizável, sendo por isso uma ferramenta, em alguns casos, limitada.

c) *representação gráfica* – proporciona uma imagem clara de uma função de variável real. É uma forma de representação intuitiva e apelativa para os alunos que gostam de uma análise visual. No entanto, a representação gráfica é muito influenciada por factores externos (por exemplo, escalas) e apresenta frequentemente só uma parte do domínio do problema. A sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em causa.

d) *representação algébrica* – esta é concisa, geral e efectiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, por vezes é o único método de justificar ou efectuar generalizações. Contudo, esta forma de representação, que usa exclusivamente símbolos algébricos pode ocultar o significado matemático ou a natureza do objecto e causar dificuldades de interpretação de resultados.

A importância de trabalhar com várias representações resulta das vantagens e desvantagens apresentadas anteriormente para cada uma das formas de representação e da necessidade de corresponder a estilos individuais de raciocínio dos estudantes. Desta forma defende-se que se deve trabalhar num ambiente múltiplas representações, uma vez que as desvantagens de umas são colmatadas pela combinação com as outras. No entanto, a natureza da tarefa, a preferência pessoal, o estilo de pensamento do indivíduo que resolve o problema ou dificuldades em determinados tipos de representação são factores que poderão determinar o tipo de representação a utilizar (Kaput, 1992).

Brown e Mehilos (2010) fazem referência a uma outra forma de representação das Funções, a tabular. As tabelas ajudam os alunos a passar do mundo concreto da aritmética, onde os problemas envolvem números específicos, para o mundo abstracto da álgebra, onde as quantidades variam. As tabelas dão aos alunos uma experiência tangível em que as variáveis são números que se alteram e em que o valor das expressões varia como o resultado. A tabela actua como uma ponte entre a Aritmética, onde os números são específicos, para a Álgebra, onde as variáveis não são especificadas e expressam relações gerais.

No estudo desenvolvido por Brown e Mehilos (2010), alguns alunos desenvolveram rapidamente a facilidade em manipular os símbolos e perceberam o seu potencial. Outros continuaram a mostrar preferência pelo uso de tabelas, sendo estas um suporte a usar enquanto os alunos procuram ficar confortáveis com as expressões algébricas. As tabelas fazem com que se sintam mais confiantes no trabalho algébrico e encoraja-os a persistir; são ferramentas poderosas para ajudar os alunos a darem significado a variáveis e a expressões algébricas. Esta forma de representação permite aos alunos verem os símbolos algébricos como descrições gerais de números específicos, o que é de extrema importância para aqueles que precisam de desenvolver uma melhor compreensão de símbolos abstractos.

No âmbito deste estudo, e atendendo a que os alunos são do 3.º ciclo, considerou-se pertinente adoptar os modos de representação enunciados por Friedland e Tabach (2001) à excepção da representação verbal, e ainda a representação tabular (Brown e Mehilos, 2010), disponível no Geogebra, e com reconhecidas potencialidades no trabalho com Funções.

Metodologia

Este estudo[3], tendo em conta o seu propósito, objectivos e a natureza dos resultados finais que se pretendiam obter, é um estudo de natureza qualitativa, na modalidade de estudo de caso instrumental, com características descritivas e analíticas (Merriam, 1988; Stake, 2009). Importa fazer aqui referência ao caso em estudo, uma turma do 9º ano de escolaridade, de uma escola do concelho de Elvas, que se considera como o conjunto dos grupos de alunos que a constituem, nos quais se identificam tendências principais. A turma foi alvo de uma experiência de ensino que foi desenvolvida em contexto natural, na sala e horário lectivo normais e conduzida pela professora titular da turma, que funcionou em cumplicidade com a investigadora. Esta experiência ou intervenção, concretizada em 2009/2010, criou as condições para a recolha de dados, na qual a investigadora assumiu uma postura de observadora participante durante a fase de apresentação da tarefa e trabalho autónomo sobre a mesma, mas com maior intervenção na fase de discussão colectiva das tarefas.

Para a realização da intervenção didáctica foi necessário organizar a turma em pequenos grupos. Estes grupos, em número de cinco, foram organizados pelo professor titular com a participação dos alunos. O professor teve em consideração os seguintes critérios na constituição dos grupos: o empenho, o interesse, o comportamento e a afinidade entre os alunos. Destes cinco grupos, quatro eram compostos por três alunos e um por dois alunos. Os alunos tinham já tido contacto com o Geogebra durante as aulas de Matemática e as de Estudo Acompanhado leccionadas também pelo professor de Matemática.

[3] O estudo a que se reporta este artigo corresponde ao desenvolvimento da tese de mestrado da primeira autora (Gafanhoto, 2011).

A intervenção didáctica consistiu na realização de seis tarefas diversas, durante seis aulas (cinco blocos de noventa e um de quarenta e cinco minutos), classificadas quanto à sua natureza de acordo com o seguinte quadro:

Quadro 1 - Tarefas classificadas consoante a sua natureza: exploração e modelação.

Tarefa	Natureza		Referência
	Exploração	Modelação	
1. Qual o tarifário melhor? Eis a questão…		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002
2. As informações dadas por uma função do tipo $y=mx+b$…	X		Adaptado de exercícios de manuais
3. Matemática por um canudo		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002
4. As folhas de papel que usamos		X	Criado pela investigadora
5. Estudo das funções $y=ax^2$	X		Adaptado de exercícios de manuais
6. O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002

A estrutura das tarefas seguiu sempre a mesma lógica à excepção da tarefa 6. As tarefas eram divididas em duas partes: na primeira parte os alunos criavam, a pedido, as diferentes formas de representação (tabular, gráfica e algébrica) e, na segunda parte, eram colocadas questões aos alunos de interpretação das funções em estudo, permitindo-lhes que eles utilizassem as representações que considerassem mais adequadas para produzir as respectivas respostas. A tarefa 6 foi colocada de forma mais aberta, apresentando-se a situação em linguagem corrente e colocando-se directamente questões a responder pelos alunos recorrendo às formas de representação que entendessem.

A tarefa "Qual o tarifário melhor? Eis a questão…" corresponde a uma tarefa de consolidação e aprofundamento do conceito de função de proporcionalidade directa e afim. Esta tarefa consistia na definição, representação e interpretação de diferentes tarifários telefónicos reais como funções.

A tarefa "As folhas de papel que usamos" foi assinalada, para esta turma, como uma tarefa de exploração do conceito de função de proporcionalidade inversa. Com esta tarefa pretendia-se que os alunos caracterizassem e representassem a função que a cada valor da largura da folha A4 associa uma altura, de forma a manter constante a medida da área. O professor titular, na aula subsequente, baseou-se nos resultados desta tarefa para formalizar o conceito de função de proporcionalidade inversa.

A tarefa "Matemática por um canudo" foi aplicada no seguimento da tarefa descrita anteriormente, tendo sido aplicada como uma tarefa de consolidação e aprofundamento do conceito de proporcionalidade inversa. Nesta tarefa foi estudada a relação entre o comprimento de um cilindro oco e o tamanho de fita visualizada.

A tarefa "O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função" teve como objectivo colocar os alunos perante uma tarefa de modelação mais aberta. Esta tarefa tinha como contexto um problema da realidade (crescimento do cabelo) o qual é modelado por uma função de proporcionalidade directa.

As tarefas "As informações dadas por uma função do tipo y=mx+b…" e "Estudo das funções $y=ax^2$" são situações estritamente matemáticas, tendo como objectivo estudar matematicamente as funções do tipo y=mx+b e $y=ax^2$.

A recolha de dados foi realizada através da observação e análise documental. A investigadora fez o registo dos acontecimentos da aula e a análise dos documentos produzidos pelos alunos, como as resoluções escritas das tarefas e os ficheiros de Geogebra correspondentes à resolução de cada uma.

A análise dos dados realizou-se em duas fases diferentes. A primeira fase ocorreu durante a recolha de dados; a segunda fase foi realizada posteriormente, a qual pode ser subdividida em três sub-fases. Primeiramente, definiram-se categorias para análise posterior dos dados recolhidos. Essas categorias estavam de acordo com as representações utilizadas pelos alunos e com a natureza/objectivo das perguntas das tarefas. Em seguida realizou-se uma análise de todos os dados recolhidos relativamente a todos os grupos, segundo as categorias definidas. Por último, efectuou-se uma análise cruzada de forma a encontrar semelhanças e diferenças, formulando, por fim, conclusões.

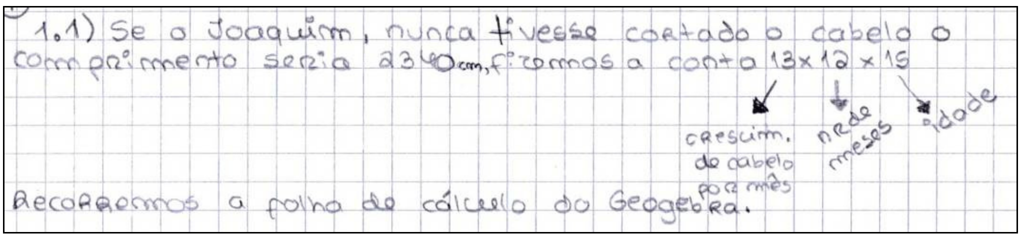
Apresentação de resultados

De uma forma global, os grupos aderiram bem à realização destas tarefas, não só ao nível do empenho e responsabilidade mas também das respostas matemáticas conseguidas. Ao longo de todas as tarefas, os alunos foram capazes de utilizar diversos tipos de representação disponibilizado pelo Geogebra, fazendo uso das potencialidades deste *software*, em particular das tabelas da folha de cálculo que tem incorporada, a qual consideraram uma mais valia significativa que lhes proporciona representações rigorosas em pouco tempo:

> O meu grupo usou a folha de cálculo porque é mais fácil e rápido do que se tivéssemos que fazer à mão. (Rui, grupo 4)
>
> Pois quando descobrimos como fazemos para o primeiro já sabemos as outras todas, ou seja, quando descobrimos a fórmula do primeiro já temos para os outros todos. (Bárbara, grupo 3).

De seguida apresenta-se as respostas dos alunos à Tarefa 6 – O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função – que, como já explicado, permitia que os alunos adoptassem as representações que entendessem. Escolhe-se esta tarefa por ter carácter ilustrativo e por ter, de alguma forma, ido contra as expectativas das investigadoras.

Na primeira pergunta era pedido aos alunos que determinassem qual seria o comprimento do seu cabelo, tendo em conta a sua idade e se nunca o tivessem cortado, sabendo que este cresce ao ritmo médio de 13 mm por mês. Os diferentes grupos apresentaram as seguintes respostas:


1.1) Se o Joaquim, nunca tivesse cortado o cabelo o comprimento seria 2340cm, fizemos a conta 13x12x15

crescim. do cabelo por mês

nº de meses

idade

Recorremos a folha de cálculo do Geogebra.

Figura 1. Resposta do grupo 1.

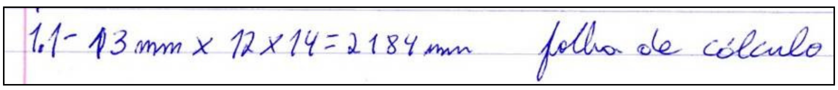

1.1- 13mm x 12x14=2184mm folha de cálculo

Figura 2. Resposta do grupo 2.

① 1.1- Na folha de cálculo multiplicamos a idade do Joaquim que é 14 anos pelos 12 meses do ano e esse resultado multiplicamos pelos 13 mm que é em média o que o cabelo cresce por mês. O seu comprimento seria 2184mm.

Figura 3. Resposta do grupo 3.

1.1) Para saber o número de meses fez-se 14 x 12 = 168 e para saber o comprimento fez-se 168 x 13 = 2184

Figura 4. Resposta do grupo 4.

①
1.1) 15 x 12 = 180 180 x 13 = 2 340 mm.

O Joaquim têm 15 anos, e o cabelo cresce 13mm por mês. Para saber quantos meses tinham passado multiplicamos 15 por 12 meses, recorrendo a folha de cálculo, ficamos a saber que tinham passado 180 meses. Logo, para saber quanto tinha crescido, multiplicamos o número de meses pelos milímetros que cresce por mês, recorrendo a folha de cálculo, e ficamos a saber que tinha de comprimento 2 340 mm.

Figura 5. Resposta do grupo 5.

Para responderem a esta questão todos os grupos usaram a representação numérica e utilizaram como ferramenta de cálculo a folha de cálculo do Geogebra.

Todos os grupos, à excepção dos grupos 4 e 5, não tiveram em conta a unidade da variável tempo, ou seja, não determinaram a sua idade em meses ou então não determinaram qual é o crescimento médio do cabelo por ano.

Na segunda pergunta era dado o comprimento do cabelo e pedia-se que determinassem a idade mínima, tendo os grupos respondido:

1.2) A idade Mínima que a Joana pode ter é 3,2 anos, Recorremos a folha de cálculo.

Figura 6. Resposta do grupo 1.

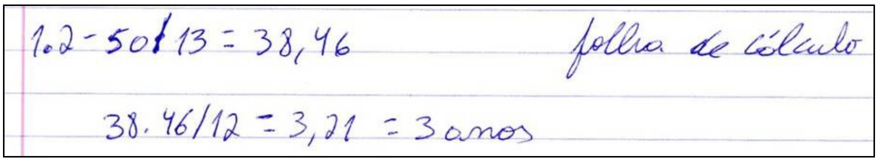

1.2 - 50/13 = 38,46 folha de cálculo
38.46/12 = 3,21 = 3 anos

Figura 7. Resposta do grupo 2.

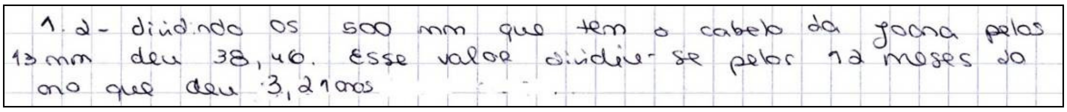

1.2 - dividindo os 500 mm que tem o cabelo da Joana pelos 13 mm deu 38,46. Esse valor dividiu-se pelos 12 meses do ano que deu 3,21 anos

Figura 8. Resposta do grupo 3.

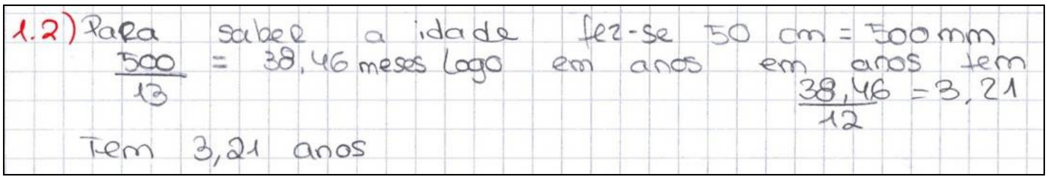

1.2) Para saber a idade fez-se 50 cm = 500 mm
$\frac{500}{13}$ = 38,46 meses logo em anos em anos tem $\frac{38,46}{12}$ = 3,21
Tem 3,21 anos

Figura 9. Resposta do grupo 4.

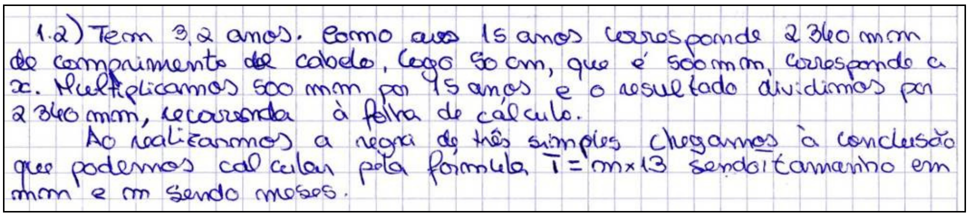

1.2) Tem 3,2 anos. Como aos 15 anos corresponde 2360 mm de comprimento de cabelo, logo 50 cm, que é 500 mm, corresponde a x. Multiplicamos 500 mm por 15 anos e o resultado dividimos por 2360 mm, recorrendo à folha de cálculo.
Ao realizarmos a regra de três simples chegamos à conclusão que podemos calcular pela fórmula T = mm×13 sendo t tamanho em mm e m sendo meses.

Figura 10. Resposta do grupo 5.

A estratégia utilizada pelos grupos para responderem a esta questão, foi a mesma que haviam usado na pergunta anterior; recorreram à representação numérica da função e usaram a folha de cálculo do Geogebra para efectuarem os cálculos.

O grupo 2 na resposta escrita apresenta os cálculos com 50 cm, contudo na folha de cálculo efectuou-os correctamente, usando 500 mm.

Para responder a esta questão, os elementos do grupo 5 apresentaram opiniões e estratégias de resolução divergentes. Houve um elemento do grupo que usou a regra de três simples com os dados da alínea anterior, enquanto que os outros dois elementos efectuaram com os dados iniciais do problema. Esta situação levou a que discutissem as resoluções apresentadas e por fim a concluir que o comprimento do cabelo é sempre igual ao produto do número de meses por 13mm, e daí a escreverem a expressão algébrica da função que modela o problema.

Na pergunta 1.3, era pedido o tempo necessário para que o cabelo tenha de 1m de comprimento. Os grupos responderam o seguinte:

1.3) 6,4 anos, porque se 0,50 cm é metade 1, 3,2 + 3,2 é 6,4. porque há medida que o tempo decorre o comprimento do cabelo vai aumentando.

Figura 11. Resolução do grupo 1.

1.3 - Terá aproximadamente 6,42 anos porque 3,21 anos ~~ta~~ é metade logo 6,42 é o dobro.

Figura 12. Resolução do grupo 2.

1.3 – A Joana precisa de esperar 6,41 anos para que o cabelo atinja 1000 mm. Dividindo os 1000 mm em 13 mm deu 76,92 que ao dividir pelos 12 meses foi dar os 6,41.

Figura 13. Resposta do grupo 3.

1.3) Tem que esperar 3,21 anos porque 1m é o dobro de 50 cm.

Figura 14. Resposta do grupo 4.

1.3) $T = m \times 13$ $\qquad \frac{76,92}{12} = 6,4$ anos

$1000 = m \times 13$

$13 \times m = 1000$

$m = \frac{1000}{13}$

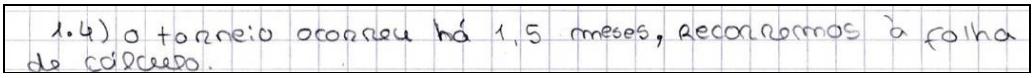
$m = 76,92$

Recorrendo à formula substituimos T por 1000 mm que é o comprimento do cabelo, e calculamos m. O resultado da equação dividimos por 12 para sabermos os anos. Recorremos à folha de calculo.

Figura 15. Resposta do grupo 5.

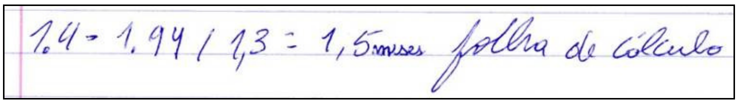
Os grupos 1, 2 e 4 usaram nas suas respostas, ainda que implicitamente, o conceito de proporcionalidade directa. Os grupos 3 e 5 utilizaram a representação algébrica para determinarem o valor pretendido. O grupo 5 partiu da expressão algébrica que haviam escrito na resposta à pergunta anterior. A folha de cálculo do Geogebra foi aqui também utilizada pelos grupos como auxiliar nos cálculos.

Na pergunta 1.4 era pedido aos alunos que determinassem quanto tempo havia passado para que o cabelo crescesse 1,95 cm, à qual responderam:



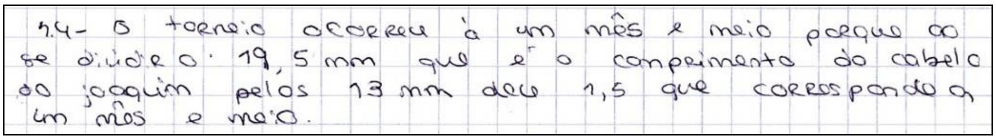
1.4) o torneio ocorreu há 1,5 meses, recorremos à folha de cálculo.

Figura 16. Resposta do grupo 1.



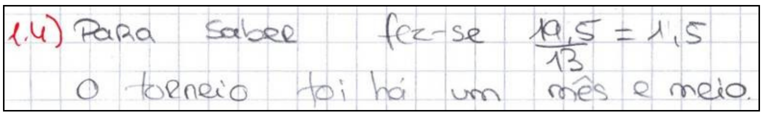
1.4 - 1,94 / 1,3 = 1,5 meses folha de cálculo

Figura 17. Resposta do grupo 2.



1.4 - O torneio ocorreu à um mês e meio porque se se divide o 19,5 mm que é o comprimento do cabelo do joaquim pelos 13 mm deu 1,5 que corresponde a um mês e meio.

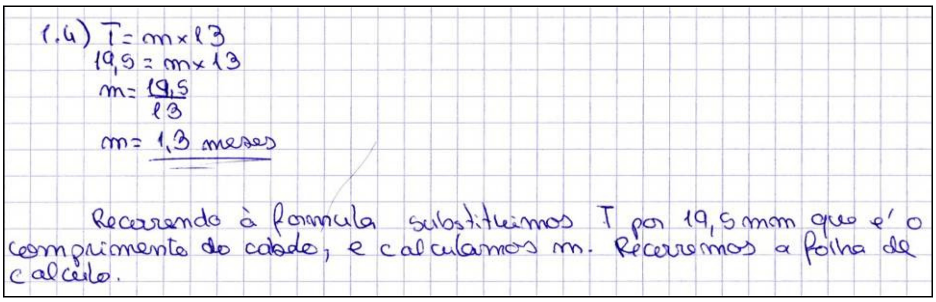
Figura 18. Resposta do grupo 3.



1.4) Para saber fez-se $\frac{19,5}{13} = 1,5$

O torneio foi há um mês e meio.

Figura 19. Resposta do grupo 4.



1.4) $T = m \times 13$

$19,5 = m \times 13$

$m = \frac{19,5}{13}$

$m = \underline{1,3 \text{ meses}}$

Recorrendo à formula substituimos T por 19,5 mm que é o comprimento do cabelo, e calculamos m. Recorremos a folha de calculo.

Figura 20. Resposta do grupo 5.

As respostas a esta pergunta não apresentam estratégias diferentes das utilizadas anteriormente, todos os grupos recorrem à representação numérica e usaram mais uma vez a folha de cálculo do Geogebra como ferramenta de cálculo. O grupo 5 distingue-se mais uma vez dos restantes grupos pelo simples facto de recorrer à expressão algébrica.

Na questão 1.5 é alterada a constante de proporcionalidade e é pedido aos alunos que determinem o tempo necessário para que o cabelo atinja o comprimento de 1,95 cm. Verificaram-se então as seguintes respostas:

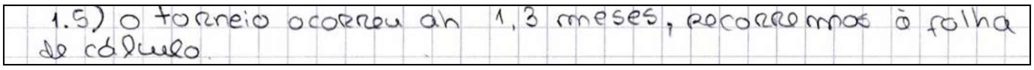

1.5) O torneio ocorreu há 1,3 meses, recorremos à folha de cálculo.

Figura 21. Resposta do grupo 1.

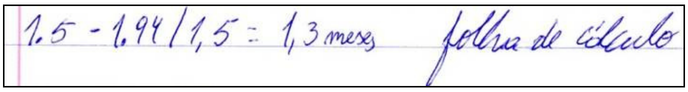

1.5 - 1,94/1,5 = 1,3 meses folha de cálculo

Figura 22. Resposta do grupo 2.

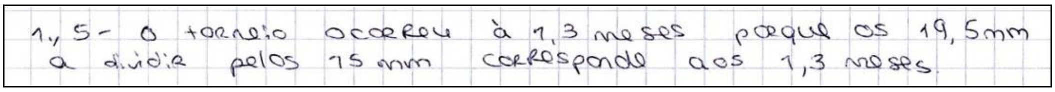
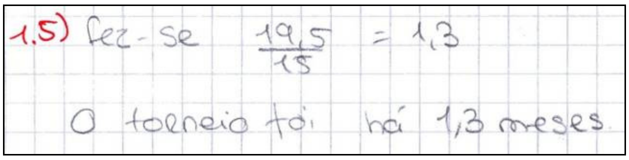
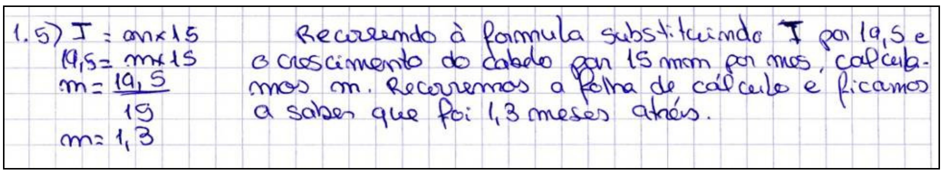

1,5 - O torneio ocorreu à 1,3 meses porque os 19,5mm a dividir pelos 15 mm corresponde aos 1,3 meses.

Figura 23. Resposta do grupo 3.


1.5) fez-se $\frac{19,5}{15} = 1,3$

O torneio foi há 1,3 meses.

Figura 24. Resposta do grupo 4.


1.5) $T = m \times 15$

$19,5 = m \times 15$

$m = \frac{19,5}{15}$

$m = 1,3$

Recorrendo à formula substituindo T por 19,5 e o crescimento do cabelo por 15 mm por mes, calculamos m. Recorremos a folha de cálculo e ficamos a saber que foi 1,3 meses atrás.

Figura 25. Resposta do grupo 5.

Mais uma vez todos os grupos recorreram às mesmas representações e procedimentos que haviam utilizado nas perguntas anteriores.

Na última pergunta pedia-se, aos alunos, que comparassem duas situações de crescimento de cabelo, modeladas por funções afim e, em particular, que determinassem se em algum momento as duas funções representavam o mesmo comprimento de cabelo. A esta pergunta os grupos responderam da seguinte forma:

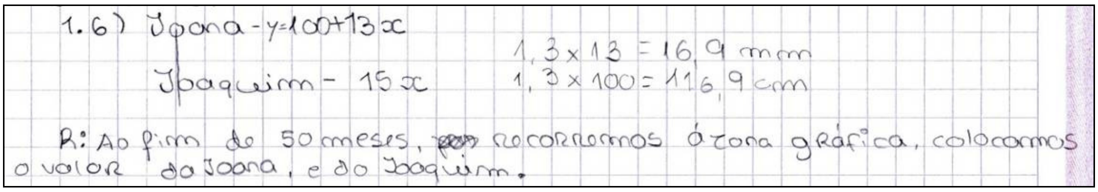

1.6) Joana - $y=100+13x$
Joaquim - $15x$
$1,3 \times 13 = 16,9$ mm
$1,3 \times 100 = 116,9$ cm
R: Ao fim de 50 meses, recorremos á zona gráfica, colocamos o valor da Joana, e do Joaquim.

Figura 26. Resposta do grupo 1.

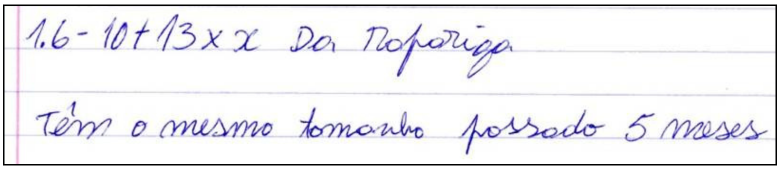

1.6 - $10+13 \times x$ Da Rapariga
Têm o mesmo tamanho passado 5 meses

Figura 27. Resposta do grupo 2.

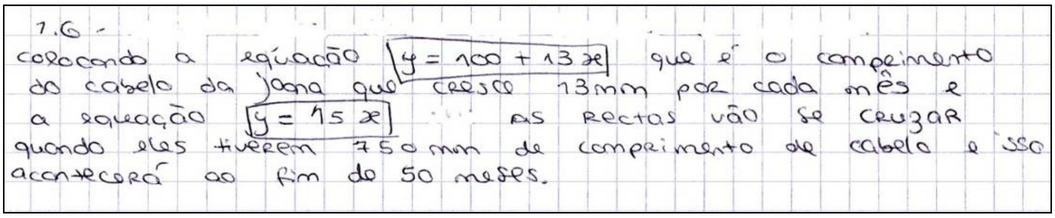

1.6 -
colocando a equação $\boxed{y = 100 + 13x}$ que é o comprimento do cabelo da Joana que cresce 13mm por cada mês e a equação $\boxed{y = 15x}$ as rectas vão se cruzar quando eles tiverem 750 mm de comprimento de cabelo e isso acontecerá ao fim de 50 meses.

Figura 28. Resposta do grupo 3.

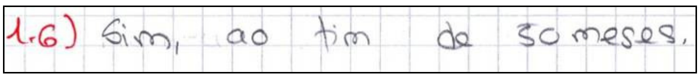

1.6) Sim, ao fim de 50 meses.

Figura 29. Resposta do grupo 4.

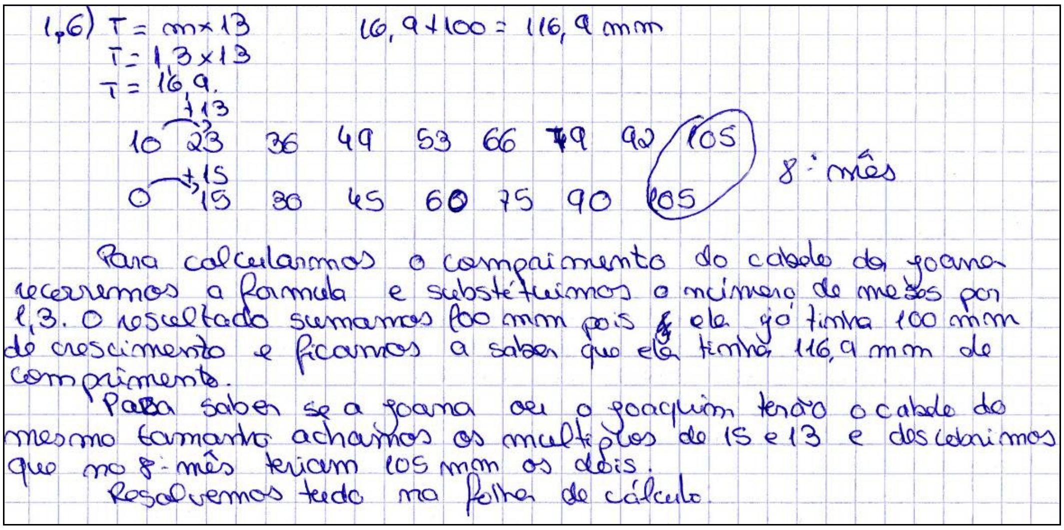


Figura 30. Resposta do grupo 5.

Os grupos 1, 3 e 4 recorreram à representação gráfica para responderam a esta pergunta, efectuando a representação de cada uma das funções no Geogebra e determinando o ponto de intersecção entre elas:

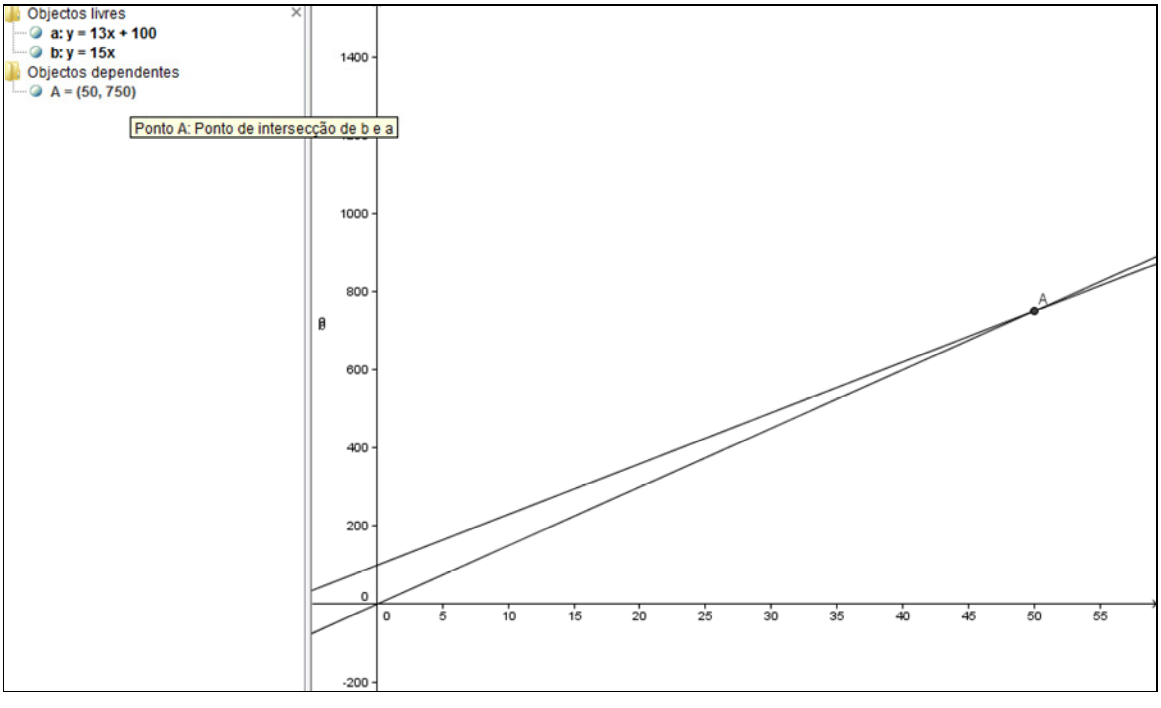
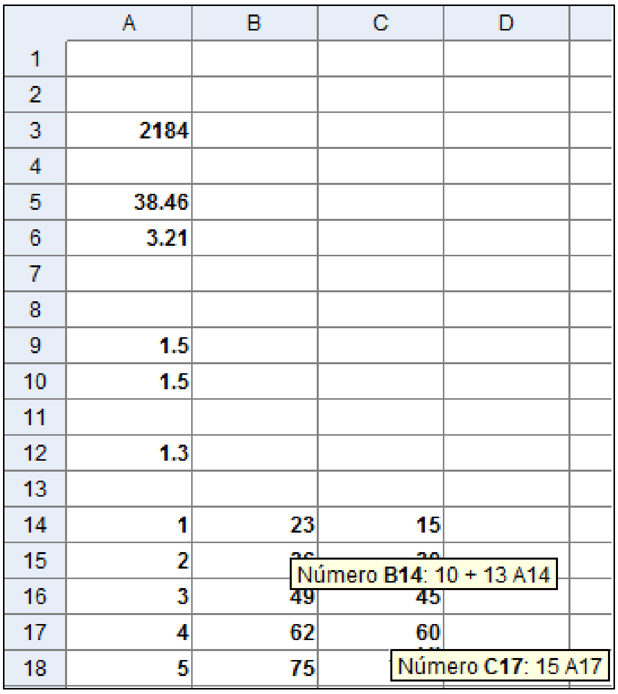


Figura 31. Procedimento utilizado pelos grupos 1, 3 e 4.

Os grupos 2 e 5 usaram as representações algébricas e tabulares, mas usando procedimentos distintos.

O grupo 2 usou a folha de cálculo do Geogebra e as suas potencialidades em conjunto com a expressão algébrica da função que modela cada uma das situações, como se pode ver em seguida:



	A	B	C	D
1				
2				
3	2184			
4				
5	38.46			
6	3.21			
7				
8				
9	1.5			
10	1.5			
11				
12	1.3			
13				
14	1	23	15	
15	2	[illegible]	[illegible]	
16	3	49	45	
17	4	62	60	
18	5	75	[illegible]	

Figura 32. Procedimento usado pelo grupo 2.

O grupo 2 cometeu o erro de usar os 10 cm onde teria que usar 100 mm, daí a justificação para a sua resposta não estar correcta. O grupo 5 só usou a folha cálculo para efectuar os cálculos auxiliares; no entanto, cometeram alguns erros o que justifica a sua resposta.

Note-se que os grupos nesta tarefa tinham total liberdade de escolha da(s) representação(ões) a que recorreriam para responder à questões. Todavia, não houve grandes diferenças nos procedimentos utilizados entre os grupos e no mesmo grupo entre as perguntas. Os alunos resolveram numericamente todas as questões, à excepção do grupo 5 que a partir da pergunta 1.2 recorreu à expressão algébrica. Os grupos 1, 2, 3 e 4 só definiram a expressão algébrica que modela o problema quando tiveram necessidade de fazer a representação gráfica.

Conclusões

De seguida tecem-se comentários conclusivos incidindo sobre as questões orientadoras do estudo desenvolvido.

Quais as representações a que os alunos mais recorrem?

O Quadro 2 resume as representações a que os alunos recorreram na realização de cada uma das tarefas, possibilitando assim uma análise cruzada das informações recolhidas relativamente às representações utilizadas por cada grupo na resolução de cada questão. Este quadro só contempla as questões em que os alunos podiam escolher as representações para produzir a resposta sem que nada lhes fosse imposto.

Quadro 2. Representações utilizadas por cada grupo.

	PERGUNTA		GRUPOS 1	2	3	4	5	Representação Predominante
T1	7	a)	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
		b)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Tabular	Gráfica
		c)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		d)	Tabular	Tabular	Algébrica	Tabular	Tabular	Tabular
		e)	Gráfica	Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Gráfica	Gráfica
T2	2c	i)	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica
		ii)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular
		iii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		iv)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica
		v)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		vi)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		vii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
T3	5		Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
T4	3		Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Tabular	Tabular	Gráfica/ Tabular
	6	a)	Algébrica	Gráfica	Gráfica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
		b)	Algébrica	Gráfica	Gráfica	Algébrica	Algébrica	Algébrica

T5	PARTE 1	c	i)	Algébrica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica
			ii)	Algébrica	Gráfica	Gráfica	Tabular	Tabular	--
			iii)	Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica	Gráfica
			iv)	Gráfica	Tabular	Gráfica	Tabular	Tabular	Tabular
T5	PARTE 2	d	i)	Algébrica	Tabular	Gráfica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
			ii)	Tabular	Gráfica	Gráfica	----	Tabular	--
			iii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
			iv)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
T6	1.1			Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
	1.2			Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
	1.3			Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica	Numérica
	1.4			Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica	Numérica
	1.5			Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica	Numérica
	1.6			Gráfica	Algébrica/ Tabular	Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Numérica	Gráfica
Repres. pred.				**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**

Todos os grupos utilizaram os diferentes modos de representação no conjunto de tarefas propostas. A representação gráfica foi a representação a que os alunos mais recorreram por sua iniciativa, tendo sido as representações tabular e numérica as segundas mais utilizadas, surgindo em último lugar a representação algébrica.

Ao efectuar o mesmo tipo de análise, mas para cada grupo individualmente, verifica-se que todos os grupos recorreram também com maior frequência à representação gráfica. No entanto, verificou-se que só os grupos 2 e 3 apresentaram a mesma ordem de preferência/utilização dos modos de representação, ou seja, as representações tabular e numérica como as segundas representações mais utilizadas, seguidas pela representação algébrica. Para os grupos 1, 4 e 5 a segunda representação mais utilizada é a representação algébrica, logo de seguida estão referidas as representações numérica e tabular, respectivamente. O grupo 3 destaca-se por apresentar uma forte incidência no recurso à representação gráfica em comparação com os outros grupos.

Que factores influenciam a escolha da representação?

Para além das preferências que os alunos ou grupos parecem revelar, a escolha das representações parece ser orientada pelo tipo de conhecimento matemático que as questões evocam. Assim, nas questões em que era pedido para se identificar a imagem dado o objecto, todos os grupos à excepção do grupo 3 recorreram maioritariamente à representação algébrica. O recurso generalizado à representação algébrica pode ser justificado por serem expressões algébricas de fácil compreensão, ainda mais quando foram escritas pelos próprios alunos, em que eram usadas estratégias de resolução (cálculo) com que os alunos estão mais familiarizados. O grupo 3, como desde início mostrou à vontade e entusiasmo em utilizar as potencialidades gráficas do Geogebra, procurou sempre que o conseguiu utilizar somente a representação gráfica.

Nas respostas às perguntas em que era necessário identificar o objecto dada a imagem, verifica-se que os grupos recorrem maioritariamente à representação gráfica, sendo excepção o grupo 5. Analisando em particular o grupo 5, este grupo recorre em grande parte à representação tabular, no entanto a representação tabular de cada uma das funções foi construída com base na representação gráfica. Portanto, pode afirmar-se que este grupo conciliou dois tipos de representação, a gráfica e tabular.

Nas respostas em que era solicitado o estudo comparativo de duas ou mais funções, os alunos recorreram na maioria das vezes à representação gráfica. A representação gráfica dá uma imagem clara global das funções, sendo esta uma mais valia quando se pede aos alunos que estabeleçam comparações entre funções ou que identifiquem momentos em as funções assumem o mesmo valor. Os alunos recorreram à representação tabular quando lhes foi pedido para analisarem as funções em determinados valores do seu domínio, estando estes representados nas tabelas.

Nas tarefas foram propostas questões em que os alunos tinham que analisar e interpretar a relação entre as variáveis e as variações das funções quanto à sua monotonia e compreender a influência da variação dos parâmetros das funções e ainda estudar a influência dos parâmetros dos tipos de função. Também nestes casos, a representação matemática predominante escolhida pelos grupos é a representação gráfica.

Como é que os alunos conciliaram as diferentes representações?

Note-se que os alunos usaram frequentemente mais do que um tipo de representação, tirando partido do *software* permitir visualizar e alterar, no mesmo ambiente de trabalho, todas as representações. Não ficaram por isso limitados na sua análise por não terem presente uma dada representação, sendo sempre possível colmatar as desvantagens de cada uma das representações com as vantagens das outras.

Os alunos conciliaram sobretudo a representação gráfica com a representação algébrica e a tabular com a gráfica. A representação gráfica foi conciliada com a representação algébrica nas seguintes situações: quando o domínio representado pela representação gráfica não abrange os valores em estudo ou então quando, por limitações do software, o aluno não consegue seleccionar o valor em estudo. Os alunos também recorreram frequentemente à representação algébrica para construírem a representação gráfica das funções.

Dadas as características/potencialidades do Geogebra, a representação gráfica foi muitas vezes a base da construção da representação tabular das funções, uma vez que a partir da definição de um ponto sobre o gráfico da função e a deslocação do mesmo, o Geogebra constrói automaticamente a tabela.

A possibilidade dos alunos usarem de forma autónoma o Geogebra fez com que não existissem constrangimentos relativamente ao tipo de representação a adoptar, pois a utilização de qualquer tipo de representação foi agilizada pelo uso do *software*, bem como a utilização simultânea de diversas representações para a mesma situação. No entanto, e como foi possível observar das respostas dos alunos à Tarefa 6, a disponibilidade do *software* não chega. Este estudo alerta também para que o trabalho com as representações múltiplas deve ser acautelado pelo professor, de forma a que possa ser potenciado e bem aproveitado pelos alunos.

Referências

Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to Bridge Arithmetic and Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(9), 532-538.

Coulombe, W. N., & Berenson S. B. (2001). Representations of Patterns and Functions – Tools for Learning. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 166-174). Reston, VA: NCTM.

Friendland, A., & Tabach, M., (2001). Promoting multiple representation in algebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Gafanhoto, A. (2011). *Integração das diversas representações das Funções no contexto de utilização de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra)* (Tese de Mestrado, Universidade de Évora). Lisboa: APM:

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In J. Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.

Gomez, P. (1997). Tecnología y educación Matemática. *Revista Informática Educativa. UNIANDES – LIDIE, 10* (1), 93-11.

Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. In Douglas Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new Algebra with understanding. Acedido em 10 de Setembro, 2008, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Kaput_99 AlgUnd.pdf

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Frank K. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 707-762). Charlotte: Information Age Publishing.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco, CA: Jossey-Bass.

ME/DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 5-27). Porto: SEM/SPCE.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Stake, R. E. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Wong, K. (2004). Using Multi-modal think-board to teach mathematics. In *Proceedings of ICME-10*. Copenhagen: Technical University of Denmark. Acedido em http://math.nie.edu.sg/ kywong/Multi-modal%20think-board%20ICME%2010%20paper.pdf

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: a perspective of constructs. In Frank K. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 1169-1207). Charlotte: Information Age Publishing.

PROVAS DE AFERIÇÃO E EXAMES:
A QUALIDADE DAS QUESTÕES DE ÁLGEBRA

Mário José Miranda Ceia
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Portalegre
mario.ceia@esep.pt

Adelaide Filipe
Escola Secundária Francisco Simões
adelaiderala@gmail.com

Cláudia Santos
POPH - Programa Operacional Potencial Humano
claudia-bernardino@hotmail.com

Resumo

Esta comunicação apresenta um modelo de análise das questões das provas de aferição e dos exames. O modelo inspira-se na taxonomia SOLO, em particular na forma como estes autores estabelecem os ciclos de aprendizagem. Foram definidos três parâmetros para suportar a análise das questões: As capacidades exigidas para produzir a resposta (quantidade de conhecimentos); as operações envolvidas na resolução (tipo de raciocínio); e as respostas solicitadas. Esta grelha de análise é aplicável a qualquer nível de escolaridade, devendo ser tido em consideração que os conceitos referidos são os próprios desse nível de escolaridade e que as operações envolvidas são as próprias do desenvolvimento cognitivo correspondente. Embora tenham sido analisadas algumas questões, que conduziram a reformulações do modelo, prevê-se que um trabalho de análise a um número maior de questões possa provocar a introdução de novos ajustamentos.

Palavras-chave: Qualidade das questões das provas de aferição, Qualidade das questões dos exames, Avaliação em matemática.

Introdução

Nas últimas décadas os processos de avaliação do conhecimento matemático têm sido alvo de um interesse generalizado, em boa parte porque os estudantes apresentam nesta disciplina resultados que, no mínimo, se poderiam considerar muito aquém de um aproveitamento normal.

A avaliação em Matemática, nos nossos dias, é encarada de uma forma muito diferente e que vai muito para além da utilização dos testes e exames, mas são estes que continuam a mostrar-se os principais e os primeiros elementos utilizados por professores, pela administração educativa e aceites pela sociedade em geral, para avaliar o desempenho dos estudantes (Santos & Menezes, 2008; Kulm, 1990).

O alargamento da escolaridade obrigatória e a possibilidade de muito mais jovens poderem aceder ao ensino provocaram, a partir do início da década de 70 do século passado, um acréscimo muito significativo de alunos (Barreto e Preto, 1996, pp. 90-92)[1]. Este aumento de alunos e a necessidade do sistema avaliar as aprendizagens veio trazer uma crescente importância aos exames, pois só assim é possível avaliar grande número de alunos.

No caso português a administração educativa tem dado especial atenção à realização de provas de aferição nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, desde o ano lectivo de 2000/01, exames no 3.º Ciclo do Ensino Básico, desde 2004/05, e no Ensino Secundário (http://www.gave.min-edu.pt/, consultado em 10/05/05), como forma de regular o sistema educativo.

A publicitação dos resultados das provas de aferição e dos exames nacionais tem provocado um coro de recriminações e lamentações, surgindo reparos sobre a forma como o conhecimento, em particular o conhecimento matemático, é avaliado, sobre como os exames são concebidos e construídos.

Na realidade todos estes comentários, surgidos dos mais diversos sectores sociais, associações profissionais, instituições de ensino, etc., apresentam a mesma debilidade, são opiniões sem suporte em critérios fiáveis ou estabelecidos de forma credível. Apesar da legitimidade de emitirem opiniões, estas observações dificilmente podem ser tidas em conta como contributos relevantes para a melhoria quer da avaliação do conhecimento matemático, quer da educação matemática.

Torna-se, portanto, desejável que sejam elaborados estudos sobre os exames, que permitam criar um conjunto de indicadores, baseados em evidência empírica, os quais constituirão uma sólida grelha de critérios para avaliar este tipo de provas.

[1] De acordo com estes autores o número de alunos matriculados nos diversos níveis de ensino sofreu um forte incremento, exceptuando-se o 1.º Ciclo do Ensino Básico. O quadro que se segue, elaborado a partir dos dados transcritos por estes autores, mostra a evolução destes números.

	Alunos Matriculados			
	1.ºCiclo	**2.º Ciclo**	**3.º Ciclo**	**Secundário**
1970-1971	992 446	153 710	217 976	25 726
1975-1976	922 204	277 111	233 421	82 870
1980-1981	886 046	322 382	259 289	134 746

Objectivos

Com o presente estudo pretende-se, em primeiro lugar:

a) Construir um modelo de análise das questões dos exames que permita diferenciar a sua complexidade.

Posteriormente:

b) Apreciar a qualidade das provas de aferição e dos exames à luz do modelo.

O modelo a construir terá em conta a quantidade de conhecimentos envolvidos na abordagem de cada questão, a complexidade do raciocínio envolvido e o tipo de solução requerida.

Com base na análise das questões procura-se verificar se em cada prova de aferição ou exame estas são diversificadas relativamente às categorias que forem estabelecidas, bem como em relação aos vários tópicos estabelecidos nos respectivos currículos.

A Taxonomia SOLO

Na perspectiva de Ausubel (1968, in Biggs & Collis, 1982), aprender significativamente quer dizer dar significado ao conhecimento existente, envolvendo o sujeito que aprende em dois tipos de tarefas: conhecer factos, capacidades, conceitos ou estratégias de resolução de problemas; e usar aqueles factos, capacidades, conceitos ou estratégias de resolução de problemas (Biggs & Collis, 1982).

Para Biggs e Collis, avaliar uma aprendizagem deste tipo exige conhecer, por um lado, a quantidade de factos que foram aprendidos por um sujeito e, por outro, que qualidade tem a aprendizagem desses factos. É a qualidade da aprendizagem, baseada em critérios bem definidos e pré-estabelecidos, que nos vai preocupar (1982).

Mas a maior diferença relativamente a outros modelos que analisam o conhecimento dos indivíduos assenta no facto de Biggs e Collis defenderem que é sustentável avaliar o desempenho de um certo indivíduo, num determinado momento, sem fazer qualquer tipo de inferência sobre a sua estrutura cognitiva. Para tal, consideram que a análise não deve pretender inferir sobre as capacidades dos indivíduos e sim debruçar-se sobre a qualidade das respostas que estes produzem durante o desempenho de uma determinada tarefa (1982).

Tal pressuposto implica que, de um ponto de vista prático, a resposta que um indivíduo produz, durante a realização de certa tarefa, apresenta uma certa qualidade, sendo possível atribuir-lhe uma categoria, analisando apenas o seu desempenho (Estrutura dos produtos de aprendizagem observados[2] – SOLO), em vez de pretender avaliar a estrutura cognitiva desse indivíduo (Estrutura Cognitiva Hipotética[3] – HCS) (Biggs & Collis, 1982).

Como consequência imediata será plausível admitir que, em circunstâncias distintas, o desempenho possa ser diferente, dependendo de factores diversos, sem que tal signifique que as capacidades individuais se modificaram. Convém, contudo, referir que Biggs e Collis não negam a relevância da maturação dos indivíduos na qualidade das respostas e estabelecem um paralelismo entre os estádios de desenvolvimento - sensório motor, pré-operacional, concreto operacional e formal operacional, com a qualidade da aprendizagem (níveis SOLO) – pré-estrutural, uni-estrutural, multi-estrutural, relacional e abstracto.

A taxonomia SOLO estabelece cinco níveis, sendo definido cada nível à custa de três parâmetros, os quais permitem descriminar os diferentes tipos de respostas ou produções que lhe correspondem: as capacidades, as operações envolvidas e a consistência e capacidade de concluir.

As capacidades referem-se à quantidade de memória de trabalho, ou de tempo em que a atenção está mobilizada, requerida por cada um dos diversos níveis da taxonomia SOLO. O número de factos que é possível recordar e o tempo de mobilização da atenção é maior no nível abstracto, ou seja, neste nível é necessário recordar vários factos simultaneamente, bem como prolongar os períodos de atenção de modo a estabelecer diversas relações entre aqueles factos. No nível pré-estrutural poderá nem ocorrer um período de atenção suficiente para recordar pelo menos um aspecto relevante, pelo que as respostas não farão sentido.

As operações envolvidas dizem respeito à forma como as respostas produzidas são adequadas às questões formuladas. No nível pré-estrutural não se verifica qualquer relação lógica entre as questões e as respostas, podendo ser encontradas situações em que o sujeito se nega envolver nas tarefas propostas, reformulando a questão sem

[2] Tradução dos autores – Structure of the Observed Learning Outcome.
[3] Idem – Hypothetical Cognitive Structure.

modificar qualquer aspecto (tautologia), tentando adivinhar a resposta ou formulando uma resposta que poderá envolver aspectos perceptivos ou emocionais.

Uma resposta uni-estrutural invocará apenas um aspecto relevante, enquanto numa resposta multi-estrutural serão apresentados vários aspectos relevantes, mas sem qualquer ligação lógica entre eles. No nível relacional a resposta mostrará que o indivíduo é capaz de estabelecer algumas ligações lógicas entre os aspectos referidos, mas não consegue ter uma visão global do conceito envolvido.

Uma resposta abstracta vai para além da indução a partir dos dados fornecidos, introduzindo a dedução lógica. Será formulado um princípio geral abstracto, sendo possível deduzir desse princípio várias consequências.

A consistência e a capacidade de concluir referem-se a dois fenómenos quase contraditórios: a necessidade de chegar a uma conclusão; e a necessidade de tornar consistentes as conclusões, isto é, sem contradições quer entre a conclusão e os dados fornecidos, quer entre possíveis conclusões distintas. Quanto mais rápida for a obtenção da conclusão menos informação será utilizada e, portanto, maior será o perigo de criar contradições entre os dados e a conclusão. Por outro lado, uma maior necessidade de obter resultados consistentes conduzirá à utilização de mais informação e, sempre que possível, a conclusões com um maior grau de generalidade.

Desta forma uma resposta pré-estrutural será caracterizada pela obtenção de uma conclusão muito rapidamente, mas sem consistência. No caso das respostas uni-estruturais poderemos ter diversas conclusões, que podem ser correctas, mas que não são coerentes entre si. Nas respostas multi-estruturais a conclusão é determinada pelo envolvimento de um número maior de aspectos, mas que não estão relacionados entre si, podendo apresentar algumas inconsistências.

A resposta relacional apresenta uma conclusão capaz de relacionar todos os aspectos relevantes, evidenciando uma coerência global. Contudo a conclusão final, óptima num contexto, poderá mostrar-se falível noutros, mostrando uma forte ligação aos aspectos concretos. Só a resposta abstracta mostrará uma consistência global, estabelecendo princípios aplicáveis a qualquer situação.

Os Ciclos de Aprendizagem

Biggs e Telfer (1981, in Biggs & Collis, 1982) consideram que os indivíduos aprendem de formas próprias que são típicas da sua idade e portanto as respostas produzidas, para além de evoluírem de acordo com a estrutura SOLO, estão ligadas ao estádio de desenvolvimento do próprio indivíduo.

Aliás, Pegg e Tall (2010, p. 174) sustentam que a Taxonomia SOLO, ao considerar o crescimento global do conhecimento através de sucessivos modos de funcionamento (sensoriomotor, icónico, simbólico concreto, formal e pós-formal) e ciclos locais de desenvolvimento (uni-estrutural, multi-estrutural, relacional e abstracto), permite clarificar aspectos importantes que se colocam na construção de uma teoria global do desenvolvimento cognitivo, que se mostram de grande interesse quer do ponto de vista teórico, quer do ponto de vista prático.

No Quadro 1, apresenta-se uma síntese comparativa entre quatro teorias globais do crescimento global dos indivíduos a longo termo realizada por Pegg e Tall.

Quadro 1: Estádios Globais de Desenvolvimento Cognitivo (Pegg & Tall, 2010, p. 175)

Estádios de Piaget	Níveis de van Hiele (Hoffer, 1981)	Modos SOLO	Modos de Bruner
Sensoriomotor	I Reconhecimento	Sensoriomotor	Inactivo
Pré-operacional	II Análise	Icónico	Icónico
Operacional Concreto	III Ordenação	Simbólico Concreto	Simbólico
Operacional Formal		Formal	
	IV Dedução		
		Pós-formal	
	V Rigor		

Biggs e Collis sugerem, ainda, que os indivíduos aprendem ao longo da vida, através de Ciclos de Aprendizagem, seguindo a estrutura SOLO. Sucessivamente, em cada novo episódio de aprendizagem as aprendizagens evoluem seguindo os níveis do modelo SOLO (1982).

Para atingir uma certa competência, num determinado modo de funcionamento, os indivíduos passam por momentos em que treinam capacidades elementares (uni-estrutural), depois dominam várias capacidades (multi-estrutural), acabando por utilizar esse domínio com um fito pré-determinado (relacional). O nível abstracto será atingido quando se estabelece uma estratégia para obter determinados resultados.

Cada indivíduo entra num determinado modo de funcionamento quando atinge um desempenho uni-estrutural desse modo, evoluindo até produzir respostas mais elaboradas, multi-estrutural, e chegar as níveis mais complexos, relacional. Quando chegar ao nível abstracto significa que passa a funcionar no modo imediatamente mais elevado.

Note-se, ainda, que Pegg e Tall (2010) defendem que a estrutura teórica dos ciclos de aprendizagem do modelo SOLO é semelhante aos modelos de construção de conceitos de Davis, Dubinsky e Gray e Tall. O Quadro 2, na página seguinte, apresenta a forma como aqueles autores, de forma resumida, comparam estes três modelos com os ciclos de aprendizagem do modelo SOLO.

Quadro 2: Ciclos locais de desenvolvimento cognitivo (Pegg & Tall, 2010, p. 182)

Modelo SOLO	Davis	APOS de Dubinsky	Gray e Tall
			Objectos Base
Uni-estrutural Multi-estrutural	Procedimento (VMS)	Acção	Procedimento
Relacional	Processos Integrados	Processos	Processos
Uni-estrutural (um novo ciclo)	Entidade	Objecto	Proceito
		Esquema	

Modelo de Análise das Questões

O modelo de análise das questões das provas de aferição e dos exames, que apresentamos, corresponde a uma versão preliminar, que temos vindo a aperfeiçoar durante a análise das diversas provas.

Este modelo, inspirado na Taxonomia SOLO, foi concebido para analisar vários tipos de questões – testes, provas de aferição e exames, e adaptar-se a qualquer nível de escolaridade.

Os ciclos de aprendizagem, de acordo como Biggs e Collis (1982) os definem, sugerem que em cada nível de escolaridade teremos uma estrutura de questões semelhantes, variando a complexidade do conhecimento matemático que se terá de utilizar, bem como a complexidade dos raciocínios necessários à resolução das questões.

Desta forma, tal como no modelo SOLO, considerámos três parâmetros de análise: Conhecimento, quantidade de conhecimentos exigidos para produzir a resposta; Operações, tipo de raciocínio envolvido na resolução; e Resposta, tipo de respostas solicitadas.

Entendemos por Conhecimento o conjunto de conceitos que a resposta sugere que sejam utilizados e a forma como esses conceitos são envolvidos na resposta, ou seja, são fornecidos pelo enunciado ou têm que ser pesquisados para além dele.

Operações, o tipo de raciocínio envolvido na resposta bem como são estabelecidas as conclusões: trata-se de uma generalização inédita ou uma conclusão geral semelhante a outra já experimentada, ou será uma reprodução de uma generalização realizada anteriormente.

No que respeita à Resposta, pretende-se distinguir, por um lado, o tipo de respostas que são solicitadas: solicita-se uma resposta de nível de complexidade inferior, trata-se de uma resposta fechada ou não; por outro, quando existe a possibilidade de coexistirem diversas respostas como são resolvidas possíveis inconsistências e por fim como as respostas se compatibilizam entre elas.

O Quadro 3 resume os critérios estabelecidos para definir as diferentes categorias deste modelo de análise.

Quadro 3: Modelo de caracterização das questões de provas de avaliação

Categoria das Questões	Conhecimentos	Operações	Respostas
Abstracto	Os conhecimentos envolvidos: - são de grau adequado ou superior ao nível de escolaridade envolvido, tendo, neste caso, que ser pesquisados; - são relacionados entre si. Envolve a elaboração de hipóteses de trabalho. É necessário identificar informação relevante.	São envolvidos raciocínios de carácter indutivo e/ou dedutivo. São estabelecidas generalizações inéditas.	As inconsistências surgidas são resolvidas. As respostas não são fechadas. As conclusões são abertas e/ou permitem alternativas logicamente válidas.
Relacional	Os conhecimentos envolvidos: - são de grau adequado ao nível de escolaridade envolvido; - são relacionados entre si. É necessário identificar informação relevante.	São envolvidos raciocínios de carácter indutivo e/ou dedutivo. São realizadas generalizações semelhantes a outras já experimentadas.	As inconsistências surgidas, dentro do sistema proposto, são resolvidas. As respostas são fechadas. As conclusões são únicas e dentro do sistema envolvido.
Multi-estrutural	Os conhecimentos envolvidos: - são de grau adequado ao nível de escolaridade envolvido; - são utilizados de forma isolada. É necessário identificar informação relevante.	São envolvidos raciocínios de carácter indutivo e/ou dedutivo, semelhantes a outros já experimentados. São realizadas generalizações, semelhantes a outras já experimentadas.	As inconsistências surgidas, dentro do sistema proposto, são resolvidas. As respostas solicitadas são fechadas. As conclusões são únicas e dentro do sistema envolvido.
Uni-estrutural	O único conhecimento envolvido é de grau adequado ao nível de escolaridade em presença. É necessário identificar informação relevante.	São envolvidos raciocínios de carácter indutivo ou dedutivo, semelhantes a outros já experimentados. São tiradas conclusões, semelhantes a outras já conhecidas, em termos de um único conceito.	As respostas são fechadas. As conclusões são únicas e dentro do sistema envolvido.
Pré-estrutural	Os conhecimentos envolvidos: - são de grau inferior ao nível de escolaridade envolvido; - são do âmbito do senso comum, podendo não estar explícita a ligação ao conhecimento matemático. Não é necessário identificar informação relevante.	Não é envolvido, explicitamente, qualquer tipo de raciocínio.	As respostas são fechadas. As conclusões são únicas e dentro do sistema envolvido ou num sistema menos complexo.

Metodologia

Na análise elaboramos hipotéticas respostas às questões que procurávamos caracterizar. Estas respostas foram construídas tendo em conta que, em certos casos, poderíamos encontrar mais do que uma resposta e procurámos atender aos critérios de classificação como forma de esgotar as diversas possibilidades.

Desta forma, foi possível descortinar quantos conhecimentos matemáticos estavam envolvidos na construção da resposta, o que foi conseguido através dos objectivos dos programas de Matemática dos respectivos níveis de escolaridade, e se estes conhecimentos estavam ou não relacionados entre si. Nesta fase estabelecemos que uma unidade de conhecimento matemático era aquela que fosse susceptível de ser avaliada individualmente e que duas unidades de conhecimento estavam relacionadas se a utilização de uma dependia de resultados que envolviam a outra. Tomámos, ainda, em consideração se o conhecimento era fornecido pelo enunciado da questão ou se era necessário realizar alguma pesquisa adicional, ou se o conhecimento era adequado ao nível de escolaridade em apreço, de nível mais avançado ou de nível inferior.

No que respeita às operações identificámos se o raciocínio era de tipo indutivo ou dedutivo e se a resposta envolvia qualquer tipo de generalização, distinguindo as que eram inéditas, nunca teriam sido realizadas em sala de aula, de acordo com o estabelecido no programa, ou eram idênticas a outras já realizadas.

Para as respostas estabelecemos que eram únicas aquelas em que estava envolvido apenas um processo de resposta e que eram fechadas as que apenas admitiam uma resposta.

Como se pode constatar, esta grelha de análise é aplicável a qualquer nível de escolaridade, desde que se tenha em consideração que os conceitos a que nos referimos, em cada caso, são os próprios desse nível de escolaridade e que as operações envolvidas são as próprias do desenvolvimento correspondente.

Durante a construção desta grelha foram analisadas diversas questões quer de provas de aferição quer de exames, e de diferentes níveis de escolaridade, o que nos permitiu efectuar alguns ajustes sugeridos pela própria análise. Contudo consideramos que melhorias e correcções podem ser introduzidas durante a análise de novas questões.

Análise das Questões

A selecção das questões foi feita de modo a evidenciar a possibilidade de utilização do modelo em qualquer dos níveis de ensino considerados, tendo-se optado por questões que apresentaram um maior debate na sua classificação.

Questão (PAM1CEB200903)[4]

3. Um grupo de 47 crianças, do campo de férias, vai fazer alpinismo.
As crianças vão de carro. Em cada carro cabem 6 crianças.

Quantos carros são necessários para levar as 47 crianças?

Mostra como chegaste à tua resposta.

Resposta: ______________________________

Critérios de Classificação (PAM1CEB200903)

Item 3

Resposta correcta: 8.

31 Apresenta uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema, e responde correctamente.

22 Apresenta uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema, cometendo pequenos erros de cálculo [(a)], que não alteram o grau de dificuldade do problema, e responde de acordo com o valor obtido.

21 Apresenta uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema, mas responde incorrectamente ou não responde.

12 Revela alguma compreensão do problema.

11 Responde correctamente, sem apresentar uma explicação adequada, ou sen apresentar uma explicação.

00 Apresenta outra resposta além das mencionadas.

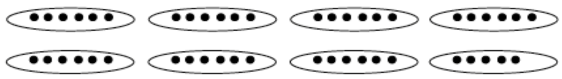
Nota:
(a) Entende-se por pequenos erros de cálculo aqueles que não sejam reveladores da não compreensão das noções de número e de operação.

[4] Prova de Aferição de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico, ano de 2009, questão 3.

Código 31

- $\begin{array}{l|l} 47 & 6 \\ \cline{2-2} 5 & 7 \end{array}$

  Resposta: São necessários 8 carros.

- 

  Resposta: São necessários 8 carros.

- $6 \times 8 = 48$

  Resposta: São necessários 8 carros.

Código 22

- $6 \times 8 = 46$
  $6 \times 9 = 54$

  Resposta: São necessários 9 carros.

Código 21

- $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48$

  Resposta: Foram 7 carros para as crianças.

- $\begin{array}{l|l} 47 & 6 \\ \cline{2-2} 5 & 7 \end{array}$

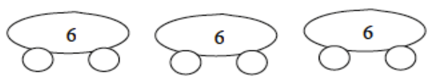
  Resposta: São necessários 7 carros.

Código 12

- $\begin{array}{l|l} 47 & 6 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array}$ *(Considera-se que o erro de cálculo altera o grau de dificuldade do problema.)*

  Resposta: São necessários 6 carros.

Código 00

- 

  Resposta: *(Não responde à pergunta.)*

- $47 - 6 = 41$

  Resposta: São necessários 41 carros.

Resolução Proposta

A resposta correcta é 8. Ao dividir as 47 crianças em grupos de 6, número de crianças que cada carro transporta, verifica-se que 7 automóveis ficarão cheios e, sobrando 5 crianças, é necessário um outro automóvel.

A resolução desta questão pode ser realizada de duas formas distintas: um processo multiplicativo, utilizando a divisão; e aditivo, utilizando a subtracção sucessiva.

No primeiro caso é necessário que os alunos sejam capazes de compreender a operação divisão nos seus diferentes sentidos (medida, partilha e razão), o que os conduzirá à utilização desta operação. Em seguida, após a realização da operação terão necessidade de compreender os significados de divisão inteira, quociente e resto, de modo a permitir-lhes concluir que quociente indica o número de automóveis completamente cheios e o resto o número de crianças que irá no automóvel que não vai cheio (8 automóveis, 7 seguem cheios e outro transportará 5 crianças).

No segundo, será necessário utilizar a operação subtracção e compreender que cada grupo de oito que se retira corresponde a um automóvel, repetindo-se 7 vezes esta operação. No final restarão 5 crianças, pelo que é necessário utilizar mais um carro.

Categorização da questão

Conhecimentos Envolvidos. Em qualquer uma das respostas vão ser utilizados os conhecimentos descritos em dois objectivos distintos: "Utilizar subtracções sucessivas para a repartição de quantidades" e "Explorar situações que envolvam a divisão (subtracções sucessivas, adições e produtos)" (DEB, 2004, p. 176), do 3.º ano de escolaridade. Na primeira resposta apresentada, acresce a necessidade de dominar o algoritmo da divisão, de modo a permitir o cálculo do quociente e do resto, conhecendo o significado de cada um destes elementos.

Nestas respostas, os conhecimentos parecerem ser utilizados de forma sequencial mas, em qualquer dos casos, ter-se-á que estabelecer conexões entre o conhecimento do algoritmo e o significado de cada um dos seus elementos ou entre o números de vezes que se repete a subtracção e o número de carros a utilizar.

Na resolução da questão encontrar-se-á um valor para o quociente desta operação ou o número de subtracções a realizar, que é 7, mas deve, simultaneamente ter em conta que o resto é 5 ou na última subtracção sobram 5 não sendo possível voltar a retirar 8, ou seja, sobram 5 crianças sem transporte, que terão que ser transportadas num outro veículo, pelo que a resposta adequada é 8 automóveis.

Operações Envolvidas. O raciocínio utilizado na resposta é de carácter dedutivo e, provavelmente, semelhante a outros já experimentados, pois está estabelecido como objectivo específico no programa de Matemática do 1.º ciclo, como se constatou anteriormente.

Tipo de Resposta. Nas duas soluções apresentadas a resposta solicitada é fechada, mas os alunos têm que desfazer a inconsistência entre o resultado da operação, que toma um valor, e a solução, que apresenta um valor distinto.

Categorização. Desta forma considera-se que este item pode ser categorizada como uma questão *Relacional*.

Questão (PAM2CEB200919)[5]

19. Repara nas três primeiras figuras do padrão que o António inventou.

1ª figura 2ª figura 3ª figura

O António vai continuar a desenhar figuras, seguindo o mesmo padrão.

Quantas estrelas terá a 5ª figura?

Resposta: ____

[5] Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Básico, ano de 2009, questão 19.

Critérios de Classificação (PAM2CEB200919)

Item 19

22 **Resposta correcta:** 35.

21 Desenha a 5ª figura, mas não responde à pergunta, ou responde incorrectamente.

12 O trabalho revela que o aluno identifica a lei de formação da sequência de figuras.

11 Responde 24 ou identifica correctamente o número de estrelas da 4ª figura.

01 Identifica parcialmente a lei de formação da sequência de figuras.

00 Apresenta outra resposta além das mencionadas.

Código 12

❖ ***Resposta:*** É mais 5, depois mais 7, depois mais 9 e continua sempre assim.

Código 11

❖ 4ª = 24 5ª = 40
Resposta: A quinta figura tem 40 estrelas.

Código 01

❖ 
Resposta: 21 estrelas.

Código 00

❖ ***Resposta:*** 20 estrelas.

Resolução Proposta

A resposta correcta é 35. Para chegar a este resultado é necessário descobrir a regra de formação de cada novo elemento: cada novo elemento tem mais uma linha e cada linha tem mais uma estrela, e efectuar a contagem utilizando uma estratégia de simples contagem, eventualmente aditiva – contar cada linha e depois adicionar todas as somas obtidas, ou uma estratégia multiplicativa, contar o número de elementos de uma linha e multiplicar pelo número de linhas.

Nos Programas de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Básico (DHGEBS, 1991), que estavam em vigor durante a escolaridade dos alunos que foram submetidos a esta prova, nada consta sobre sequências ou estratégias de contagens de elementos dispostos de forma rectangular. No que respeita à determinação da área de um rectângulo esta estratégia é sugerida para introduzir a fórmula do cálculo da área.

No que diz respeito ao Programa de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico (DEB, 2004), no 2.º ano de escolaridade está estabelecido que os alunos devem "Determinar quantidades dispostas em forma rectangular utilizando a multiplicação.", pelo que poderíamos concluir que os conhecimentos utilizados seriam de complexidade inferior ao nível de escolaridade em apreço.

Por outro lado, quando olhamos para o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) encontramos referências ao trabalho no âmbito das sequências. Nos 1.º e 2.º anos de escolaridade o programa estabelece como objectivo específico "Elaborara sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números", e nos 3.º e 4.º anos "Investigar regularidades numéricas". Em qualquer dos casos estamos perante situações sempre ligadas aos números e à sua compreensão.

No 2. Ciclo, no capítulo da Álgebra, tópico das Sequências e Regularidades, aparecem três objectivos específicos que se enquadram na situação colocada por esta questão: "Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar a sequência numérica, conhecida a sua lei de formação" e "Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica".

Podemos, desta forma, descortinar várias parcelas de conhecimento que não temos a garantia de terem sido trabalhadas em sala de aula, se atendermos que não dizem respeito ao programa leccionado aos alunos que realizaram esta prova.

Categorização da questão

Conhecimentos Envolvidas. As diversas parcelas de conhecimento que têm que ser utilizadas na resolução da questão não estão definidas no programa em vigor para os alunos que foram sujeitos à prova, são utilizadas de forma independente e sequencialmente: primeiro têm que descortinar lei de formação dos elementos da sequência, segundo construir o 5.º elemento e, por fim, determinar o número de estrelas que o constituem.

Operações Envolvidas. Quer o raciocino indutivo quer o dedutivo estão presentes nesta resolução. Poderemos afirmar que para muitos dos alunos que se sujeitara a esta prova se tratou da primeira vez que trabalharam uma tarefa deste tipo, pelo que será uma situação inédita.

Tipo de Resposta. A resposta é fechada e os processos de resolução de idênticos.

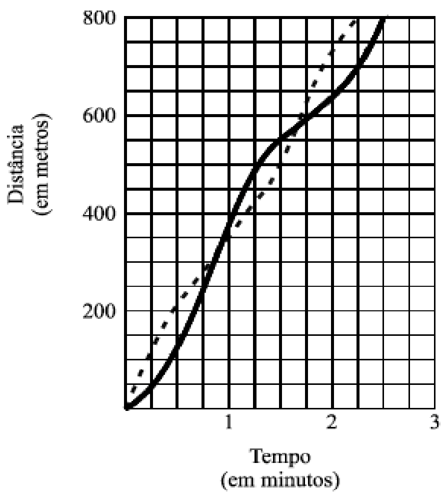
Categorização. A questão é categorizada com *Multi-estrutural*.

Questão (EM3CEB20050103)[6]

3. Dois amigos, o Carlos e o João, participaram numa corrida de 800 metros.

Logo após o sinal de partida, o João estava à frente do Carlos, mas, ao fim de algum tempo, o Carlos conseguiu ultrapassá-lo. Na parte final da corrida, o João fez um *sprint*, ultrapassou o Carlos e cortou a meta em primeiro lugar.

Os gráficos que se seguem representam a relação entre o tempo e a distância percorrida, ao longo desta corrida, por cada um deles.



3.1. Quantos metros percorreu **o João** durante o primeiro minuto e meio da corrida?

Resposta ____

3.2. Quanto tempo decorreu entre a chegada de cada um dos dois amigos à meta? Apresenta, na tua resposta, esse tempo expresso em segundos.

Resposta ____

[6] Exame Nacional de Matemática, 9.º ano de escolaridade, 3.º Ciclo do Ensino Básico, ano de 2005, Prova 23 – 1.ª Chamada, questão 3.

Critérios de Classificação (EM3CEB20050103)

3.1. .... **4**

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:

Responde correctamente (500 **ou** 500 metros) 4

Responde 550 **ou** 550 metros 2

Dá outra resposta 0

3.2. .... **4**

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:

Responde correctamente (15 **ou** 15 segundos) 4

Responde $0{,}25$ minutos **ou** $\frac{1}{4}$ de minuto 3

Evidencia ler correctamente os dois tempos de chegada à meta (**por exemplo:** «Um chegou aos $2{,}5$ minutos e o outro aos $2{,}25$ minutos.» **ou ...**), mas não responde, **ou** responde incorrectamente 2

Dá outra resposta 0

Resolução proposta

A resposta correcta à questão 3.1. é 500 metros.

Na resolução deste item o aluno tem que ter em atenção a informação relevante que faz parte do enunciado, para identificar no gráfico a linha que traduz a corrida do João, localizar no eixo que indica o tempo um minuto e meio, seguir na vertical e para cima, até se cruzar com a linha relativa ao João (linha a tracejado) e fazer a leitura, no eixo que indica a distância, da ordenada que corresponde à abcissa 1,5 minutos.

A resposta à questão 3.2. é 15 segundos.

O aluno deve reconhecer a parte final da corrida como sendo a chegada à meta, estabelecer uma relação entre as abcissas dos pontos de chegada dos dois amigos e traduzir o tempo de intervalo entre as duas chegadas – um quarto de minuto – em segundos.

O programa de Matemática do ensino básico (DEB, 2001, p. 54) aponta como objectivo que o aluno deva "Interpretar e explorar gráficos que lhe sejam fornecidos" e, dada a importância da linguagem gráfica como instrumento poderoso de análise e comunicação, as sugestões metodológicas aconselham a análise e interpretação de gráficos que traduzam situações da vida real. Descrever uma corrida ou um passeio traduzido por um gráfico distância à origem/tempo, são representações que surgem ao longo do 3.º ciclo e que exigem capacidades matemáticas que envolvem conhecimentos e/ou argumentos simples que o aluno pode realizar com interesse.

Categorização da questão

Conhecimentos envolvidos. Nos dois itens é exigido o domínio de mais do que um conhecimento distinto para ler, interpretar e analisar o gráfico de duas linhas.

Operações envolvidas. As duas alíneas exigem raciocínios dedutivos semelhantes a outros já experimentados neste ciclo de aprendizagem.

Tipo de resposta. Nas duas alíneas a resposta é fechada.

Categorização. De acordo com a argumentação exposta, e para alunos do 9º ano, os dois itens são categorizados como uma questão *Multi-estrutural*.

Questão (EM1220100104)[7]

4. Na *Internet*, no dia 14 de Outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espectáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda.

Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em **centenas**, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1), \quad t \in [0, 5]$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Mostre que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$, para qualquer $t \in [0, 5]$

4.2. Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes.

Apresente o resultado em horas e minutos.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.

[7] Prova Escrita de Matemática A, 12.º Ano de Escolaridade, 1.ª Fase, ano de 2010, questão 4.

Critérios de Classificação (EM1220100104)

4.1. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Escrever $N(t) = 24\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1)$ .... 4 pontos

Concluir que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$ .... 6 pontos

2.º Processo:

Escrever $N(t) = 8\log_4\left(\frac{(3t+1)^3}{3t+1}\right)$ .... 4 pontos

Obter $N(t) = 8\log_4(3t+1)^2$ .... 2 pontos

Concluir que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$ .... 4 pontos

4.2. .... **15 pontos**

Escrever $N(t) = 24$ **(ver nota 1)**.. 3 pontos

Resolver a equação $N(t) = 24$ .... 8 pontos

Escrever $\log_4(3t+1) = \frac{3}{2}$ .... 2 pontos

Escrever $3t+1 = 4^{\frac{3}{2}}$ .... 4 pontos

Escrever $t = \frac{-1+4^{\frac{3}{2}}}{3}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Calcular o valor de t, em horas e minutos (t = 2 horas e 20 minutos) **(ver notas 2 e 3)**.. 4 pontos

Notas:

1. Caso o examinando escreva $N(t) = 2400$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 2 pontos.

Resolução Proposta – 4.1

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1)$$

$$= 8\log_4(3t+1)^2$$

$$= 16\log_4(3t+1)$$

Para responder a esta questão, os alunos terão que dominar o conhecimento sobre ”Regras operatórias de exponenciais e logaritmos” do tema Introdução ao Cálculo Diferencial do Programa de Matemática do 12.º ano (ME, 2002, p. 4).

Categorização da questão

Conhecimentos Envolvidos. Nesta alínea os alunos terão que reconhecer que se trata de uma função logarítmica e dominar o conhecimento sobre regras operatórias de logaritmos.

Operações Envolvidas. São envolvidos raciocínios de carácter dedutivo, semelhantes a outros já experimentados atendendo que o conhecimento exigido está previsto no programa de Matemática do 12.º ano (tal como acima referido).

Tipo de Respostas. A resposta é fechada dentro do sistema envolvido.

Classificação. Considera-se que esta alínea 4.1 pode ser categorizada como *Uni-estrutural*.

Resolução Proposta – 4.2

2400 = 24 centenas

Equação do problema: $16\log_4(3t+1)=24$

$$\log_4(3t+1)=\frac{3}{2}$$

$$t=\frac{\left(4^{\frac{3}{2}}-1\right)}{3}$$

$$t=2,333$$

Resposta: 2,3h = 2h e 20 minutos

Para responder a esta questão, os alunos terão que dominar os conhecimentos sobre "Utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais" e "Regras operatórias de exponenciais e logaritmos" do tema Introdução ao Cálculo Diferencial do Programa de Matemática do 12.º ano (ME, 2002, p. 4).

Categorização da questão

Conhecimentos Envolvidos. Nesta alínea os alunos terão que interpretar o problema, escrever a equação e resolver a mesma, sendo necessário o domínio dos conhecimentos sobre a utilização da função logarítmica na modelação de uma situação real e aplicação das regras operatórias de exponenciais e logaritmos.

A resolução exige que os conhecimentos estejam articulados, mas não relacionados entre si.

Operações Envolvidas. São envolvidos raciocínios de carácter dedutivo, semelhantes a outros já experimentados pois os conhecimentos exigidos estão previstos no programa de Matemática do 12.º ano (tal como acima referido).

Tipo de Respostas. A resposta é fechada dentro do sistema envolvido.

Categorização. Considera-se que esta a alínea 4.2 pode ser categorizada como *Multi-estrutural*.

Conclusão

Na análise destas questões de álgebra verificámos que na generalidade as respostas exigem a utilização de mais do que um conhecimento matemático: apenas uma das questões do Exame do 12.º ano de escolaridade necessita de um único conhecimento.

Todas as questões que apresentámos envolvem raciocínios de carácter dedutivo, com procedimentos que já foram experimentados em sala de aula de acordo com o que está prescrito nos respectivos programas de Matemática.

Notámos, também, que apenas a questão da Prova de Aferição do 1.º Ciclo requereu que na sua solução fossem relacionados conhecimentos matemáticos: a necessidade de interpretar os resultados da operação realizada com o contexto gerado pela questão.

Parece ficar patente que o modelo se pode utilizar nos diversos níveis de ensino e que pode fornecer dados relevantes para a análise da qualidade dos exames.

Referências

Barreto, A., & Preto, C. V. (1996). Indicadores da evolução social. In A. Barreto, C. V. Preto, J. Ferrão, M. J. V. Rosa, M. F. Mónica, J. S. Lopes, H. M. Carreira & H. N. Rodrigues (Eds.), *A situação Social em Portugal 19960 – 1995* (pp. 61-162). Lisboa: Instituto de Ciências Sociais da Universidade de Lisboa.

Biggs, J. B. (1992). Modes of learning, forms of knowing, and ways of schooling. In A. Demetriou, M. Shayer & A. Efklides (Eds.), *Neo-Piagetian Theories of Cognitive Development* (pp. 31-51). London: Routledge.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning*. London: Academic Press, Inc.

Boavida, A. M., Domingos, A., Matos, J. M., & Junqueira, M. (Eds.). (1997). *Aprendizagens Matemáticas*. Lisboa: Secção de Educação e Matemática - Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ceia, M. (2002). A Taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele. Comunicação apresentada no *XI Encontro de Investigação em Educação Matemática*, Coimbra.

Ceia, M., & Duarte, J. (2002). Os exames e a taxonomia SOLO. Comunicação apresentada no *XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática*, Aveiro.

Collis, K. F. (1992). Curriculum and assessment: A basic cognitive model. In G. C. Leder (Ed.), *Assessment and Learning of Mathematics* (pp. 24-45). Victoria: Australia: The Australian Council for Educational Research Ltd.

Departamento da Educação Básica (Ed.) (2004). *Organização Curricular e Programas: Ensino Básico – 1.º Ciclo*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário (Ed.) (1991). *Programa de Matemática: Plano de Organização Curricular do Ensino – Aprendizagem, 2.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda.

Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário (Ed.) (1991). *Programa de Matemática: Plano de Organização Curricular do Ensino – Aprendizagem, 3.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda.

Kulm, G. (Ed.) (1990). *Assessing higher order thinking in mathematics*. American Association for the Advancement of Science Press.

Menezes, L., Santos, L., Gomes, H. & Rodrigues, C. (2008). *Avaliação em Matemática: Problemas e Desafios*. Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Pegg, J., & Tall, D. (2010). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 173 – 192). New York: Springer-Verlag.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular - Ministério da Educação.

Romberg, T. A., Zarinnia, E. A., & Collis, K. F. (1990). A new world view of assessment in mathematics. In G. Kulm (Ed.), *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., & Lopes, I. M. C. (2002). *Matemática A: 12.º ano.* Lisboa: Departamento do Ensino Secundário – Ministério da Educação.

Representações no Ensino-aprendizagem da Álgebra

(Grupo de Discussão 1)

Coordenação:
Maria Helena Martinho, *CIEd, Instituto de Educação, U. Minho*
João Pedro da Ponte, *Instituto de Educação, U. Lisboa*

REPRESENTAÇÕES NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

João Pedro da Ponte e Maria Helena Martinho

O ensino da Álgebra tem merecido uma atenção particular nos últimos anos, tanto ao nível da investigação como, e consequentemente, ao nível dos currículos escolares. Importa sublinhar a consciência crescente da sua importância desde os primeiros anos de escolaridade da qual o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico é simultaneamente causa e reflexo. A utilização de diferentes representações, desde as mais informais às mais formais, comporta um forte potencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O desenvolvimento do pensamento algébrico e, particularmente, o desenvolvimento do pensamento relacional, do sentido de número e do sentido de símbolo, bem como a exploração de diferentes representações, serão objecto de discussão ao longo dos diferentes momentos deste grupo de trabalho. A investigação que aqui se apresenta percorre toda a escolaridade, desde o 1.º ciclo do ensino básico ao ensino secundário, com foco tanto no trabalho do professor como na aprendizagem dos alunos. Procuraremos fazer esse percurso em três momentos distintos.

O primeiro momento, dedicado aos anos mais elementares, conta com três comunicações. A primeira centra-se em cinco professoras do 1.º ciclo que revelam diferentes formas de encarar as representações e, principalmente, de trabalhá-las na sala de aula. O artigo interroga-se, nomeadamente, sobre a preferência que algumas delas manifestam pela formalidade em detrimento das representações mais informais. Seguem-se dois estudos centrados em alunos. O primeiro estuda, numa turma do 4.º ano, o desenvolvimento do pensamento relacional evidenciado na resolução de tarefas que exploram igualdades numéricas com variáveis. O outro, centrado numa aluna do 5.º ano, estuda o desenvolvimento da compreensão do número racional, em especial no que se refere à sua comparação e ordenação, recorrendo, particularmente às representações decimal, fraccionária e pictórica.

O segundo momento, com três comunicações, centra-se no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário. A primeira discute como podem as representações utilizadas por alunos do 9.º ano na resolução de problemas revelar-se um suporte para o desenvolvimento do pensamento algébrico. A segunda centra-se em três alunos do

EIEM 2011 - *Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (eds), 7-8 Maio, 2011, pp. 175–176

10.º ano e analisa o modo como, recorrendo igualmente à resolução de problemas, podem desenvolver o sentido de símbolo. A terceira centra-se num aluno, do 12.º ano de Matemática A, que revela um fraco desenvolvimento do sentido de símbolo e que, no entanto, resolve tarefas de cálculo simbólico apesar de não lhes atribuir grande sentido. A dificuldade na compreensão do significado de variável, ilustrativa da dificuldade em passar de estruturas mais concretas para mais abstractas, pode, em verdade, ser observada em alunos do ensino secundário. O facto deixa em aberto a questão de saber até que ponto a utilização de representações simbólicas supõe ou depende de uma capacidade razoável de abstracção.

No terceiro momento contamos com a apresentação de uma comunicação centrada em alunos de diferentes anos de escolaridade que, numa perspectiva de articulação vertical, estuda como diferentes formas de encarar o sinal de igual interferem com o desenvolvimento do pensamento algébrico e, particularmente com o pensamento relacional.

Ao longo destes três momentos pretendemos discutir de que forma as diferentes representações podem ser trabalhadas nos vários níveis de escolaridade e que relação isso pode ter com os outros aspectos do ensino-aprendizagem da Matemática. Pretendemos também que o trabalho do grupo ajude a enunciar questões e problemas importantes que possam ser objecto de futuras investigações.

AS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NAS CONCEPÇÕES DOS PROFESSORES DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO: UM ESTUDO EXPLORATÓRIO[1]

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Isabel Velez
Agrupamento de Escolas Dr. Azevedo Neves, Amadora
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
isabel1ciclo@gmail.com

Resumo

Este artigo relata um estudo exploratório com cinco professoras do 1.º ciclo do ensino básico, cujo objectivo é analisar as suas concepções relativamente às representações matemáticas. Através de entrevistas individuais semi-estruturadas, pretendemos conhecer e compreender as diferentes perspectivas das docentes sobre as representações matemáticas, procurando conceitos e ideias subjacentes no discurso de cada uma. As professoras, com tempos de serviço variados, pertencem ao mesmo Agrupamento de escolas e neste ano lectivo leccionam o 3.º ano de escolaridade. Todas as professoras, de um modo ou de outro, consideram que os alunos devem ser encorajados a usar representações informais, em especial esquemas e tabelas, mas valorizam sobretudo as representações formais e os algoritmos. Apesar de não ser nosso objectivo, todas as docentes fazem referência ao novo programa de Matemática, que algumas consideram ser muito negativo e outras muito positivo para a aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: Ensino da Matemática, Representações matemáticas, Conhecimento profissional, Concepções.

Introdução

As representações matemáticas têm uma importância fundamental no raciocínio matemático, em particular no pensamento algébrico. Desde os anos 80, as representações matemáticas têm vindo a merecer uma crescente atenção por parte da investigação em Educação Matemática (Bishop & Goffree, 1986; Janvier, 1987). Mais recentemente, em especial desde que foram incluídas como um dos "*process standards*" pelo NCTM

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projecto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

(2007) as representações têm vindo igualmente a assumir uma significativa importância curricular. Em Portugal, recebem uma significativa atenção no novo programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007), quer como orientação metodológica geral, quer como recomendação específica para o trabalho nos mais diversos conceitos e tópicos.

A concretização na prática destas orientações depende do trabalho dos professores. É hoje amplamente reconhecido que estes assumem um papel chave no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, motivando o estudo das suas práticas e das suas concepções. Este estudo exploratório tem por objectivo analisar as concepções dos professores do 1.º ciclo do ensino básico sobre as representações matemáticas no processo de ensino-aprendizagem, tendo em vista preparar, se necessário, futuras acções de formação ou outras iniciativas de desenvolvimento profissional.

Concepções e práticas dos professores

As concepções podem ser vistas como elementos de natureza cognitiva que estruturam o conhecimento de cada indivíduo e que têm um papel decisivo na sua forma de pensar e de agir (Ponte & Chapman, 2006). O estudo das concepções e crenças dos professores constitui uma importante linha de trabalho dentro da Didáctica da Matemática, com especial incidência nas suas concepções sobre a Matemática e o ensino da Matemática. Ponte (1992) sintetiza deste modo os resultados da investigação:

> (…) Os professores tendem para uma visão absolutista e instrumental da Matemática, considerando-a como uma acumulação de factos, regras, procedimentos e teoremas. No entanto, alguns professores, destacando-se do conjunto, assumem uma concepção dinâmica, encarando a Matemática como um domínio em evolução, conduzido por problemas, e sujeito a revisões mais os menos significativas. (p. 208)

Ponte (1992) refere também que "uma das concepções mais prevalecentes é a de que o cálculo é a parte mais substancial da Matemática, a mais acessível e fundamental" (p. 205). A investigação realizada em Portugal (e. g., Abrantes, 1986; Canavarro, 1994; Fidalgo & Ponte, 2004; Guimarães, 1988, 2003; Vale, 1997) sugere que as concepções têm um papel estruturante no conhecimento profissional dos professores, reflectindo-se nas suas práticas de ensino. No entanto, devemos ter em atenção que, como refere Ponte (1992), a "relação entre as concepções e as decisões e acções do professor não é simples mas complexa" (p. 17). Este autor sugere que as concepções se formam através da experiência pessoal e da reflexão sobre a experiência, nos diversos contextos de interacção social e de prática profissional.

Além disso, tem vindo a ser progressivamente reconhecido que as concepções estão intimamente relacionadas com os contextos e as actividades realizadas pelos seres humanos (Roth, 2005). Por isso, as "inconsistências" que durante muito tempo constituíram motivo de controvérsia entre os investigadores têm vindo a ser interpretadas como as respostas diferenciadas que os professores têm necessariamente que dar relativamente às situações muito diversas em que se encontram, constituindo por isso uma via privilegiada para o estudo dessas situações.

Stylianou (2010) estudou em profundidade as concepções dos professores sobre representações. Refere que, independentemente de serem simples ou complexas, as representações matemáticas são "uma parte vital na explicação que os professores fazem de novos conceitos, ilustrações nos processos de resolução de problemas e na criação de ligações entre conceitos" (p. 329). Na sua perspectiva, as dificuldades que muitas vezes os alunos têm nas representações podem dever-se às concepções dos seus professores, uma vez que estes baseiam o seu ensino nas suas próprias representações formadas enquanto alunos. Desta forma, se um professor tem dificuldade em compreender e aplicar uma determinada representação, as suas dúvidas e inseguranças podem passar para os seus alunos.

Tal como refere Stylianou (2010), as representações ajudam a interpretar, sistematizar e compreender a informação dada no enunciado, a explorar e perceber qual a melhor forma de chegar a uma resposta correcta, bem como monitorizar e avaliar o processo da resolução do problema. Na sua perspectiva, as representações constituem igualmente uma forma de comunicar sobre os conceitos em causa. A autora refere que as representações são uma ferramenta fundamental nas práticas lectivas dos professores. Estes podem utilizar mais do que uma representação relacionada com o mesmo conceito, seleccionando as que no seu entender se adequam melhor aos seus alunos e ilustram com maior eficiência um determinado conceito ou processo. Desta forma, as representações utilizadas pelos professores podem ser um catalisador de uma discussão de ideias na sala de aula, geradora de novas representações nos alunos. Por sua vez, ao apresentarem as suas próprias representações, os alunos enriquecem as discussões, ao mesmo tempo que fornecem ao professor um instrumento de avaliação do seu raciocínio.

Analisando os resultados da sua própria investigação, Stylianou (2010) conclui que, apesar de utilizarem vários tipos representações no seu ensino, os professores não o fazem conscientemente e com uma intenção definida. A autora indica, igualmente, que, na sua grande maioria, os professores definem representações como sendo "diferentes formas de ilustrar um determinado conceito" (p. 333). As definições que os professores apresentam centram-se nas representações como produto (desenhos, tabelas, diagramas) e não tanto como processo (isto é, o processo de representar objectos e ideias matemáticas). Além disso, tendem a encarar as representações dos alunos como modelos visuais informais de reduzido valor e não como representações verdadeiramente matemáticas.

Metodologia

Neste estudo, cujo objectivo é conhecer as concepções dos professores do 1.º ciclo sobre representações em tarefas de cunho algébrico, usamos uma abordagem qualitativa. O Agrupamento onde se realiza este estudo localiza-se na zona limítrofe de Lisboa e integra três escolas: duas EB1/JI e uma EB2,3/ES, com aproximadamente 1200 alunos, entre os 3 e os 26 anos (no ensino diurno). Com uma população discente de cerca de 25% de alunos portugueses e de 75% de alunos com origem noutros países (na sua grande maioria dos PALOP), as dificuldades económicas e o parco acompanhamento familiar às crianças são uma realidade bastante comum. As participantes neste estudo são cinco professoras do 1.º ciclo do ensino básico, que leccionam neste agrupamento há seis anos lectivos ou mais e que acompanharam as suas turmas, desde o 1.º ano de escolaridade. Todas as professoras são do Quadro de Agrupamento. Ana, Beatriz e Carla têm mais de 20 anos de serviço, enquanto Daniela e Eva têm menos de 15 anos de serviço.

As professoras foram seleccionadas para esta investigação, porque todas leccionam o 3.º ano de escolaridade neste agrupamento de escolas. Cada entrevista, com a duração de cerca de 45 minutos, foi realizada pela segunda autora, separadamente, com cada professora, na sala de trabalho individual, de cada escola. A entrevistadora, também professora no mesmo agrupamento e já conhecida das professoras, manteve um discurso informal de modo a que as professoras não se sentissem avaliadas nem pressionadas a ter que "dar a resposta certa" em cada questão.

A recolha de dados foi realizada através de entrevistas semi-estruturadas, procurando "propor tarefas, situações e questões indirectas mas reveladoras que ajudem as concepções a evidenciar-se" (Ponte, 1992, p. 231). Durante cada entrevista, registada em áudio, na primeira parte, mostrámos três tarefas (baseadas na investigação de Stylianou, 2010) e colocámos diversas questões. Na segunda parte, mostrámos diversas resoluções de um mesmo problema, usando diferentes representações. As tarefas e as questões que colocámos encontram-se em Anexo. Algumas destas tarefas envolvem representações algébricas, outras podem ser abordadas usando representações algébricas. A análise de dados tem por base diversos elementos apresentados no quadro conceptual representado na figura 1: (i) O modo como a professora se relaciona com as representações matemáticas (em especial, a sua compreensão e ao seu uso das diversas representações); (ii) As suas perspectivas sobre o uso de representações pelos alunos (em especial, as representações informais e as representações que encoraja); (iii) Os seus modos de trabalho com representações na sala de aula; e (iv) As perspectivas da professora sobre as actuais orientações curriculares para o ensino da Matemática.

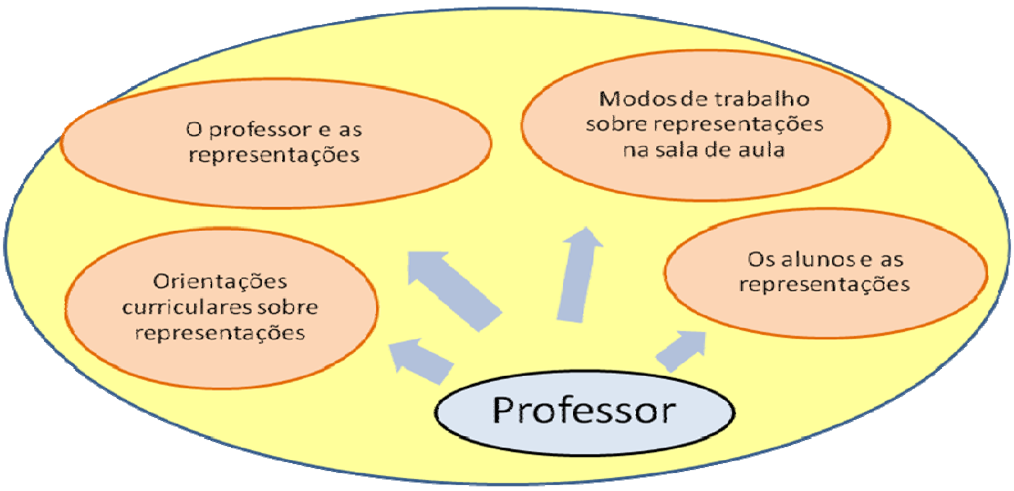


Figura 1. Quadro conceptual sobre as concepções do professor sobre representações matemáticas

O professor e as representações matemáticas

Compreensão das diversas representações

As professoras demonstram compreender e identificar diferentes tipos de representações matemáticas. No seu discurso, falam sem dificuldades das representações utilizadas pelos seus alunos, distinguindo-as e referindo quais são mais e menos utilizadas e quais as que preferem que os alunos utilizem. No entanto, não é comum identificarem as representações como icónicas, simbólicas, pictóricas ou geométricas ou referirem o termo "representação", falando antes em "esquema", "regularidade", "desenho", "linguagem", "estratégia" ou "resolução".

Durante a realização das tarefas, as professoras utilizam vários destes termos, quando descrevem as representações que seriam utilizadas pelos seus alunos:

> *Ana* (referindo-se à 2.ª tarefa): Íamos fazendo um esquema, fila a fila e depois acrescentávamos um a um!
>
> *Beatriz* (idem): A segunda… Olha…. Eles faziam como eu fiz! Com um esquema assim! Com desenhos faziam…
>
> *Carla* (sobre a 1.ª tarefa): Esta é uma linguagem, é uma linguagem matemática e eu tinha que traduzir, para uma linguagem mais simples.

Daniela é a única professora que usa o termo "simbólico", quando questionada sobre as representações dos seus alunos (mas sem usar o termo "representação"): "nem que seja simbólico, tipo bolas, quadrados…". Deste modo, embora não estejam familiarizadas com a terminologia específica relativa às representações matemáticas, as professoras mostram conhecer e compreender as principais representações relevantes no 1.º ciclo.

Representações usadas preferencialmente. Uma ideia que parece comum a todas as professoras é que as representações simbólicas (que muitas vezes designam por "algoritmo") são as representações mais adequadas, que correspondem a um nível de raciocínio mais elevado. Assim, ao resolverem a1.ª tarefa, todas recorrem ao algoritmo para determinar a solução correcta e, consequentemente, concluem que a tarefa é inadequada para os seus alunos. Na 2.ª tarefa, quatro das professoras utilizam uma tabela (que varia no seu grau de pormenor), para chegarem ao resultado correcto.

No entanto, uma das professoras recorre a uma operação que representa simbolicamente, dando por terminada a tarefa. Tendo em conta que as professoras referem consistentemente que quem recorre a este tipo de registo são os melhores alunos, será natural pensar, que sendo professora, deveria também fazê-lo, o que acaba por conduzi-la a uma solução incorrecta. Na mesma linha de raciocínio, Beatriz apesar de ter apresentado uma tabela, olha pensativamente para o que fez e diz:

> Pois… Ele agora por exemplo (referindo-se à Tarefa 2 da Parte I), também me foi mais fácil… Também fiz um esquema… Provavelmente há contas para resolver isto!

Na última tarefa, verificam-se algumas diferenças nas representações usadas pelas professoras. Assim, Ana, Beatriz e Carla recorrem à divisão e escrevem simbolicamente 9:3=3. Daniela utiliza a representação de fracção para chegar ao resultado, enquanto Eva, referindo que começa por trabalhar as fracções, utilizando outro tipo de representações, ilustra a forma como poderia ser resolvida esta tarefa. Faz um círculo, divide-o em três partes iguais e pinta uma dessas partes, dizendo:

> E depois multiplicava 9 vezes. A mim é o que me surge agora assim… (ri-se) (…) Então…É assim, nós temos sempre a realidade da nossa turma à frente, não é? Mas os meus…Acho que por exemplo, 1/3+1/3+1/3 (sublinha três círculos) tens uma unidade, não é? Depois 1+1+1 é 3! Só assim… Desenhos, esquemas, qualquer coisa! Mas se calhar, havia outros que tinha que lhes dar materiais didácticos. Eu tenho uns queijinhos que uso para eles perceberem as fracções. É, tipo, umas pizas…

Para além da representação simbólica, as professoras recorrem a tabelas e a esquemas simples na resolução das tarefas. Quando lhes perguntamos sobre a recta numérica, Beatriz admite alguma dificuldade em compreender este tipo de representação, indicando ter necessidade de formação neste campo. Pelo seu lado, Daniela diz que não a costuma usar, não por desconhecimento, mas porque, aparentemente, não vê motivo para o fazer. Nota-se que as professoras dão mais importância a outros tipos de representação, como os esquemas e as tabelas:

> Não quer dizer que não seja um bom método (referindo-se à recta numérica), mas eu pessoalmente não utilizo muito… Isso faz com que… Os alunos são um bocado a tua imagem, não é? Normalmente agora trabalhamos mais… Quer dizer… Eu obrigo-os a fazer as tabelas…

Deste modo, as professoras valorizam sobretudo as representações mais formais, de natureza simbólica, embora também reconhecem a utilidade de tabelas e esquemas. Na sua maioria, não se sentem à vontade ou não valorizam muito a recta numérica.

Perspectivas sobre o uso de representações pelos alunos

Uso de representações informais pelos alunos. Ao analisarem os exemplos dados na Parte II da entrevista, as professoras, tendo em conta o raciocínio dos alunos, consideram legítimas as suas representações informais. É o que acontece com Carla:

> Ai, não, não, não [não fazia distinção na cotação]. O resultado é o mesmo e a estratégia utilizada, não tem que ser igual. Cada um tem a sua para atingir o objectivo final e eu tinha que considerar isto tudo normal.

As professoras são unânimes em referir que consideram todas as respostas, totalmente certas, pois o raciocínio está correcto. No entanto, Ana e Beatriz dizem-no de forma irónica: têm que considerar as respostas igualmente correctas, porque "eles agora dizem que conta tudo", referindo-se aos novos programas, em que o raciocínio tem, na sua opinião, demasiada importância, comparativamente com o programa de Matemática anterior. Apesar deste tom irónico, que traduz possivelmente uma ambivalência entre atribuir algum mérito ao programa, embora globalmente não se reconheçam nele, ambas também consideram como correctos os exemplos apresentados:

> *Ana:* Não é [um registo matemático], mas ela fez, ela chegou lá. Então pronto. Ela foi subindo três e descendo dois. Tem raciocínio lógico. Claro que… Pronto OK… (faz uma careta)... Mas tem raciocínio lógico… (encolhe os ombros).
>
> *Beatriz:* Espera, deixa-me ver a tarefa… (olha para a resolução como se a estivesse a corrigir) Eu consideraria isto bem! Eu não sei se todos os passos estão bem, mas consigo perceber o raciocí… Os desenhitos dela!

As professoras consideram as representações informais importantes, principalmente quando os alunos não conseguem descobrir a solução da tarefa de outra forma. Apesar de nenhuma negar a importância deste tipo de representação, todas as consideram como uma fase transitória para uma representação matemática mais formal:

> *Daniela:* Sim, tenho alguns que nem precisam já dos desenhos e explicam tudo.
>
> *Investigadora:* Esses recorrem mais às tabelas…
>
> *Daniela:* Sim, e mesmo ao cálculo directo. Já não precisam de andar a rodear.

As professoras mostram ter consciência que nem sempre as representações informais dos alunos estão correctas, dependendo do raciocínio seguido:

> *Beatriz:* Ainda no outro dia isso aconteceu! O resultado, efectivamente era aquele, mas o raciocínio estava errado e não considerei aquilo certo! E expliquei que não podia ser…
>
> *Carla:* Costumam [desenhar], mas às vezes, não é bem aquilo… Eles às vezes desenham as próprias coisas…

Um dos receios das professoras relativamente às representações icónicas é o facto de que nem todas as tarefas podem ser resolvidas desse modo, podendo levar os alunos a ficar perdidos e desmotivados. Isso é notório em Daniela:

> Estava aqui outra vez na primeira (Tarefa 1 da Parte I), a ver se havia mais alguma forma de eles me representarem, mas provavelmente alguns iam-me desenhar latas e depois não davam o salto! Nem todos os problemas dá para fazer desenhos... (…) Diziam logo que não conseguiam fazer. Desistiam… Logo! Outros era logo: "Qual é a conta que eu faço? Vezes ou Dividir?" (ri-se)

Todas as professoras consideram legítimas as representações informais dos alunos, embora o pareçam fazer com diferentes graus de convicção. Consideram que os alunos devem recorrer às representações informais quando não conseguem resolver os problemas de outro modo, mas consideram que têm as suas limitações, não sendo por vezes eficazes para a resolução dos problemas. Acima de tudo, encaram-nas como ponto de passagem para as representações formais

Representações que encorajam nos alunos. As cinco professoras sublinham a importância das representações simbólicas (que tendem a designar por "algoritmos"). Ana e Beatriz referem várias vezes que os alunos necessitam "praticar mais vezes o algoritmo", que consideram ser a Matemática real e prática. No entanto, tendo em atenção as orientações do novo programa, Ana, por exemplo, promove a resolução de problemas, usando representações icónicas, sempre que os alunos não o consigam fazer de outra forma:

> Sim alguns também fazem desenhos. Eu até lhes digo, se não conseguirem, fazem com desenhos. Com desenhos eram capazes de ir lá. Mas já viste o que é fazer dez filas? (Tarefa 2 da Parte I)

Daniela refere a importância que dá aos desenhos e às tabelas. Carla e Eva também referem que o facto de recentemente promoverem tarefas onde é necessário recorrer a tabelas tem feito com que os alunos tenham uma maior tendência em utilizá-las. Eva diz, por exemplo.

> Há uma parte do programa que utiliza muito tabelas, e eles agora também começaram a utilizar… Se bem que agora tudo é tabelas (ri-se): "É para fazer uma tabela?" "Não! Têm que pensar!!! Podem fazer desenhos, tabelas, o que quiserem! É para pensar!" Agora querem fazer tabelas para tudo! (ri-se).

Eva já tinha realizado anteriormente com a sua turma a tarefa da Parte II da entrevista e descreve a forma como alguns alunos descobriram a solução, utilizando a recta numérica. Percebe-se que costuma trabalhar vários tipos de representação matemática com os seus alunos, de modo a que estes avaliem qual a que melhor se aplica à tarefa proposta.

Em face do uso de representações informais dos alunos, todas as professoras procuram promover o registo matemático formal. Como diz Eva:

> Eles também lá vão chegando e às vezes explico eu e digo "Olha se fosse eu, também fazia desta forma". Normalmente até lhes apresento o algoritmo, porque geralmente com o algoritmo é como tu chegas lá. Digo: "O que fizeram está certo, mas também se pode fazer assim."

Deste modo, as cinco professoras encorajam os alunos a usar representações informais na resolução de problemas, principalmente se sentem que eles não os conseguem resolver de outra forma. Valorizam bastante a representação em tabelas. No entanto, procuram, na medida do possível, que eles cheguem a representações matemáticas simbólicas.

Modos de trabalho com representações na sala de aula

Todas as professoras fazem referência a situações de sala de aula, em que alguns dos seus alunos as surpreendeu com resoluções fora do comum. Quando isso acontece propõem-lhes que apresentem as suas resoluções para toda a turma, oralmente, escrevendo no quadro ou construindo cartazes. O modo como exploram novas situações varia de professora para professora, mas em todas é notório o orgulho que sentem quando falam destes episódios. Eis o que conta Daniela em relação a um problema

> A maioria fez por riscos, cruzes, bolas… O Tiago fez cinco gorilas. Mentalmente, deve ter pensado, que em cada canto estavam cinco gorilas cá em cima e depois aproveitou… Fez os cantos e uniu. Depois fez 4x5=20, mas fez uma… Alguns em vez de irem contando um a um fizeram "Cinco… Portanto, se o quadrado tem quatro cantos, é cinco vezes quatro". Depois às tantas, aparecia a pergunta: "Então e se ficar um macaco… Se ficar à frente de cada um desses macacos?". Houve uns que fizeram logo o dobro. Muitos deles começaram por calcular por canto, e depois foram alargando os procedimentos. Outros calcularam logo o dobro. Outros calcularam por canto e depois multiplicaram… Portanto 10 e multiplicaram pelo número de cantos 4x10=40. Portanto, vamos fazendo gradualmente e explorando e explicando o significado das representações deles…

Todas as professoras consideram importante a discussão sobre diversas resoluções de um problema, muitas vezes baseadas em diferentes representações. Após cada tarefa, dinamizam a sistematização dos resultados obtidos no quadro. Por vezes, são as professoras que dão início à discussão, propondo uma resolução e pedindo aos alunos que participem com outro tipo de resolução; outras vezes, são os alunos que começam e, no final, resumem a informação recolhida e completam-na com representações que consideram importantes e das quais os alunos não se lembraram:

> *Ana:* "Vá, vamos resolver o problema!" "Quem é que resolveu? Quem é que fez?" "Ai eu fiz assim" "Ai eu fiz assado". E eu vou escrevendo no quadro. Gosto muito de escrever no quadro. Embora estes miúdos hoje em dia, são muito… Dispersam-se muito! Não está com atenção! Mas alguma coisa lá vai ficando! Por isso é que faço tudo no quadro, revejo oralmente…
>
> *Daniela:* É assim, os problemas geralmente têm sempre mais do que uma solução. Eu deixo que apareçam as soluções todas e depois é explicar… Eu explico as soluções no quadro. É comum, eles próprios dizerem: "Professora, eu cheguei ao mesmo resultado mas fiz de maneira diferente!". Eu própria incentivo a isso e explico.
>
> *Eva:* Claro, mas eles também lá vão chegando e às vezes explico eu e digo "Olha se fosse eu, também fazia desta forma". Normalmente até lhes apresento o algoritmo, porque geralmente com o algoritmo é como tu chegas lá. Digo: "O que fizeram está certo, mas também se pode fazer assim."

As características de participação dos alunos também variam de professora para professora. Por exemplo, Ana, Beatriz e Carla referem que quando consideram a tarefa demasiado difícil, exemplificam a sua resolução no quadro e pedem aos alunos para comentar. Por sua vez, durante o trabalho de grupo, Eva solicita aos alunos que construam cartazes, para apresentar à turma, e promove a discussão dos resultados. Considera que os alunos podem conseguir explicar-se melhor aos colegas.

> Sim, e às vezes usam umas palavras que eu fico assim “Eh lá, o que é que queres dizer com isso?” (ri-se) Ou às vezes nós usamos uma linguagem demasiado complicada, e eles a explicar, explicam melhor aos outros…

Assim, todas as professoras consideram fundamental o papel mediador que assumem na discussão final, definindo quais as representações correctas e incorrectas e as que já foram referidas e que não devem ser repetidas; fazendo referência aos aspectos mais importantes e sistematizando o que foi dito para que todos os alunos compreendam o que foi feito. O protagonismo relativo dos alunos e da professora é que parece variar de caso para caso.

As professoras perante as actuais orientações curriculares

Apesar de não estar previsto no guião da entrevista, as cinco professoras fazem muitas referências aos novos programas. Todas sentem dificuldades na sua aplicação e algumas indicam que não se sentem confortáveis em trabalhar com os alunos o que vem neles estabelecido. Ana e Beatriz assumem o seu descontentamento perante uma mudança que consideram grande demais.

> *Ana:* Estes programas agora… (abana a cabeça negativamente) é só cálculo mental, raciocínio… Mais não sei quê. Contas, operações, numeração romana…? Quase nada! E depois é isto tudo assim… Nós damos porque sabemos que temos que dar! É tudo assim… (…) Não, não há…(sistematização). Antigamente fazíamos as contas… Agora é só desenhos e esquemas. Raciocínio, percebes? Fazíamos as operações, os problemas… Era diferente! É muito do género das provas de aferição *percebes (encolhe os ombros).*
>
> *Beatriz:* Acho que passámos do 8 para o 80. Eles têm que saber fazer tudo. Tudo é importante. É importante eles chegarem ali e aplicarem os conhecimentos que têm, não só através dos desenhos, mas também através do cálculo. Agora os meninos têm é que chegar ao resultado! Podem nem saber fazer contas, mas o que importa é chegar ao resultado!! O resultado está lá! O raciocínio está lá e agora é só o que interessa! Depois no dia a dia… As coisas não são assim!

Algumas professoras temem que os seus alunos não consigam acompanhar as mudanças, que, segundo elas, ocorreram de um ano para o outro. Por exemplo, Beatriz demonstra preocupação na mudança que teve que fazer na forma de sistematização das tarefas e na forma de representação dos alunos, que passou a ter que considerar correcta:

> Não, eles agora é mais com desenhos. Eles é que no fundo, escolhem como querem… Não se estabelece nada… É só raciocínio, ninguém… Eles têm é que chegar a um resultado! Agora como?!? Olha… Cada um que escolha o caminho que quer seguir! (em tom depreciativo) Desde que o resultado seja este… E esteja correcto.

Parece recear que alguns dos seus alunos, devido às suas características, não consigam passar para um nível de representação mais formal e fiquem indefinidamente “limitados” a representações icónicas.

Pelo seu lado, Ana refere-se aos termos que, segundo ela, deixaram de fazer parte do programa de Matemática:

> Os miúdos ficam a olhar se não souberem o que isso é! E isso não aparece nada!! Eles modificaram isto de uma maneira… Bem, já nem sei nada! Não sei o que eles querem fazer! Quer dizer, sei! Querem que os miúdos cada vez saibam menos!

E Ana refere que continua a dar primazia às “antigas didácticas” que valorizavam o nome dos termos, a prova real, a prova dos nove, etc.

> Fazíamos muito trabalho, muitas operações, muitas contas. Eu agora ainda mando ao quadro para fazer as continhas, os termos, porque faz muita falta! Já dei os termos todos! É essencial saber os temos: o divisor, o quociente, o resto…

Em contrapartida, Eva diz que nota mudanças na forma de raciocínio e no modo como os alunos encaram os problemas. Segundo a professora, passaram a reflectir mais e a encarar as tarefas de um modo mais lúdico, em que devem descobrir o maior número possível de diferentes soluções, para as poderem apresentar ao grupo:

> Mas é engraçado. Antigamente davas um problema e eles começavam logo: “É de mais! É de menos! Dividir! Acabavam por acertar sempre! Alguma delas tinha que ser… Mas não raciocinavam… Era só fazer a conta. Aí é que eu noto diferença. Eles já não perguntam isso (…) já pensam mais.

Daniela exprime uma opinião semelhante, considerando que os programas são mais difíceis que os anteriores, mas que os alunos acabam por se sentirem mais motivados.

Pelo seu lado, Carla refere-se assim às dificuldades sentidas pelos alunos no início do ano lectivo:

> Ah! Sim! No momento tinham, porque estes miúdos estão habituados a trabalhar outro tipo de Matemática… Esta como apela mais ao raciocínio e eles não estão muito habituados… Mas neste momento já estão mais dentro desta nova Matemática. De início foi muito difícil.

Deste modo, todas as professoras reconhecem que os novos programas implicam a valorização de novos objectivos e novas formas de trabalho. Enquanto algumas delas salientam o seu desconforto com as mudanças verificadas, outras parecem encarar as mudanças como uma oportunidade para envolver os alunos de outro modo no processo de aprendizagem.

Conclusão

Apesar das diferenças que se evidenciam entre as cinco professoras, todas elas se mostram muito empenhadas e próximas aos seus alunos. Tal como acontece nos estudos referidos por Ponte (1992), as professoras deste estudo tendem a dar um papel preponderante ao cálculo, sobretudo ao cálculo escrito. Embora sem conhecer a terminologia própria das representações matemáticas, tal como acontece com os professores do estudo de Stylianou (2010), também as professoras neste estudo mostram compreender que existem diversas representações, umas formais e outras informais. Além disso, as professoras desta investigação também referem que as representações informais são importantes, principalmente para os alunos que não conseguiriam resolver as tarefas propostas, recorrendo a representações formais. Existe igualmente uma preocupação global em mostrar aos alunos, os diferentes tipos de representações que são consideradas correctas, para que os todos consigam compreender a resolução da tarefa, ao mesmo tempo que têm conhecimento de diferentes tipos de representação.

As professoras deste estudo reconhecem o valor dos esquemas e tabelas, mas, excepto uma delas, não se mostram à vontade no uso da recta numérica. Apesar de aceitarem que os alunos usem representações informais, valorizam sobretudo as representações formais e os algoritmos. Notam-se, no entanto, algumas nuances no modo como as professoras se posicionam em relação a esta questão – algumas parecem valorizar uma variedade de modos de representar e de raciocinar, enquanto outras se focam sobretudo nas representações e algoritmos formais.

No que diz respeito aos modos de trabalho utilizados na sala de aula, todas as professoras indicam valorizar as contribuições dos alunos e os momentos de discussão, embora com diferentes níveis de protagonismo dos alunos. Embora com um discurso relativamente próximo sobre as representações, adivinha-se a existência de práticas bastante distintas na sala de aula relativamente às tarefas propostas, ao tipo de comunicação que se desenvolve e aos papéis assumidos por alunos e professores.

É notória a preocupação de todas as entrevistadas com o novo programa de Matemática. Admitindo, por vezes, dificuldades que estão a sentir, lamentam não ter tido acesso à formação contínua em Matemática. Algumas delas mostram grande receio em prejudicar os seus alunos ao abandonar o antigo programa, enquanto outras têm procurado pôr em prática as orientações do novo programa e reconhecem as vantagens a mudança. Torna-se, por isso, necessário um olhar mais directo sobre as práticas e as reflexões que sobre elas fazem as professoras. Embora não fosse intenção neste estudo investigar as atitudes dos professores do 1.º ciclo sobre o novo programa de Matemática, a disparidade de posições que se manifestou neste grupo de professoras e, sobretudo, o calor com que são assumidas, mostra a pertinência de se estudar essa questão e analisar as suas implicações na prática profissional e nas aprendizagens dos alunos.

Referências

Abrantes, P. (1986). *Porque se ensina Matemática: Perspectivas e concepções de professores e futuros professores* (Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, Universidade de Lisboa).

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Canavarro, A. P. (1994). O computador nas concepções e práticas de professores de Matemática. *Quadrante, 3*(2), 25-50.

Fidalgo, A., & Ponte, J. P. (2004). Concepções, práticas e reflexão de futuros professores do 1.º ciclo do ensino básico sobre o ensino da Matemática. *Quadrante, 13*(1), 5-29.

Guimarães, H. M. (1988). *Ensinar matemática: Concepções e práticas* (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Guimarães, H. (2003). *Concepções sobre a matemática e a actividade matemática: Um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC (disponível online)

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pp. 185-239). Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam/Taipei: Sense.

Roth, W.-M. (2005). *Doing qualitative research*. Rotterdam/Taipei: Sense.

Stylianou, D. A. (2010).Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 325-343.

Vale, I. (1997). Desempenhos e concepções de futuros professores de matemática na resolução de problemas. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho & I. Vale (Eds.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática* (pp. 1-38). Aveiro: GIRP.

Anexo - Guião da Entrevista

Parte I

1. Resolva as seguintes tarefas da forma que considera mais simples:

<u>a)</u> O João precisa comprar comida para os seus dois gatos. Na Mercearia da D. Juca há uma promoção de 12 latas a 15€, enquanto no supermercado a promoção é de 20 latas por 26 €. Qual é o local que lhe oferece um preço mais vantajoso?

<u>b)</u> Numa sala de cinema, a primeira fila tem 11 lugares. A segunda fila tem mais um lugar que a primeira, e a terceira tem mais um que a segunda, e assim por diante. Em dez filas, quantos lugares há nesta sala?

<u>c)</u> Calcula: 9 x 1/3 =

2. Imagine agora outros processos, diferentes do seu, como os alunos do 3.º ano poderiam ter resolvido cada um destes problemas.

3. Quais as principais dificuldades que os alunos sentiriam? Que questões/ dúvidas poderiam surgir nos alunos?

4. Na sua opinião, as tarefas propostas são compreensíveis para os alunos do 3.º ano? Faria alguma alteração na sua formulação?

5. Considera estas tarefas adequadas para os alunos do 3.º ano? Porquê?

6. Acha possível que todas as tarefas propostas possam ser trabalhadas com alunos do 1.º ciclo? Sugere alterações/adaptações?

7. Ponderaria propor alguma destas tarefas, tal como foram propostas, na sala de aula? Consideraria fazer alterações, para tornar as tarefas mais adequada aos seus alunos?

8. Qual a metodologia de trabalho que consideraria mais apropriada para responder a esta tarefa (trabalho individual, a pares, em pequeno grupo, em grande grupo)? Porquê?

Parte II

1. Considere a seguinte tarefa:

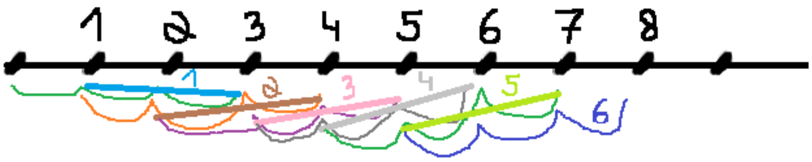
<u>a)</u> Um caracol tenta subir ao cimo de uma torre de 8m. Todos os dias sobe três metros, mas durante a noite, escorrega dois. Ao fim de quantos dias, conseguirá chegar ao cimo da torre?

1.1. Quatro alunos apresentaram resoluções diferentes. Qual a sua reacção a cada uma delas?

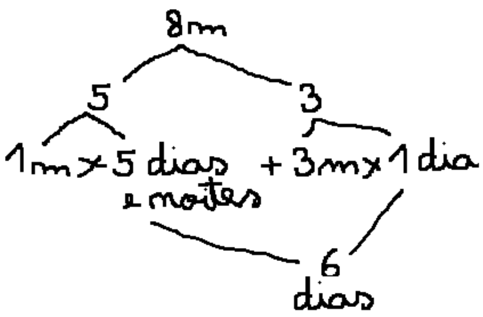
dias	dia	noite
1	3	1
2	4	2
3	5	3
4	6	4
5	7	5
6	8	—

Maria

Bianca



Carlos



Diogo

COMPENSAÇÃO E VARIAÇÃO: UM ESTUDO SOBRE O PENSAMENTO RELACIONAL DE ALUNOS DO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE[1]

Célia Mestre
Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada
celiamestre@hotmail.com

Hélia Oliveira
Instituto da Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo

Nesta comunicação apresenta-se um estudo inserido numa investigação mais ampla de implementação de uma experiência de ensino em que se pretende desenvolver o pensamento algébrico de alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade. O objectivo particular deste artigo é analisar o pensamento relacional evidenciado pelos alunos em tarefas que exploram igualdades numéricas com duas variáveis. A recolha de dados incide sobre a realização de duas tarefas em aula, tendo sido usados, como métodos, a observação participante e a análise documental das fichas de trabalho dos alunos. Conclui-se que os alunos apresentam evidências da mobilização do pensamento relacional, expressando claramente as relações numéricas presentes e as noções de compensação e variação em diferentes representações.

Palavras-chave: Early álgebra, Pensamento algébrico, Pensamento relacional, Variação.

Introdução

No âmbito da Educação Matemática em Portugal, o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), representa uma inovação curricular no que respeita ao tratamento do tema Álgebra ao considerar como um dos quatro eixos fundamentais do ensino-aprendizagem o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. Esta abordagem está em sintonia com as recentes tendências internacionais que consideram que a introdução ao pensamento algébrico deve começar nos primeiros anos, mas que este não deve constituir simplesmente um

[1] Trabalho realizado no âmbito do *Projecto PPPM - Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

tema adicional do currículo. Ao invés, deve ser entendido como uma forma de pensamento que aporta significado, profundidade e coerência à aprendizagem de outros temas. Também o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) considera a Álgebra como um *fio condutor curricular* desde os primeiros anos de escolaridade e que pode contribuir para unificar o currículo da Matemática. Assim, desde cedo, pode ser construída uma base sólida centrada, por exemplo, nos números e nas suas propriedades que cimente o trabalho posterior com os símbolos e expressões algébricas e também na experiência sistemática com padrões que poderá vir a desenvolver a compreensão da noção de função.

O trabalho de investigação em curso, no qual se integra este artigo, tem como objectivo geral compreender como se desenvolve o pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade. Em particular, este artigo tem como objectivo analisar o pensamento relacional evidenciado pelos alunos em tarefas que exploram igualdades numéricas com duas variáveis.

O pensamento algébrico e a aritmética

O pensamento algébrico pode ser encarado como um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade (Blanton & Kaput, 2005). No pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objectos, mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações, tanto quanto possível de modo geral e abstracto (Ponte, 2006).

Uma das possíveis abordagens para o desenvolvimento do pensamento algébrico baseia-se no carácter potencialmente algébrico da aritmética, ou seja, na aritmética generalizada. Isso implica a construção da generalização a partir das relações numéricas e das operações aritméticas e suas propriedades e inclui ainda a noção de equivalência associada ao sinal de igual (=). Carpenter et al. (2003) reconhecem essas ideias como o pensamento relacional, isto é, a capacidade de *olhar* para expressões ou equações na sua concepção mais ampla, revelando as relações existentes nessas expressões ou equações. Para ilustrar o que pretendem dizer com pensamento relacional, Carpenter et al. (2005) usam a igualdade numérica seguinte: 8+4=__+5. Para resolvê-la, os alunos podem adicionar 8 e 4 e depois pensar em quanto têm de adicionar a 5 para obter 12. No entanto, o processo usado, ainda que válido, não tem em conta a relação entre os números envolvidos. O aluno que apreenda a expressão no seu todo, pode considerar que 5 é mais um do que 4 e, por isso, o número a colocar no espaço será menos um do que 8, usando a seguinte relação: 8+4=(7+1)+4=7+(1+4).

A aritmética tem sido, ao longo dos tempos, o tema com maior incidência no currículo da escola elementar, no entanto, torna-se necessário reconsiderar o modo como, habitualmente, tem sido ensinada e o seu papel na formação matemática das crianças. Numa perspectiva tradicional do ensino da Matemática tem existido uma preocupação quase exclusiva com o cálculo, e, nesta perspectiva, o propósito é operacionalizar um conjunto de números a partir de um conjunto de passos para gerar um único número, que é a resposta pretendida. Numa perspectiva mais algébrica, por outro lado, o foco desloca-se para as relações numéricas. Carpenter et al. (2003), por exemplo, referem que a separação artificial entre álgebra e aritmética impede que os alunos construam formas poderosas de pensamento sobre a Matemática, nos primeiros anos, e torna mais difícil a aprendizagem da álgebra nos anos mais avançados.

Na perspectiva de Stephens (2006), o desenvolvimento do pensamento relacional depende de os alunos serem capazes de ver e usar possibilidades de variação entre os números de uma expressão numérica. Reconhecendo a importância de ser trabalhada a igualdade numa perspectiva relacional, este autor refere-se à capacidade de usar a variação numa expressão numérica como uma importante característica do pensamento relacional, argumentando que é essencial que os alunos identifiquem as direcções dessa variação e não apenas que reconheçam que ela existe.

O pensamento relacional pode ser expresso através de uma grande variedade de métodos e formas, mas que dependem sempre das ideias fundamentais de equivalência e compensação requeridas em operações particulares (Stephens, 2006). Também Irwin e Britt (2005) reconhecem que os métodos de compensação e equivalência que alguns alunos usam na resolução de expressões numéricas constituem evidências da utilização do pensamento relacional.

As explicações gerais dos estudantes sobre o porquê da veracidade da expressão numérica 78 - 49 + 49 = 78 e a sua capacidade de usar exemplos específicos daquilo que mais tarde será uma relação geral (a - b + b = a) foram descritas como o *pensamento quase – variável* (Fujii & Stephens, 2008). A expressão *quase-variável* significa um número ou conjunto de números numa expressão que revelam a relação matemática subjacente e que se manterá verdadeira independentemente dos números que sejam usados (Fujii, 2003). Desta forma, os alunos podem usar expressões numéricas generalizáveis, centrando a atenção na estrutura dessas expressões, e identificar e discutir a generalização algébrica antes da introdução da simbologia algébrica formal.

De acordo com Fujii e Stephens (2008) o trabalho em torno destas expressões numéricas pode ser visto como um tipo de *proto-álgebra* onde se procuram explorar padrões de variação que podem ser, mas não necessariamente, representados por expressões algébricas. Muitas expressões numéricas têm esse potencial, mas como esse potencial pode ser usado depende de como os alunos conseguem apreender essa possibilidade de variação.

Stephens e Wang (2008) aplicaram um questionário a alunos dos 6.º e 7.º anos de escolaridade, com o objectivo de perceber como os alunos mobilizavam o pensamento relacional na exploração de expressões numéricas. As questões do questionário envolviam a igualdade e a compensação aplicadas às quatro operações aritméticas. As questões foram categorizadas em três tipos:

> Tipo I) Expressões numéricas com um número "em falta" ou um número "desconhecido" que poderiam ser resolvidas através do cálculo ou usando o pensamento relacional:

$$43 + \square = 48 + 76, \quad 39 - 15 = 41 - \square, \quad \square \times 5 = 20 \times 15, \quad 21 \div 56 = \square \div 8$$

Figura 1. Questões do Tipo I (Stephens & Wang, 2008).

> Tipo II) Expressões envolvendo dois números desconhecidos, mas inter-relacionados:

(a) In each of the sentences below, can you put numbers in Box A and Box B to make each sentence correct?

18+ □ = 20 + □
Box A Box B

18+ □ = 20 + □
Box A Box B

18+ □ = 20 + □
Box A Box B

(b) When you make a correct sentence, what is the relationship between the numbers in Box A and Box B?

(c) If instead of 18 and 20, the first number was 226 and the second number was 231 what would be the relationship between the numbers in Box A and Box B?

(d) If you put any number in Box A, can you still make a correct sentence? Please explain your thinking clearly.

(e)What can you say about c and d in this mathematical sentence? $c + 2 = d + 10$

Figura 2. Questões do Tipo II e III (Stephens & Wang, 2008).

Tipo III) Expressões semelhantes às segundas, mas envolvendo símbolos, correspondendo à alínea c) da figura anterior: “c+2=d+10”.

Estes dois últimos tipos de questões tinham como principal objectivo mobilizar a utilização do pensamento relacional, pois embora fosse possível usar o cálculo para obter alguns exemplos particulares, a identificação da estrutura relacional da expressão exigiria a mobilização do pensamento relacional.

Os autores categorizaram as respostas dos alunos às questões de tipo II e III, concluindo que estes evidenciavam a utilização do *pensamento relacional estabelecido* quando eram capazes de: a) especificar claramente a relação entre os números das caixas A e B com claras referências ao valor numérico e à direcção da compensação aritmética; b) descrever a condição para que qualquer número possa ser usado na caixa A e manter a expressão verdadeira; c) explicar claramente como c e d estão relacionados para que a expressão do tipo III seja verdadeira, tratando c e d como números gerais.

Stephens e Wang (2008) concluem com este estudo que questões, como as descritas, que envolvem duas variáveis impulsionam os alunos para a utilização do pensamento relacional. Assinalam que os resultados demonstraram que os alunos que revelavam um pensamento relacional ainda emergente evidenciavam uma concepção limitada da noção de variável, concentrando a sua atenção em algumas características da relação numérica, mas não a apreendendo no seu todo.

Metodologia do estudo

Os resultados apresentados nesta comunicação inserem-se num estudo mais amplo, de tipo interpretativo, ainda em fase inicial, assente na implementação de uma experiência de ensino, onde se pretendem explorar tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Este artigo foca-se na exploração de duas tarefas específicas, envolvendo igualdades numéricas com duas variáveis e procura analisar o pensamento relacional evidenciado pelos alunos na resolução dessas tarefas. Para recolha dos dados foram gravadas em formato vídeo as duas aulas em que os alunos realizaram as duas tarefas e analisados os momentos de discussão colectiva. Também foram usadas para análise as fichas de trabalho dos alunos. Estas duas aulas foram dinamizadas pela investigadora deste estudo (primeira autora deste artigo) e a professora titular de turma assumiu um papel de coadjuvante, apoiando os alunos nos diferentes pares. Refira-se que a investigadora é professora de 1.º Ciclo na mesma escola da turma onde se implementa a experiência de ensino e que, anteriormente a esta investigação, já mantinha um contacto directo com a professora e os alunos, nomeadamente a partir da coordenação de projectos.

Para análise dos dados definiram-se como indicadores da utilização do pensamento relacional os seguintes: a) identificação da relação entre os números colocados nas caixas A e B, com claras referências ao valor numérico e à direcção da compensação aritmética; b) identificação da condição para que qualquer número possa ser usado nas caixas A e B, de forma a manter a igualdade; c) utilização de formas de representação que expressam a generalização da relação numérica.

A experiência de ensino

A experiência de ensino decorre durante o presente ano lectivo e as tarefas exploradas em sala de aula têm como base os temas e tópicos matemáticos da planificação anual definida pela professora titular de turma, respeitando a perspectiva de conceber o pensamento algébrico como um *fio condutor curricular* (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular. De acordo com a potencialidade de tratamento algébrico de cada um dos tópicos matemáticos da planificação anual da turma, as tarefas foram introduzidas na experiência de ensino com uma média de duas tarefas por semana e com a duração de 90 minutos cada uma. Foram realizadas, até ao momento, vinte e uma tarefas, inseridas nos tópicos "múltiplos e divisores" e "operações com números naturais", de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007).

A turma onde decorre a experiência de ensino é constituída por 19 alunos, 7 raparigas e 12 rapazes, com uma média de nove anos de idade. Embora a turma estivesse a trabalhar de acordo com o PMEB (Ponte et al., 2007) desde o 3.º ano de escolaridade, no início da experiência de ensino os alunos revelavam algumas dificuldades na exploração de questões que envolviam o sentido de número, privilegiando quase exclusivamente a utilização dos algoritmos na resolução das tarefas. Esse facto era expresso inclusivamente quando os alunos comunicavam os seus raciocínios, referindo que colocavam os números "em cima" e "em baixo", ilustrando o procedimento que efectuam quando resolvem o algoritmo. Também a exploração de relações numéricas denotava algumas fragilidades por parte dos alunos. Refira-se, como exemplo, o início da exploração de sequências numéricas, onde os alunos ficaram muito surpreendidos com a expressão 11x3, argumentando que " a *tabuada do três* terminava no 10x3".

As tarefas exploradas na experiência de ensino centraram-se na exploração das relações numéricas e das propriedades das operações, numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, e tendo em conta os tópicos matemáticos, como já foi referido. A exploração destas tarefas tinha como objectivos a identificação de regularidades e expressão da generalização através da linguagem natural, e a iniciação de um percurso em direcção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática. A utilização de alguma simbologia informal começou a ser introduzida, em particular, em quatro tarefas (10ª, 12ª, 14ª e 17ª), como se descreve em seguida.

Na décima tarefa, "Salas de cinema" era pedido aos alunos que descobrissem de quantas formas seria possível arrumar uma sala de cinema com cem cadeiras, tendo cada fila o mesmo número de cadeiras. Na parte final da exploração dessa tarefa, foi proposto pela professora a utilização do símbolo "?" para expressar "qual o número" em expressões como "?x5=100".

A décima segunda tarefa, "Calcular usando o dobro", explorava uma estratégia de cálculo em que se usava a tabuada do 4 para calcular produtos da tabuada do 8, a partir de expressões numéricas como 6x8=2x6x4 e 12x8=2x12x4. Ao generalizar essa estratégia, os alunos expressaram em linguagem natural o seguinte: “Para descobrirmos a tabuada do oito fazemos o dobro da tabuada do quatro”. Quando lhes foi pedido para traduzirem esta frase em linguagem matemática, os alunos propuseram “?x8=2x?x4”. O símbolo “?” aqui apresentado traduzia para os alunos a expressão “qualquer número”.

A décima quarta tarefa, “A estratégia do Afonso”, explorou a relação entre as tabuadas do cinco e do dez a partir da seguinte expressão numérica “36x5=360:2”. Traduziu-se em linguagem natural em: “Para descobrirmos a tabuada do cinco fazemos metade da tabuada do dez”. Os alunos traduziram essa generalização para linguagem matemática do seguinte modo:

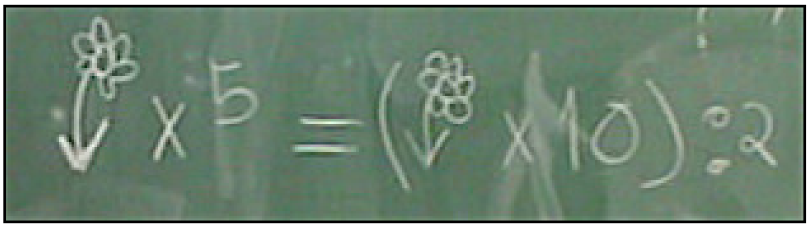


Figura 3. Representação simbólica da generalização apresentada pelos alunos.

A décima sétima tarefa, “A estratégia da Marta”, explorou a expressão numérica “18x9=180-18” e foi traduzida em linguagem natural e em linguagem matemática como nas tarefas descritas anteriormente.

A utilização de simbologia como o ponto de interrogação e a flor apresentada pelos alunos, surgiu sempre no contexto específico da tarefa e para expressar matematicamente aquilo que tinha sido dito em linguagem natural. Para os alunos, nestas três últimas tarefas descritas, o significado destes símbolos relacionava-se com a utilização de um mesmo número (“qualquer número”) em cada um dos lados da igualdade para manter a sua veracidade.

As tarefas que estiveram na base do estudo que aqui se apresenta (20ª e 21ª) são as primeiras em que os alunos são confrontados com a situação de dois números desconhecidos inter-relacionados numa igualdade.

Apresentação dos resultados

Em seguida, apresenta-se a exploração das duas tarefas em discussão neste artigo: "Os cromos da Ana e do Bruno" e "Descobre A e B", inspiradas na questão do tipo II apresentada no estudo de Stephens e Wang (2008). Na primeira tarefa considerou-se importante criar um contexto de modelação ancorado na realidade, de forma a dar sentido aos conceitos mais abstractos apresentados (Tabach & Friedlander, 2008). As duas tarefas foram resolvidas pelos alunos em pares e tiveram momentos de discussão colectiva na turma. Para análise da exploração das tarefas apresentam-se alguns trabalhos dos alunos e excertos significativos das discussões colectivas.

Tarefa "Os cromos da Ana e do Bruno"

"Os cromos da Ana e do Bruno"

A Ana e o Bruno estão a fazer uma colecção de cromos. No domingo passado, a avó ofereceu a cada um deles a mesma quantidade de cromos para colarem nas suas cadernetas. A Ana colou 18 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa A. O Bruno colou 20 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa B.

Podemos representar **a quantidade de cromos que a Ana tem**, da seguinte forma:

18+ Ⓐ

Número de cromos colados na caderneta — cromos guardados na caixa A

Podemos representar **a quantidade de cromos que o Bruno tem**, da seguinte forma:

20+ Ⓑ

Número de cromos colados na caderneta — cromos guardados na caixa B

Como os dois meninos têm o mesmo número total de cromos, podemos construir a seguinte igualdade:

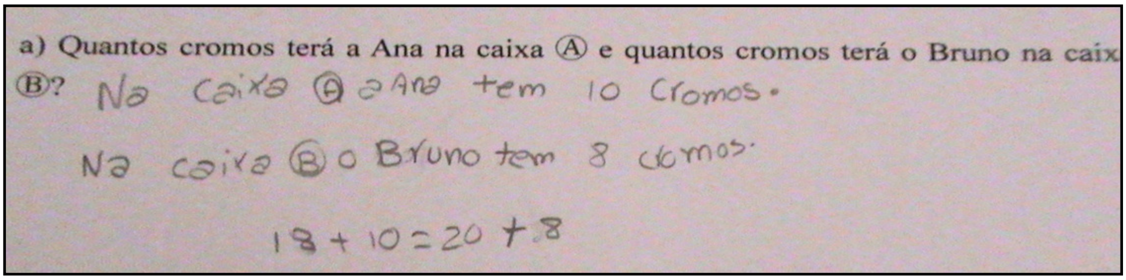
$$18 + Ⓐ = 20 + Ⓑ$$

a) Quantos cromos terá a Ana na caixa Ⓐ e quantos cromos terá o Bruno na caixa Ⓑ?

Figura 4. Enunciado da tarefa "Os cromos da Ana e do Bruno", primeira parte.

Na apresentação da tarefa considerou-se importante começar por trabalhar o contexto, interpretando o enunciado em conjunto com os alunos. Foi projectado um acetato com o enunciado da tarefa e procurou-se clarificar aspectos como o que representavam os números 18 e 20, a simbologia usada para as caixas A e B e que os alunos atendessem à igualdade verificando que os meninos, Ana e Bruno, tinham a mesma quantidade de cromos.

Para responder à primeira questão da tarefa os alunos atribuíram valores às caixas A e B. Nessa resposta, três dos oito pares reconheceram a comutatividade da adição e usaram apenas os números presentes no enunciado, 18 e 20, para manter a igualdade, ficando 18+20=20+18. Os restantes pares usaram outros números, como mostra o exemplo, onde se observa a escrita da igualdade envolvida:



a) Quantos cromos terá a Ana na caixa Ⓐ e quantos cromos terá o Bruno na caix

Ⓑ? Na caixa Ⓐ a Ana tem 10 cromos.

Na caixa Ⓑ o Bruno tem 8 cromos.

18 + 10 = 20 + 8

Figura 5. Resolução da alínea a) feita pelo par Joana e Gonçalo.

Em seguida, foi distribuída a segunda parte da tarefa, onde na alínea b) era pedido aos alunos que usassem outros valores para A e B mantendo a igualdade. Todos os alunos resolveram essa questão sem dificuldade, apresentando mais do que um par de valores que mantinham a igualdade.

b) Descobre se existem outros valores para o número de cromos das caixas Ⓐ e Ⓑ, de modo a que o número total de cromos dos dois meninos continue a ser igual.

18+ Ⓐ = 20 + Ⓑ

c) Que relação existe entre os números que usaste para as caixas Ⓐ e Ⓑ?

Figura 6. Enunciado da tarefa “Os cromos da Ana e do Bruno”, segunda parte.

A alínea c) teve respostas diferentes por parte dos pares. Cinco pares conseguiram mostrar de forma muito clara a relação entre as caixas A e B com referências explícitas da compensação usada. Um par expressou essa relação, mas com pouca clareza na linguagem e dois pares não identificaram correctamente a relação, embora na alínea anterior tivessem respondido correctamente. No exemplo que se apresenta em seguida, os alunos mostraram que reconheciam a relação numérica empregue na igualdade, incluindo o valor numérico e a direcção da compensação aritmética. Reconheceram e explicitaram ainda que a relação existente entre os valores atribuídos às caixas A e B estava dependente da relação entre os valores iniciais 20 e 18.

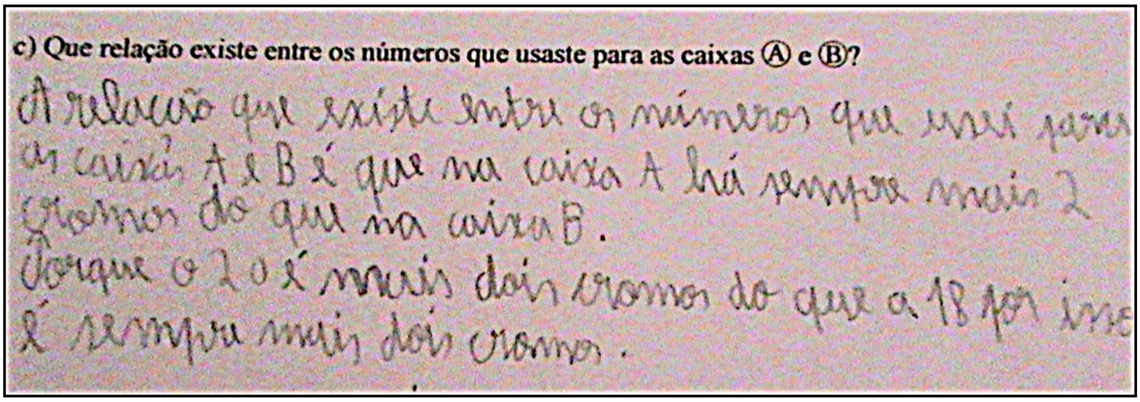


Figura 7. Resolução da alínea c) feita pelo par Henrique e Rita.

Na discussão colectiva referente à alínea c), Gonçalo escreve no quadro: “A relação que existe entre os números que usei para as caixas A e B é que a B tem sempre menos dois cromos do que a A”. Neste momento, Fábio acrescentou que a relação entre os números relativos às caixas A e B poderia ser escrita em linguagem matemática. Quando lhe é pedido para escrever no quadro aquilo a que se referia, o aluno apresenta a seguinte expressão:

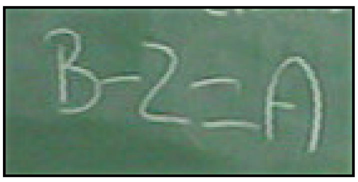


Figura 8. Representação do valor de A apresentada pelo Fábio.

Para facilitar a discussão da expressão apresentada pelo Fábio, a professora[2] propôs a construção de uma tabela no quadro, com possíveis pares de valores para A e B. A professora foi registando, na tabela, os valores que os alunos iam sugerindo:

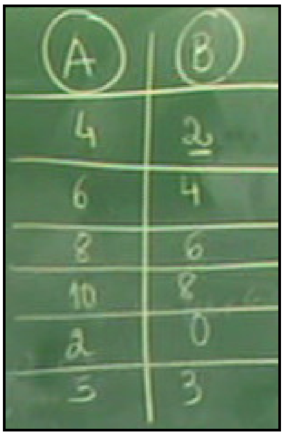


Figura 9. Tabela explorada durante a discussão colectiva.

Em seguida, retomou-se o que Fábio tinha referido relativamente à representação do valor de A e Rita sugeriu que a forma correcta deveria ser A=B+2. Essa representação foi escrita no quadro e foram experimentados alguns valores da tabela para confirmar se estava correcta:

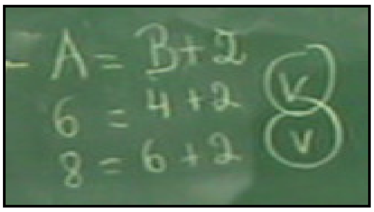


Figura 10. Representação de A durante a discussão colectiva.

Neste momento, a relação entre os números colocados em cada uma das caixas parecia estar compreendida por todos os alunos, reconhecendo o valor e a direcção da compensação aritmética usada. No entanto, importava perceber se eles reconheciam a dependência dessas variáveis com os valores usados na expressão numérica. O excerto que se segue mostra o momento da discussão colectiva em que esta questão foi explorada:

[2] Nesta comunicação, a referência “professora” diz respeito à professora/investigadora.

Rita: (...) a relação que existia entre os números que usei para as caixas A e B é que na caixa A há sempre mais dois cromos do que na caixa B. Porque o 20 é mais 2 cromos do que o 18, por isso é sempre mais dois cromos.

Professora: (...) porquê o "mais dois"? Porque é que a caixa A tem sempre mais dois do que a caixa B?

Gonçalo: Porque a diferença é de dois.

Professora: E porque é que a caixa B tem sempre menos dois do que a caixa A?

Rita: Ali no dezoito mais A e vinte mais B, o 18 é menos dois do que o 20.

No momento de sistematização, a professora explicita a relação entre os números usados na igualdade. A partir do esquema que se apresenta na figura seguinte, são evidenciados o valor numérico e a direcção da compensação, assim como a sua dependência dos valores 18 e 20:

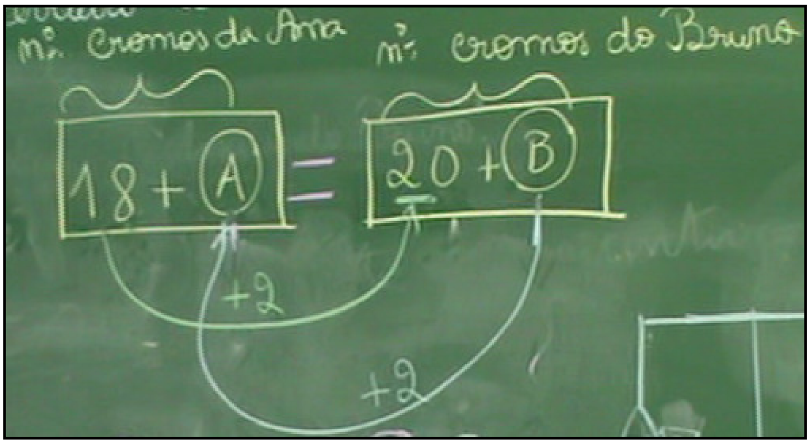
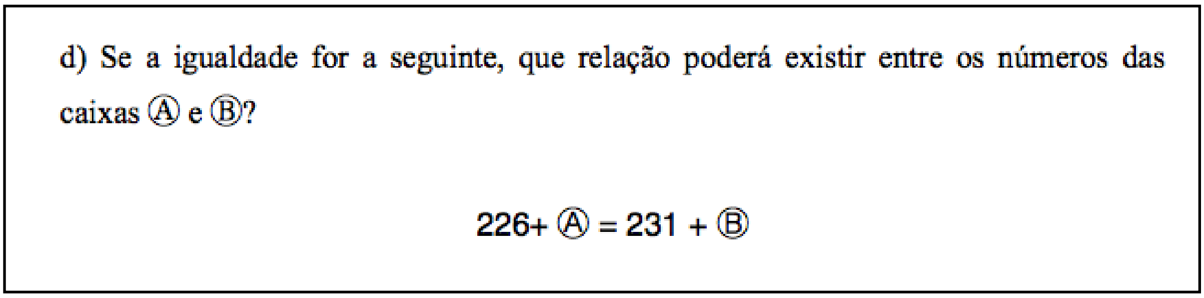


Figura 11. Representação das relações da igualdade durante a discussão colectiva.

Também foi usado o *modelo da balança* para ilustrar como a relação de igualdade poderia ser vista como uma relação de equilíbrio. Foram atribuídos valores a cada prato da balança, usando o contexto das medidas de massa com diversas possibilidades para manter a balança em equilíbrio. Depois, foi transposto para a balança o contexto da tarefa e experimentadas diversas possibilidades daquela compensação aritmética.

Em seguida, é distribuída a terceira e última parte da tarefa. Nesta questão pretendia-se que os alunos reconhecessem a relação entre A e B, mas com um valor numérico diferente na compensação.

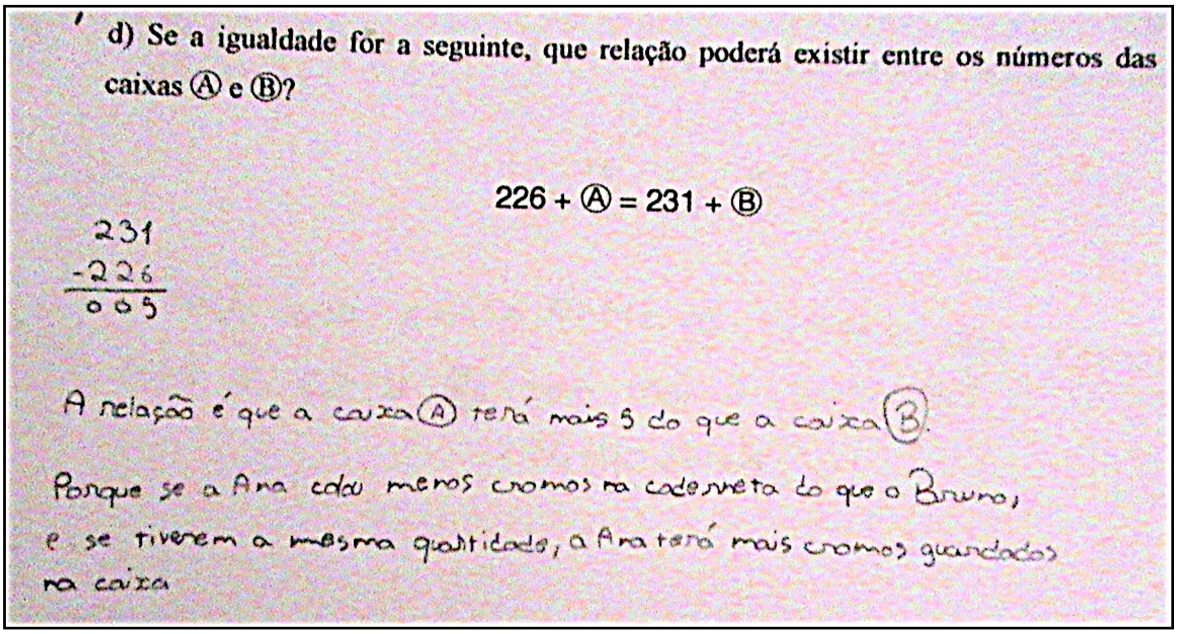


d) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas Ⓐ e Ⓑ?

$$226 + Ⓐ = 231 + Ⓑ$$

Figura 12. Enunciado da tarefa “Os cromos da Ana e do Bruno”, terceira parte.

Decorridos cerca de dez minutos já todos os alunos tinham completado esta parte da tarefa. A maior parte dos pares conseguiu identificar de forma explícita e clara a relação entre os números das caixas A e B nesta nova igualdade:



d) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas Ⓐ e Ⓑ?

$$226 + Ⓐ = 231 + Ⓑ$$

$$\begin{array}{r} 231 \\ -226 \\ \hline 005 \end{array}$$

A relação é que a caixa A terá mais 5 do que a caixa B.

Porque se a Ana cola menos cromos na caderneta do que o Bruno, e se tiverem a mesma quantidade, a Ana terá mais cromos guardados na caixa

Figura 13. Resolução da alínea d) feita pelo par Matilde e André.

Um dos pares conseguiu ainda representar correctamente, através de uma expressão, o valor de A em relação a B:

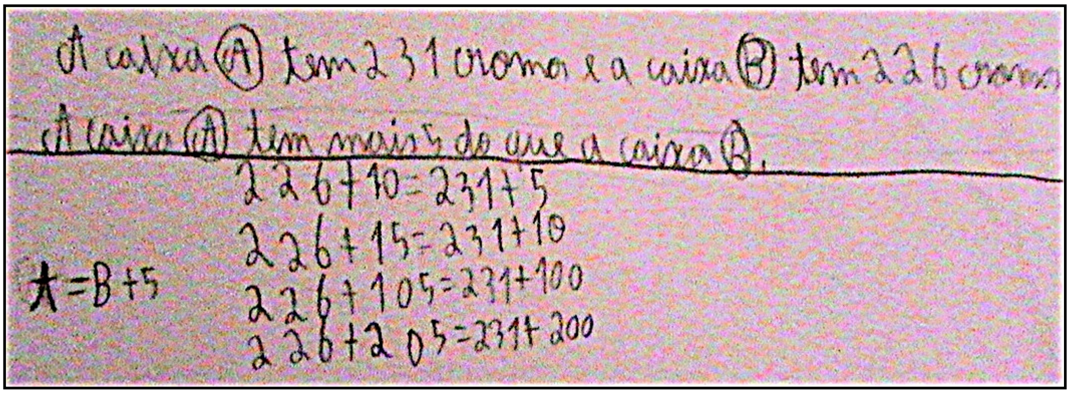


Figura 14. Resolução da alínea d) feita pelo par Henrique e Rita.

Analisando esta primeira aula, pode perceber-se que os alunos começam a dar evidências da utilização do pensamento relacional quando explicam a relação entre os números da caixa A e B. A partir da utilização de diferentes números possíveis para cada uma das caixas, os alunos *descobrem a regra*, ou seja, a estrutura daquela igualdade numérica e conseguem explicitar de forma clara essa relação para qualquer número colocado na caixa A e na caixa B: "na caixa A há sempre mais dois cromos do que na caixa B". Os exemplos anteriormente analisados evidenciam que a professora sugeriu diferentes representações para expressar as relações existentes, a que os alunos foram correspondendo bem, embora ainda com algumas limitações.

Tarefa “Descobre A e B”

“Descobre Ⓐ e Ⓑ”

1. Observa a seguinte igualdade:

$$6\times Ⓐ = 12 \times Ⓑ$$

a) Coloca números nas caixas Ⓐ e Ⓑ de modo a teres três afirmações verdadeiras.

$$6\times Ⓐ = 12 \times Ⓑ$$

Ⓐ =

Ⓑ =

$$6\times Ⓐ = 12 \times Ⓑ$$

Ⓐ =

Ⓑ =

$$6\times Ⓐ = 12 \times Ⓑ$$

Ⓐ =

Ⓑ =

b) Que relação existe entre os números que colocaste nas caixas Ⓐ e Ⓑ?

Figura 15. Enunciado da tarefa “Descobre A e B”, primeira parte.

Esta tarefa é, em continuidade com a primeira, igualmente adaptada de Stephens (2008) e foi aplicada sem contexto de modelação. Apresenta também uma situação de compensação aritmética, mas envolvendo agora as operações multiplicação e divisão. Pretendia-se que, numa primeira alínea, os alunos atribuíssem valores a A e B mantendo a igualdade e, na segunda alínea, identificassem a relação entre esses valores.

Analisando as resoluções dos alunos pode referir-se que oito dos nove pares conseguiram identificar a relação entre os números das caixas A e B de forma bastante clara, como mostra o exemplo seguinte:

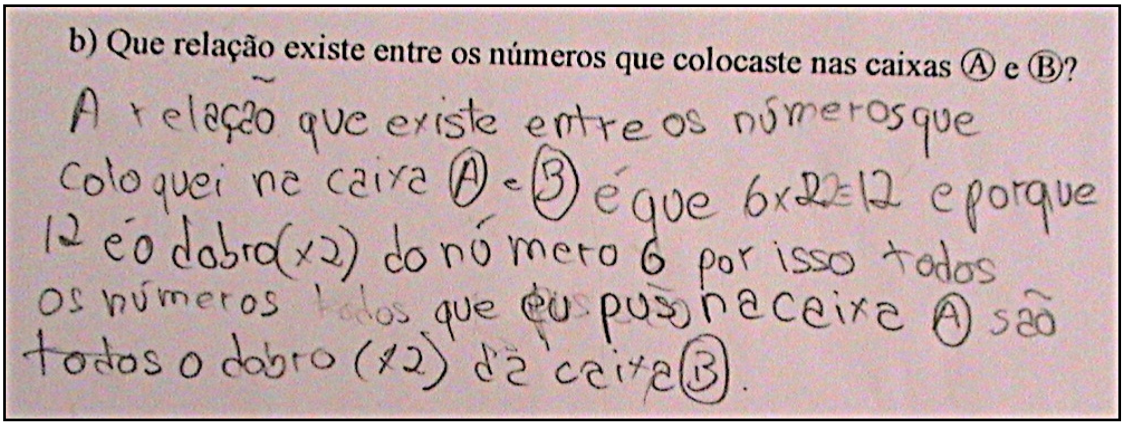


Figura 16. Resolução da alínea b) feita pelo par João e Lawry.

O exemplo seguinte mostra a resolução de um par que consegue representar simbolicamente, através de duas expressões diferentes, a relação entre os valores de A e B (como dobro e como metade). Os alunos apresentam ainda uma tabela evidenciando o reconhecimento de A e B como variáveis e um sentido de co-variação. No entanto, possivelmente sugestionados pela natureza aditiva da compensação presente na tarefa anterior, concretizam erradamente o terceiro par de valores, assumindo que "a diferença é de 2".

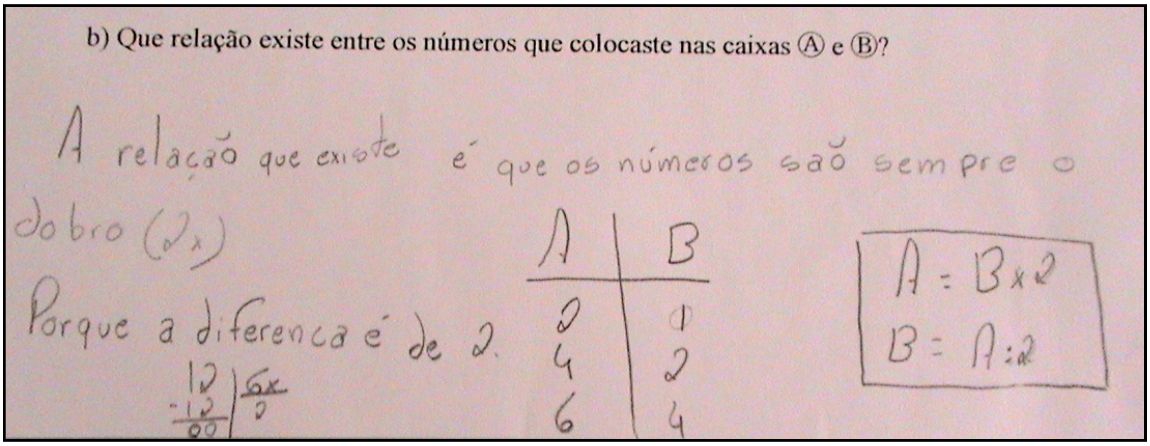


Figura 17. Resolução da alínea b) feita pelo par António e Fábio.

Na discussão colectiva, os alunos da turma apresentaram, sem dificuldade, a relação entre os números da caixa A e da caixa B e vice-versa. Relacionando os números da igualdade, uma das alunas representa esquematicamente as relações numéricas envolvidas nesta tarefa.

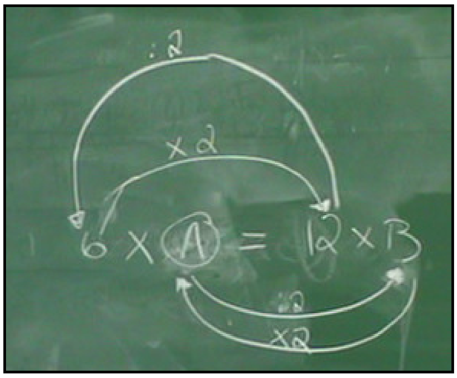


Figura 18. Representação das relações na igualdade, feita pela Rita.

Ainda na discussão colectiva surgem afirmações dos alunos que mostram como conseguiram, para além de apreenderem a relação numérica entre os valores desconhecidos, chegar a uma generalização dos valores que satisfazem a igualdade presente e identificar o conceito de variável. Os excertos seguintes são exemplo disso:

> *João*: ... A caixa A vai ser sempre o dobro da caixa B. Os números da caixa A vão ser sempre o dobro do que está na caixa B.
>
> *Matilde*: A caixa A pode ser um número qualquer, mas tem de ser sempre o dobro da caixa B.

Tendo em conta o trabalho realizado com as expressões simbólicas na tarefa anterior, a professora solicita ainda uma forma de escrever A e B. Matilde vai ao quadro e escreve correctamente:

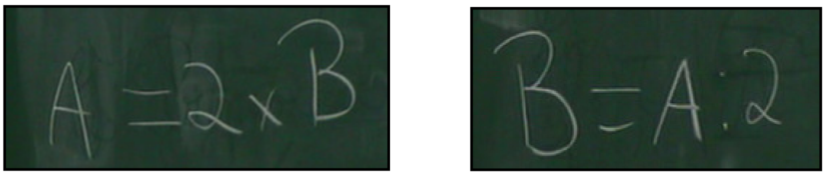


Figura 19. Representação do valor de A e de B, feita pela Matilde.

Por último, os alunos resolvem a segunda parte da tarefa que envolve também as operações multiplicação e divisão, mas que apresenta as relações mais complexas de triplo e terça parte.

"II - Descobre Ⓐ e Ⓑ"

c) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas Ⓐ e Ⓑ?

$$15 \times Ⓐ = 5 \times Ⓑ$$

Figura 20. Enunciado da tarefa "Descobre A e B", segunda parte.

Perante esta questão, todos os pares conseguiram expressar a relação entre os valores de A e B de forma mais ou menos explícita, usando, pelo menos, uma representação correcta. Nenhum dos pares usou apenas uma forma de representação, completando a explicitação da relação em linguagem natural com outra forma de representação, como a tabela ou o diagrama de setas. Por exemplo, na resolução do par que a seguir se apresenta observa-se a dupla utilização de uma tabela estruturada e uma *proto-tabela* constituída por duas colunas, embora em ambos os casos apenas com dois pares de valores. Os alunos conseguem expressar, em linguagem natural, de forma clara, a relação entre os valores atribuídos às caixas A e B.

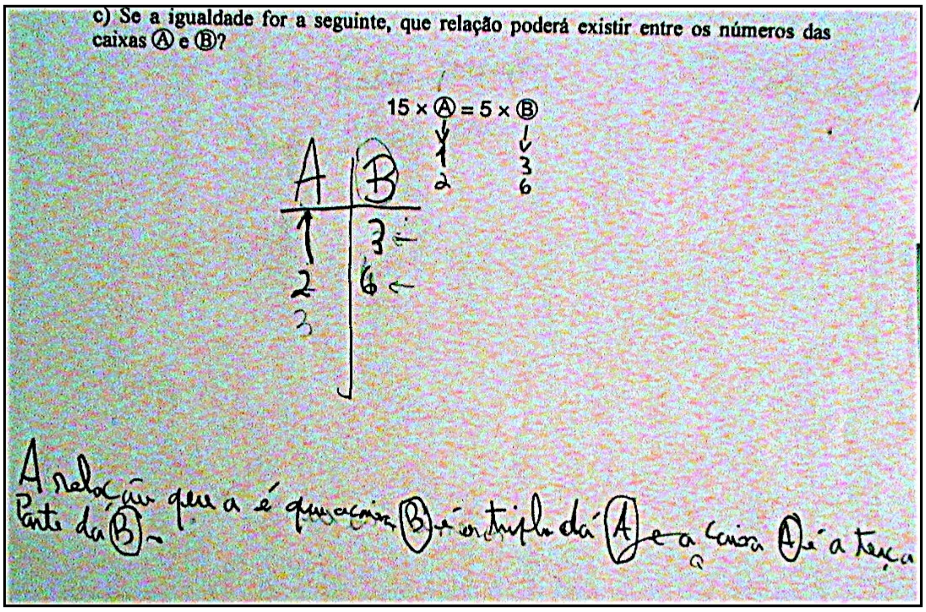


Figura 21. Resolução da alínea c) feita pelo par João e Marco.

Um outro par utiliza diferentes formas de expressar a relação entre os números das caixas A e B. O diagrama com setas tem explícito o tipo de relações entre os valores A e

B e também a relação de dependência com o 15 e o 5. Recorre ainda à representação da balança para ilustrar um exemplo daquela igualdade.

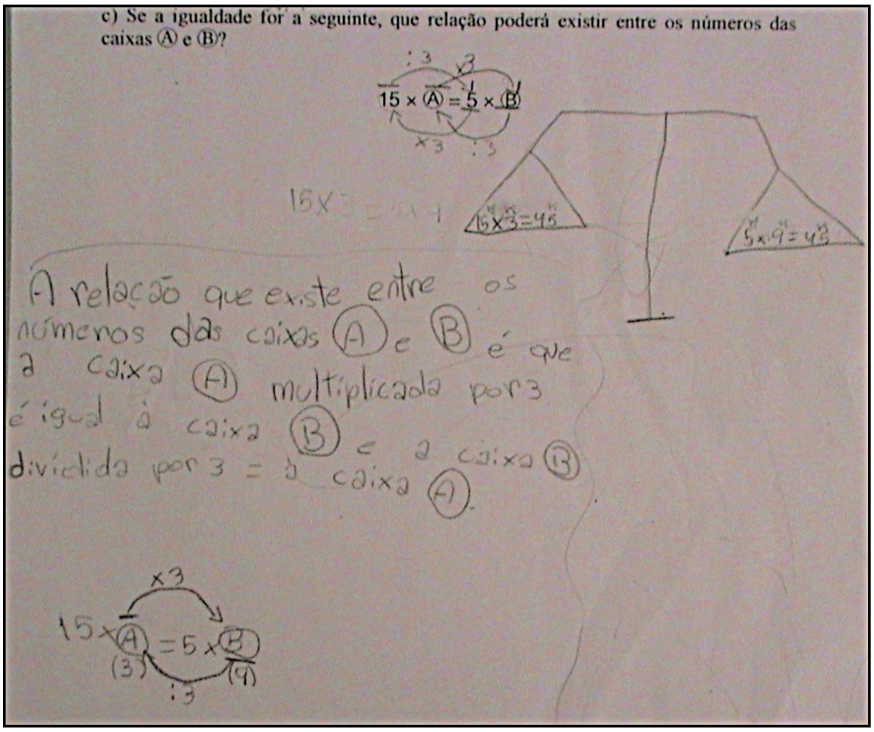


Figura 22. Resolução da alínea c) feita pelo par Gonçalo e Joana.

No momento da discussão colectiva verifica-se que a generalidade dos alunos não só compreendeu as relações numéricas em causa nesta questão, como conseguem expressá-las em linguagem simbólica através de uma expressão matemática. Essa compreensão é manifesta quando os alunos reagem a uma resolução apresentada pelo par Fábio e António. António vai ao quadro e expressa correctamente as relações numéricas presentes através da linguagem natural:

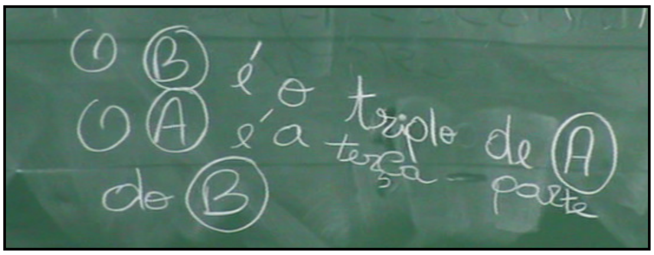


Figura 23. Representação da relação entre A e B, apresentada pelo António.

No entanto, quando, em seguida, António apresenta simbolicamente os valores de A e B, escreve incorrectamente B = A : 5 e A = B x 5. Os colegas reagem, de imediato, e o par de alunos admite que se tinha enganado e substitui o cinco pelo três:

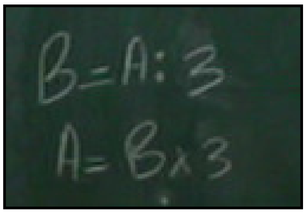


Figura 24. Representação dos valores de A e B, apresentada pelo António.

Os colegas mantêm-se atentos às expressões que foram registadas pelo António. Uma das alunas consegue identificar o erro dos colegas, corrigindo-o :

> *Rita*: Aqui, como eles estão a dizer (apontando para o que os colegas escreveram em linguagem natural)... O B é o triplo... Aqui era o vezes (apontando para a expressão B = A : 3, escrita pelo António) do A.
>
> (...)
>
> *Rita*: Porque eles disseram que o B é a terça parte do A.

E representa correctamente as duas expressões:

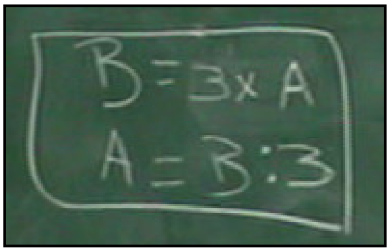


Figura 25. Representação dos valores de A e B, feita pela Rita.

Quando a professora questiona os alunos sobre o porquê de isso acontecer, Rita refere que “cinco vezes três é quinze e quinze a dividir por três é cinco”. Matilde acrescenta ainda que “B podia ser um número qualquer, mas tinha que ser o triplo do A”, expressando a generalização da relação trabalhada.

Nesta segunda tarefa, aplicada sem contexto de modelação, os alunos conseguem também expressar a relação entre os números da caixa A e da B, de forma clara e evidenciando a utilização do pensamento relacional. Na comparação desta tarefa para a primeira percebe-se uma evolução nas formas de representação que os alunos usam agora, nesta tarefa, com maior variedade. A escrita simbólica das relações entre os números das caixas A e de B é mais facilmente conseguida na primeira parte desta tarefa, que envolvia a relação de dobro e metade. Na parte da tarefa que envolvia uma relação de triplo e terça parte, o aluno que tinha tido a iniciativa de experimentar usar esta representação na primeira tarefa troca as relações e apresenta o contrário do que tinha expressado com as outras representações. Esta situação foi discutida na turma e corrigida de forma a expressar a relação correcta. Este episódio demonstra como os alunos estão, ainda, numa fase inicial neste processo e a apropriar-se do significado na escrita simbólica.

Considerações finais e conclusões

Tendo em conta os dados apresentados, procuramos agora analisar o pensamento relacional que os alunos do 4.º ano evidenciaram ao explorarem igualdades numéricas com duas variáveis, usando como referência os indicadores referidos.

Ainda que numa fase inicial, o trabalho desenvolvido pelos alunos manifesta algumas evidências da utilização do pensamento relacional, tais como, a identificação clara da relação existente entre os números colocados nas caixas A e B, referindo os valores e a direcção da compensação aritmética; a descrição da condição para que qualquer número pudesse ser usado nas caixas A e B, mantendo a igualdade inicial; e, a utilização, por alguns alunos, de formas de representação que expressam a generalização da relação numérica.

O conceito de variável surge pela primeira vez e, de modo informal, a partir da exploração de duas variáveis numa igualdade. A utilização inicial de um contexto de modelação significativo na primeira tarefa, "Os cromos da Ana e do Bruno", parece ter contribuído para que os alunos atribuissem significado às variáveis A e B. Assim, para além de conseguirem usar diferentes valores para A e B, os alunos ainda conseguiram generalizar que aquela igualdade seria possível para qualquer número desde que obedecesse às relações de dependência identificadas. Possivelmente, sugestionados pela representação em forma de tabela, alguns alunos começaram a usar a noção de co-variação entre as grandezas, mas ainda de forma muito incipiente e com alguns erros decorrentes da tentativa de aplicação à segunda tarefa da estrutura aditiva presente na primeira tarefa. Esta é também uma noção ainda em estado embrionário, mas que se mostra promissora para as etapas seguintes de construção da noção de variável.

Tendo em conta as formas de representação apresentadas nas resoluções dos alunos, a exploração destas tarefas permitiu a utilização de um conjunto diversificado de representações. Os alunos usaram a linguagem natural, tabelas, diagramas de setas e conseguiram, até mesmo, apresentar de forma simbólica os valores de A em relação a B, e vice-versa. Embora este processo ainda esteja numa fase inical, pode constatar-se que os alunos começam a utilizar a linguagem simbólica para expressar matematicamente aquilo que traduzem em linguagem natural. A tentativa de um aluno de encontrar uma forma de escrever B em relação a A, na primeira tarefa, sem que isso lhe tenha sido solicitado, demonstra o reconhecimento da utilidade dessa representação e como os alunos lhe atribuiram valor e sentido. Após a sua exploração na aula, outros alunos procuraram essa forma de expressar as relações envolvidas, embora, nem sempre, a conseguissem expressar de forma correcta, o que é natural nesta fase inicial.

Para compreender melhor os resultados apresentados é importante considerar o trabalho desenvolvido até ao momento na experiência de ensino. Pela descrição, ainda que sucinta, de algumas das tarefas realizadas anteriormente, pode depreender-se a importância que teve para os alunos o trabalho desenvolvido em torno do sentido de número, nomeadamente a exploração de expressões numéricas envolvendo estratégias de cálculo, por exemplo. Essas tarefas permitiram trabalhar a generalização e simbolização a partir de expressões numéricas particulares passíveis de ser generalizadas. Este procedimento enquadra-se no conceito de *quase-variável* apresentado por Fujii (2003) e justifica a sua pertinência e utilidade para a construção do conceito de variável.

Concluíndo, pode referir-se que os alunos conseguiram mobilizar o pensamento relacional nas tarefas com igualdades numéricas com duas variáveis. A expressão clara das relações envolvidas na igualdade numérica, a identificação da variação tendo em conta o seu valor e a sua direcção e, a utilização de casos particulares para a construção da generalização são indicadores de como os alunos fizeram uso do pensamento relacional. A utilização de diversas representações para expressar as relações envolvidas na igualdade numérica também revela a apreensão de uma forma de pensar que vai para além dos procedimentos básicos da aritmética e que atende à natureza estrutural das expressões numéricas envolvidas. No entanto, temos consciência de que esta é apenas uma fase inicial de desenvolvimento do pensamento relacional por parte dos alunos. Os resultados aqui apresentados e a reflexão por eles suscitada constituem uma importante contribuição para subsequente desenvolvimento e aperfeiçoamento da experiência de ensino em curso.

Referências

Blanton, M., & Kaput, J., (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically:Integrating arithmetic & algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in the elementary school: developing relational thinking. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 37*(1), 53-59.

Fujii, T. (2003). Probing Students' Understanding of Variables through Cognitive Conflict Problems: Is the Concept of a Variable So Difficult for Students to Understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 49–65). Honolulu: PME.

Fujii, T., & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.) *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook*, (pp. 127-149). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Irwin, K., & Britt, M. (2005). The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zealand Numeracy Project. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 169-188.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Breda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME - DGIDC.

Stephens, M. (2006). Describing and exploring the power of relational thinking. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces* (pp. 479-486). Camberra: MERGA.

Stephens, M. & Wang, X. (2008). Investigating some junctures in relational thinking: a study of year 6 and year 7 students from Australia and China. *Journal of Mathematics Education, 1*(1), 28-39.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2008). The role of context in learning beginning algebra. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.) *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook*, (pp. 223-232). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

A APRENDIZAGEM DA COMPARAÇÃO E ORDENAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA[1]

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Marisa Quaresma
Escola Básica José Saramago, Poceirão, Palmela
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
marisa-quaresma@hotmail.com

Resumo

Procuramos saber em que medida uma unidade de ensino com uma abordagem de cunho exploratório, em que alunos do 5.º ano trabalham em simultâneo as várias representações dos números racionais, nos diferentes significados e com diferentes tipos de grandezas, proporciona o desenvolvimento da compreensão de número racional, em particular no que se refere à comparação e ordenação. A metodologia é qualitativa e interpretativa, com observação participante. Apresentamos dados da turma e do estudo de caso de uma aluna, recolhidos em duas entrevistas (com registos vídeo e áudio), produções escritas da aluna e testes diagnóstico e final. Os resultados mostram que a turma melhorou consideravelmente o seu desempenho nas questões envolvendo comparação e ordenação. A aluna melhorou a sua compreensão da ordenação e comparação de números racionais, mostrando-se mais proficiente tanto na representação em fracção como na representação decimal. Para comparar fracções com numeradores ou denominadores iguais usa estratégias informais. Para comparar fracções com numeradores e denominadores diferentes, usa sobretudo estratégias formais recorrendo principalmente à representação decimal. O estudo sugere que o trabalho com diferentes representações, numa abordagem exploratória, permite que os alunos aprendam a comparar e ordenar números racionais com base nas suas próprias estratégias, desde que combinem adequadamente os processos formais e informais.

Palavras-chave: Números racionais, Representações, Comparação, Ordenação, Aprendizagem.

Introdução

Munido das operações de adição e multiplicação, o conjunto dos números racionais constitui um corpo, uma importante estrutura algébrica. Uma das facetas desta estrutura

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projecto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

é a existência de uma relação de ordem total: dados dois números racionais $\frac{a}{b}$, e $\frac{c}{d}$ é sempre possível dizer qual deles é o maior ou se são iguais. A aprendizagem desta relação de ordem constitui um tópico do programa de Matemática, sendo importante para o desenvolvimento de uma compreensão aprofundada dos números racionais e para o estudo posterior dos números reais (nomeadamente dos intervalos em R). Para Behr, Harel, Post e Lesh (1992), a compreensão da ordenação e equivalência de fracções é fundamental para a "compreensão do número racional como uma entidade (isto é, um só número) e para a compreensão da grandeza do número" (p. 316).

Esta comunicação descreve o trabalho realizado no quadro de uma experiência de ensino no 5.º ano de escolaridade, sob o ponto de vista do desenvolvimento da capacidade dos alunos de compararem e ordenarem números racionais. O nosso objectivo é saber em que medida uma unidade de ensino em que os alunos trabalham em simultâneo as várias representações dos números racionais, nos diferentes significados, com diferentes tipos de grandezas e em tarefas sobretudo de cunho exploratório proporciona um efectivo desenvolvimento da compreensão de número racional, em particular no que se refere à comparação e ordenação.

Começamos por passar brevemente em revista as investigações realizadas sobre a comparação e ordenação de números racionais, após o que apresentamos a unidade de ensino e a metodologia de investigação. De seguida, apresentamos os resultados globais obtidos por toda a turma, bem como o desempenho de uma aluna antes da unidade e já depois desta terminada, procurando, por fim, discutir as implicações deste estudo.

Estudos sobre a comparação e ordenação de números racionais

Os estudos realizados pelo *Rational Number Project* marcam de forma decisiva o conhecimento sobre a aprendizagem dos números racionais e ainda hoje são uma referência importante, em particular no que se refere à sua comparação e ordenação. Como referem Post, Behr e Lesh (1986), antes de aprenderem os números racionais os alunos já conhecem os números naturais, havendo, uma influência desse conhecimento no modo como começam a pensar a ordenação dos números racionais. Por vezes essa influência é persistente, afectando negativamente a sua capacidade de compreenderem a relação de ordem dos números racionais.

No conjunto dos números naturais, os alunos podem pensar de duas maneiras diferentes, valorizando o aspecto cardinal do número (comparando a "grandeza" de dois números pela correspondência com elementos de dois conjuntos finitos que os representam) ou salientando o aspecto ordinal (considerando maior o número que vem depois na sequência de contagem,). Em contrapartida, não existe uma relação ordinal óbvia que permita ordenar os números racionais de forma simples. A observação de casos particulares como $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ sugere uma possível relação de ordem dada pela ordenação dos denominadores. No entanto, no caso geral, prestando atenção apenas aos denominadores (ou aos numeradores) não é possível comparar correctamente números racionais. De facto são necessárias diferentes estratégias para ordenar, por exemplo, $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{4}$ ou $\frac{3}{9}$ e $\frac{4}{9}$, ou $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{7}$. Como indicam Post et al. (1986), é necessário que os alunos compreendam que é a relação entre o numerador e o denominador que define o significado de uma fracção, e não as respectivas grandezas absolutas quando vistas de forma independente. Assim, $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{4}{9}$, embora os dígitos que surgem em $\frac{1}{2}$ sejam menores do que os seus correspondentes em $\frac{4}{9}$. Os autores indicam que é necessário ajudar os alunos a colmatar a lacuna conceptual entre as estruturas aditivas e multiplicativas pois, alguns reflexos das suas concepções sobre os números naturais baseados nas estruturas aditivas podem perturbar o desenvolvimento das estruturas multiplicativas.

Post et al. (1986) apontam também que a noção quantitativa de número racional dos alunos deve incluir a compreensão de que os números racionais têm grandezas relativas e absolutas, e que podem ser entendidos tanto no sentido absoluto como no sentido relativo. Assim, a grandeza relativa de um par de quantidades representadas por números racionais pode ser avaliada apenas quando relacionadas com a unidade de que deriva o seu significado. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ de uma pequena torta pode ter menos quantidade de torta que $\frac{1}{3}$ de uma torta grande. Enquanto isso, uma ordenação de valores absolutos existe dentro de um conjunto de números racionais relacionados com uma unidade comum. Por exemplo, $\frac{1}{3}$ é sempre inferior a $\frac{1}{2}$, se ambos se referem ao mesmo todo. E, como elementos do sistema matemático, $\frac{1}{3}$ é inferior a $\frac{1}{2}$, por exemplo, porque a unidade de comparação é 1. Post, Wachsmuth, Lesh e Behr (1985) referem que a ordenação de fracções exige os seguintes conhecimentos complexos: (i) a grandeza da fracção depende da relação entre os dois números naturais operada pelo símbolo de fracção; (ii) existe uma relação inversa entre o número de partes em que o todo está dividido e o "tamanho" de cada parte; e (iii) quando as fracções têm o mesmo denominador há uma relação directa entre o número de partes que se tomam e a grandeza da fracção.

As investigações de Post et al. (1986) mostraram que os alunos usam estratégias informais na resolução de tarefas de comparação de fracções. Uma delas é o *pensamento residual* que se refere à quantidade que é necessária para construir o todo. Assim, na comparação entre $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$, os alunos percebem que no primeiro caso falta $\frac{1}{6}$ para completar o todo (o valor residual) enquanto no segundo só falta $\frac{1}{8}$ e concluem então que $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$. Outra estratégia é *utilização de pontos de referência,* que envolve a comparação de duas fracções utilizando uma terceira como referência, frequentemente $\frac{1}{2}$ ou 1. Um aluno diz que $\frac{5}{8}$ é maior do que $\frac{3}{7}$, porque a primeira fracção é maior e a segunda é menor "do que a metade". Outra estratégia, ainda, é o *pensamento diferencial.* Alguns alunos afirmam que $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$ são equivalentes, porque lhes falta apenas uma parte para formar o todo. Neste caso, focam-se na diferença entre 5 e 6 e entre 7 e 8, sem considerar a grandeza real da fracção, o que é uma forma característica de pensar quando de trabalha com números naturais e conduz geralmente a resultados incorrectos.

Post et al. (1992) referem que a predominância da influência dos números naturais também se verifica na ordenação de números racionais na representação de numeral decimal. Na verdade, os alunos apresentam frequentemente dificuldade na ordenação de numerais decimais com um número diferente de casas decimais. Por exemplo, quando ordenam 0, 4 e 0,39 utilizando o seu conhecimento dos números naturais, afirmam muitas vezes que "0,39 é maior do que 0,4 porque 39 é maior do que 4". Monteiro e Pinto (2006) referem igualmente esta dificuldade dos alunos.

A estratégia usual indicada no currículo escolar para comparar duas fracções é procurar fracções equivalentes com denominadores comuns. Por exemplo, para comparar $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{18}$

pode-se encontrar fracções equivalentes às dadas com denominador 90, $\frac{36}{90}$ e $\frac{35}{90}$, verificando-se assim que $\frac{2}{5}$ é maior. Contudo, como indicam Orton, Post, Behr, Cramer, Harel e Lesh (1995), este procedimento, geralmente, não é muito significativo para os alunos do 5.º ano. Pelo seu lado, Bezuk e Cramer (1989) indicam que uma estratégia possível para comparar e ordenar números racionais é escrevê-los na representação de numeral decimal. Associada a esta representação pode também usar-se a representação na recta numérica. Note-se que, de acordo com Gravemeijer (2005), a utilização de estratégias informais ajuda a encurtar o fosso entre o conhecimento pessoal informal dos alunos e o seu conhecimento formal. Nesta perspectiva, numa abordagem que enfatiza a capacidade dos alunos passarem facilmente de uma representação para outra, esta é uma estratégia que é natural utilizar.

Metodologia

Experiência de ensino

Este trabalho tem por base uma experiência de ensino concebida a partir da conjectura geral de ensino-aprendizagem (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schaube, 2003) segundo a qual os alunos desenvolvem a sua compreensão e o seu sentido de número racional ao trabalharem simultaneamente as várias representações, nos diferentes significados, com diferentes tipos de grandezas e em tarefas de natureza diversificada (figura 1)

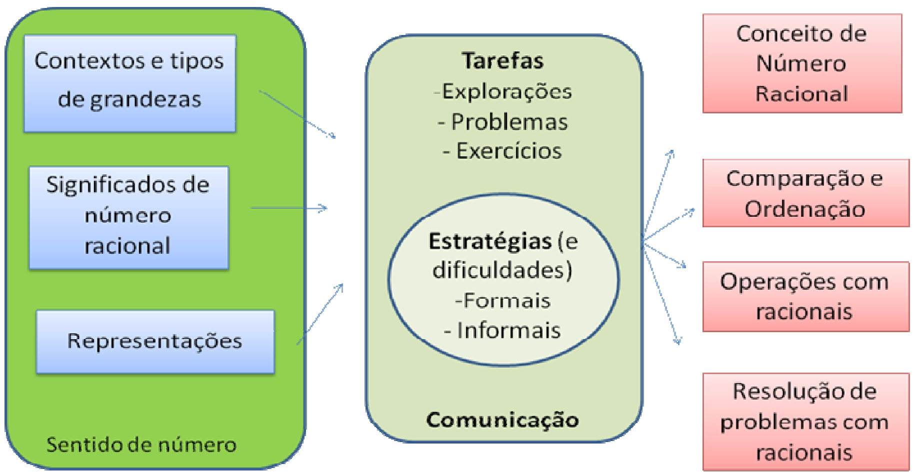


Figura 1. Quadro conceptual para o ensino-aprendizagem dos números racionais

Antes da planificação da unidade de ensino realizámos uma aula de diagnóstico de 90 minutos focada nos conhecimentos dos alunos sobre números racionais. Nesta aula foram propostas tarefas sobre a noção, ordenação e comparação de números racionais e equivalência de fracções, em diferentes representações. Os alunos ainda não tinham estudado estas noções, a não ser, eventualmente na forma decimal e no significado operador, mas, mostraram-se empenhados, esforçando-se por encontrar estratégias para resolver as tarefas. Mostraram dificuldade na linguagem própria das fracções, dizendo por exemplo "segunda parte" para se referirem a um meio, ou "terceira parte" para se referirem a um terço e evidenciaram algumas dificuldades na compreensão de números decimais. Contudo, mostraram bom desempenho na utilização de fracções unitárias como operadores, apoiando-se na ideia de divisão (o divisor é o denominador da fracção unitária). Assim, considerámos prioritário trabalhar aspectos do sistema de numeração decimal e da ordenação dos numerais decimais, como base para uma compreensão mais sólida e completa das noções a estudar.

Para além do diagnóstico, a elaboração da unidade tem em atenção o conhecimento da turma por parte da professora. Além disso, tendo por base as orientações curriculares do novo programa de Matemática (ME, 2007) e a revisão da literatura, consideramos importante: (i) enfatizar as inter-relações entre os vários significados de número racional (parte-todo, medida, quociente, operador e razão); (ii) promover a flexibilidade na conversão entre e dentro das várias representações de número racional (decimal, fracção, pictórica, percentagem e verbal); (iii) contemplar diferentes tipos de unidades e a respectiva construção; (iv) tratar a ordenação, comparação e equivalência de fracções antes das operações com fracções; e (v) reforçar as relações entre conceitos e procedimentos.

A unidade tem subjacente um percurso de ensino-aprendizagem constituído por diversas fichas de trabalho organizadas a pensar nas ideias e processos matemáticos a desenvolver pelos alunos. Começamos por introduzir as diferentes representações de número racional, evidenciando as relações existentes entre elas, bem como as respectivas conversões. De seguida, propomos tarefas na representação decimal nos diversos significados, envolvendo comparação e ordenação. Posteriormente, introduzimos fracções impróprias, numerais mistos fraccionários e percentagens, como novas formas de representação, utilizando representações pictóricas como apoio para que os alunos visualizem as transformações realizadas. Deste modo os alunos são estimulados a escolher a representação que mais se adequa ao contexto do problema ou pela qual tenham preferência. Propomos então tarefas envolvendo partilha equitativa, retomando a comparação e ordenação de números racionais estudada no 1.º ciclo na representação decimal, agora envolvendo também a representação em fracção. A comparação de fracções é introduzida começando por pares de fracções com numeradores iguais e com denominadores iguais. Pelo seu lado, a ordenação é realizada em situações envolvendo números representados em fracção, decimal e percentagem, começando por fracções simples que os alunos facilmente relacionam com as outras representações. Neste quadro, uma estratégia para comparar números racionais em diferentes representações ou dados por fracções com diferentes denominadores (e numeradores) passa por convertê-los na representação decimal. Para diversificar as estratégias de ordenação e comparação de números racionais, foi introduzida a recta numérica. Todas as tarefas propostas na unidade de ensino têm uma característica comum – usar representações e significados diferentes, para que os alunos adquiram flexibilidade nas conversões e para trabalharem de forma integrada os diversos significados de número racional. Além disso, propomos tarefas de natureza diversa, incluindo problemas, explorações e exercícios.

A realização das tarefas envolve três fases: (i) a apresentação da tarefa e o modo como os alunos a interpretam; (ii) o desenvolvimento do trabalho pelos alunos; e (iii) a discussão/reflexão final (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). A actividade realizada na sala de aula envolve diferentes formas de trabalho. Na exploração das tarefas predomina o trabalho em pares. Procura-se que os momentos de discussão colectiva constituam, oportunidades para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento (Ponte, 2005). Valorizamos as estratégias intuitivas e informais dos alunos, bem como os seus conhecimentos anteriores. Assim, privilegiamos os processos informais e as representações que eles já conhecem para a partir dai introduzir, gradualmente, novas representações formais de número racional. A introdução de novas representações não implica deixar de usar as anteriores, mas sim adquirir flexibilidade para escolher a representação mais eficaz em cada contexto ou situação problemática. Procuramos que os problemas propostos envolvam, tanto quanto possível, contextos significativos para os alunos (Gravemeijer, 2005), de modo a que possam construir novo conhecimento com significado.

Metodologia de investigação

Esta investigação tem uma natureza essencialmente qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), recorrendo também a dados quantitativos. Trata-se de uma investigação que incide sobre a prática profissional da primeira autora, que assumiu simultaneamente os papéis de professora e investigadora.

Apresentamos o caso de Leonor, uma aluna com bom desempenho em Matemática, que evidencia bom raciocínio, usa diversas estratégias na resolução de problemas e tem boa capacidade de comunicação oral e escrita. Revela também bom desempenho no cálculo mental, usando com destreza as propriedades das operações e relações entre números. A aluna é muito participativa na aula, gosta de novos desafios e mostrou-se entusiasmada com o estudo dos números racionais. Por tudo isto, é uma aluna cujo desempenho nos pareceu interessante estudar.

Foram realizadas duas entrevistas envolvendo tarefas matemáticas, uma antes e outra depois da unidade de ensino, tendo em vista conhecer a sua capacidade para lidar com o conceito de número racional, trabalhar com números racionais nas suas múltiplas representações, construir a parte, reconstruir a unidade e manipular diferentes tipos de unidade e resolver problemas envolvendo os vários significados dos números racionais. Pretendemos, também, compreender as suas estratégias e dificuldades na resolução de problemas. As entrevistas foram registadas em vídeo e áudio, sendo recolhidos e analisados os trabalhos escritos que realizou nas diversas tarefas.

A análise de dados assume um carácter descritivo e interpretativo. Procedemos à transcrição integral das gravações das entrevistas, usando na análise um sistema de categorias organizado em dois grandes temas: dificuldades e erros na utilização de várias representações de número racional (decimal, pictórica, fracção e percentagem) e estratégias e dificuldades na comparação e ordenação de números racionais.

Resultados da aprendizagem na turma

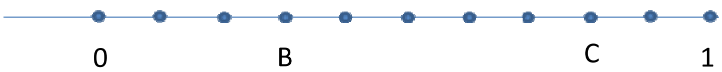
Antes da unidade de ensino foi aplicado um teste diagnóstico e no final foi aplicado um novo teste para avaliar as aprendizagens dos alunos. Trata-se, em ambos os casos, de testes que envolveram uma preparação cuidadosa, como instrumentos de avaliação das aprendizagens. No entanto, os testes não são comparáveis, sendo os itens do teste diagnóstico em geral, mais acessíveis que os do teste final. Os itens relativos a comparação e ordenação envolvem os diversos significados de número racional, usando sobretudo as representações decimal e fraccionária. Os resultados globais dos alunos estão indicados na Tabela 1.

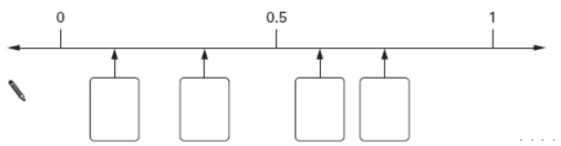
Tabela 1: Desempenho dos alunos nos testes diagnóstico e final (comparação e ordenação)

	Teste Diagnóstico			Teste Final		
Tipo de Questão	N.º de itens	N.º de respostas correctas na turma (n=21)	% de respostas correctas	N.º de itens	N.º de respostas correctas na turma (n=21)	% de respostas correctas
Comparação	9	74	40%	10	133	63%
Ordenação	6	38	30%	7	99	67%

No teste diagnóstico, os alunos mostram níveis de desempenho baixos nos itens relativos a comparação e ordenação de números racionais (na forma decimal e de fracção), o que é natural pois trata-se de assuntos que já estudaram há bastante tempo, e de modo possivelmente superficial, ou nunca estudaram. No teste final, os resultados são satisfatórios tanto nas questões de comparação como de ordenação. As percentagens globais de respostas correctas (63% e 67%), situam-se num patamar que traduz as características da turma, onde cerca de $\frac{1}{3}$ dos alunos tem bastante dificuldade em Matemática. Verifica-se um aumento significativo na percentagem das respostas correctas em relação ao teste inicial, como consequência do estudo formal destes tópicos. Alguns dos itens usados nestes testes e os resultados obtidos pelos alunos estão indicados nas Tabelas 2 e 3.

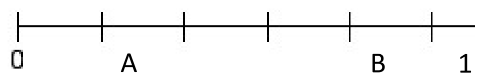
Tabela 2: Resultados dos alunos em diversos itens do teste diagnóstico

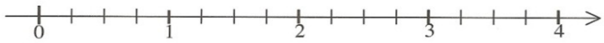
Item	N.º de respostas correctas na turma (n=21)	% de respostas correctas
1. Qual a distância entre B e C? 	8	38%
2. Observa a recta abaixo. Escreve cada uma das seguintes fracções nas caixas baixo $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$	0	0%

		
3. Ordena os seguintes números por ordem crescente: a) 3,10; 4,25; 3,5; 0,635; 4,255; 0,64	9	43%
b) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{8}$; 1; $\frac{5}{4}$; 1,5	0	0%
4. Qual é a fracção maior? De entre os pares de fracções faz um círculo em volta da maior. a) $\frac{2}{6}$ e $\frac{5}{6}$	12	57%
b) $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{4}$	14	67%
c) $\frac{5}{9}$ e $\frac{5}{10}$	3	14%

No teste inicial, nas questões 2 e 3b, envolvendo a representação em fracção e a recta numérica, nenhum aluno acertou. A questão 4c, envolvendo duas fracções com o mesmo numerador, permitia o uso de uma estratégia informal, mas foram muito poucos os alunos que acertaram. Ainda bastante difíceis foram as questões 1, envolvendo a recta numérica, e 3a, envolvendo a representação decimal. O desempenho foi melhor nas questões 4a,envolvendo fracções com o mesmo denominador, e 4b, que permite o uso do referencial de metade.

Tabela 3: Resultados dos alunos em diversos itens do teste final

Item	N.º de respostas correctas na turma (n=21)	% de respostas correctas
1. Observa a figura e indica qual a distância entre A e B. 	13	62%
2. Observa a recta a seguir indicada. Indica na recta cada um dos seguintes números. 1,5; 25%; $\frac{9}{4}$; $3\frac{3}{4}$	9	43%

		
3. Ordena os seguintes números por ordem crescente: a) 5,25; 0,635; 5,255; 0,64; 65%	14	67%
b) $2\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{4}$; 1,75; $\frac{5}{5}$; 3,7	8	38%
4. Usando um dos símbolos >, < ou =, completa de modo a obteres afirmações verdadeiras: a) $\frac{6}{7}$..........$\frac{3}{7}$	18	86%
b) $\frac{5}{9}$.........$\frac{5}{3}$	16	76%
c) $\frac{2}{3}$........$\frac{4}{9}$	17	81%
d) $\frac{6}{12}$........$\frac{2}{3}$	17	81%

No teste final os alunos mostram ainda alguma dificuldade nas questões 3b, envolvendo numerais mistos, fracções impróprias, numerais decimais e percentagens, e 2, envolvendo também essas representações e ainda a recta numérica. O facto de algumas destas representações (numerais mistos e fracções impróprias) terem sido relativamente pouco usadas na unidade de ensino pode explicar estes resultados. Em contrapartida, atendendo às características da turma, notam-se níveis relativamente satisfatórios nos restantes itens, em que estas representações não estão presentes. Para uma maior compreensão do trabalho desenvolvido e das aprendizagens realizadas, apresentamos no ponto seguinte alguns exemplos relativos a uma aluna, antes e após a unidade de ensino, evidenciando aspectos significativos do seu percurso de aprendizagem.

Compreensão da comparação e ordenação de racionais antes da unidade de ensino

Começamos por mostrar como Leonor lida com questões de comparação e ordenação de números racionais na entrevista realizada antes da unidade de ensino.

Tarefa 1.

1. Ordena os seguintes números por ordem crescente:

a) 0,5; 2,29; 0,45; 5,02; 2,200

b) $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{4}$

Esta tarefa, em contexto puramente matemático, envolve a ordenação de números racionais na representação decimal e fraccionária. Na questão 1a, Leonor começa por mostrar bastante à vontade na comparação dos dois números mais pequenos, acrescentando zeros para ter o mesmo número de casas decimais:

> *Leonor:* O maior… É crescente… O mais pequeno… É o 0,45.
>
> *Professora:* Porquê?
>
> *Leonor:* Porque se nós acrescentarmos mais um zero, fica 0,450 e este não (este) fica 0,500… A seguir é o 0,5… Depois é o 2,29… Depois é o 2,200…

Leonor, que tinha ordenado correctamente 0,5 e 0,45, erra na ordenação dos números 2,29 e 2,200. Começa por dizer que 2,200 é maior, sem ter em atenção o valor posicional do algarismo das centésimas que surge em 2,200 e 2,29. Mas quando a professora lhe pede que explique como está a pensar, auto-corrige-se e mostra perceber que o maior número é 2,29:

> *Professora:* Porquê?
>
> *Leonor:* Porque aqui já estão os 2 zeros e aqui se acrescentar um zero aqui fica 290 e aqui está só 200.
>
> *Professora:* Então qual é o maior desses dois números?
>
> *Leonor:* O maior destes dois números é este (2,29), não é este (2,200)… Tenho que trocar isto!

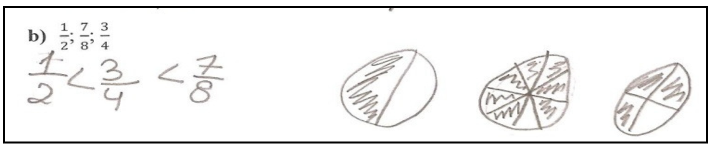
Leonor parece ter aprendido anteriormente o processo de acrescentar zeros para ficar com o mesmo número de casas decimais, mas sem o compreender completamente.

A questão 1b revela-se um problema difícil para a aluna já que esta não consegue fazer uma leitura verbal correcta de números expressos na representação fraccionária. Afirma que a maior fracção é $\frac{1}{2}$ porque se fosse, por exemplo, um bolo isso significava que comeria a metade e, segundo ela, metade "é muito". Em contrapartida, considera que $\frac{7}{8}$ não é tanto porque está "partido" em 8 partes. Ou seja, dá mais atenção ao número de fatias do que à quantidade de fatias que se tomam:

> *Leonor:* E agora tenho de pôr em [ordem] crescente estas, não é?
>
> *Professora:* Sim. Essas quê?
>
> *Leonor:* As fracções.
>
> *Professora:* Qual é que é o mais pequenino?
>
> *Leonor:* É o 7 por 8.
>
> *Professora:* Porquê?
>
> *Leonor:* Porque aqui no 1 por 2, só temos 2 é a metade e aqui temos a quarta parte e aqui temos a oitava parte… Temos a sétima parte só temos que dividir… Por 8, são 8 fatias e ele só come 7.
>
> *Professora:* Só?
>
> *Leonor:* Sim, e come menos. Muito menos do que se comesse 1 de 2.
>
> *Professora:* Muito menos?
>
> *Leonor:* Sim.

Leonor começa por considerar que $\frac{1}{2}$ é maior porque é uma fatia grande, enquanto aquilo que chama a "oitava parte" é mais pequeno. Na forma como se exprime percebe-se que compara apenas a fracção unitária em cada situação e não toma em consideração o numerador, ou seja, o número de partes do todo que se toma. Usa portanto uma estratégia informal (incorrecta) de atender, apenas, à dimensão das partes.

A professora vai fazendo perguntas à aluna no sentido de a levar a compreender o seu erro. Por fim, sugere-lhe que represente cada uma das fracções numa imagem, o que leva a aluna a ordená-las correctamente:



> *Professora:* Olhando agora para as imagens vê lá onde é que tu achas que se come menos e ordena.
>
> *Leonor:* Aqui come 7 fatias do bolo, aqui come uma que é a metade do bolo e aqui come a terça parte do bolo.
>
> *Professora:* A terça parte?
>
> *Leonor:* A quarta…

Professora: Quantas quartas partes?

Leonor: Três quartas partes.

Professora: Então agora ordena lá as imagens. Neste caso ordenas as fracções olhando para as imagens. Qual é que tu achas que é a mais pequenina? Em qual é que tu achas que comes menos?

Leonor: Em um por dois … E a seguir é 3 por 4… E depois o 7 por 8.

Professora: Então? Mudámos de perspectiva? Aquele que era o mais pequenino passou a ser o maior?

Leonor: Sim, porque come 7…

Neste caso, a mudança para a representação pictórica ajuda claramente Leonor na ordenação das fracções. Esta discussão mostra-se muito produtiva, pois a aluna através da representação pictórica das fracções contacta com a noção de equivalência de duas representações diferentes de um número racional.

Comparação e ordenação de racionais depois da unidade de ensino

Apresentamos agora o desempenho de Leonor na segunda entrevista, realizada depois de concluída a unidade de ensino.

Tarefa 1.

Um grupo de amigos foi lanchar e as 5 meninas dividiram quatro tartes e os quatro meninos dividiram três tartes iguais às das meninas.

a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta?
b) Que fracção da tarte vai comer cada menina? E cada menino?

Depois de concluir, pictoricamente, que cada menino come $\frac{3}{4}$ de tarte e que as meninas comem $\frac{4}{5}$ de tarte, Leonor compara as duas fracções e tenta usar pensamento residual, tal como já tinha feito numa questão anterior:

Professora: E agora a pergunta: Cada menino vai comer o mesmo que cada menina?

Leonor: Sim.

Professora: Sim? Então isso quer dizer que $\frac{3}{4}$ é igual a $\frac{4}{5}$?

Leonor: Só falta um, aqui só falta $\frac{1}{5}$ para chegar à unidade e aqui só falta $\frac{1}{4}$ para chegar à unidade, mas aqui $\left(\frac{3}{4}\right)$ as fatias são maiores, porque só está dividido em 4.

Leonor considera que as fracções são iguais porque em ambas "só falta um" para chegar à unidade. Não atende ao denominador, ou seja, o "tamanho" de cada fatia, que é diferente, não dando atenção à grandeza das fracções. Deste modo, não considera a relação de compensação entre o "tamanho" e o número de partes iguais em que a unidade está dividida, evidenciando ainda a influência da forma de pensar nos números inteiros e acaba por usar pensamento diferencial (Post et al., 1986).

Conduzida pelas perguntas da professora, a aluna continua a reflectir sobre os dois números, percebendo a certo ponto que as fatias não são iguais:

Professora: Então onde é que comeram mais?

Leonor: Os meninos, porque a piza está dividida em menos partes e as fatias são maiores.

Professora: Então a fatia que sobra, ai sobra $\frac{1}{4}$, e aqui sobra quanto?

Leonor: $\frac{1}{5}$.

Professora: Então, qual é que é a fracção maior?

Leonor: $\frac{1}{5}$.

Professora: $\frac{1}{5}$ é maior do que $\frac{1}{4}$?

Leonor: Sim.

Professora: Cada fatia destas $\left(\frac{4}{5}\right)$ é maior do que cada fatia destas $\left(\frac{3}{4}\right)$?

Leonor: Não! É mais pequena.

Professora: Então $\frac{1}{5}$ é maior ou mais pequeno do que $\frac{1}{4}$?

Leonor: $\frac{1}{5}$ é mais pequeno que o outro $(\frac{1}{4})$

Professora: Então o que sobra aqui $(\frac{1}{5})$ é maior ou mais pequeno?

Leonor: É mais pequeno

Professora: Então o que é que sobra aqui ?

Leonor: $\frac{1}{4}$.

A aluna mostra grande vontade de utilizar estratégias informais. Embora com alguma dificuldade, depois de alguma reflexão e das perguntas da professora, consegue concluir correctamente a relação entre a parte que sobra e a parte que se come.

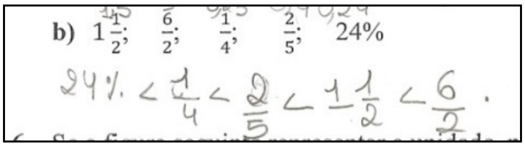
Nesta mesma entrevista consegue também de modo informal comparar $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{12}$ e $\frac{2}{3}$ usando as fracções complementares $\frac{5}{6}$; $\frac{10}{12}$ e $\frac{1}{3}$. Mostra alguma hesitação a reconhecer que a maior fracção é aquela cuja parte que falta para fazer o todo é a mais pequena, mas finalmente faz um raciocínio correcto.

Tarefa 2.

Ordena os seguintes números por ordem crescente

a) $1\frac{1}{2}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$; 24%

Leonor verifica que existem números em representações diferentes e refere que, para os podermos comparar devemos convertê-los todos na mesma representação. Revela compreender que os números racionais podem ser representados de diferentes formas, mas opta por transformá-los em numerais decimais. Explica ainda que, a estratégia que usa para comparar os numerais decimais é acrescentar zeros, para ficarem todos com milésimas pois “assim é mais fácil” e afirma ainda que, devem ter todos o mesmo “nome” por senão não os conseguimos comparar.



Leonor: (…) Aqui podia ser 1,5 ($1\frac{1}{2}$), aqui podíamos dividir ($\frac{6}{2}$) para saber quanto é que era.

Professora: Fazíamos 6:3?

Leonor: Sim, 6:2.

Professora: E quanto é que dá 6:2?

Leonor: Dá 3. (Pensa alto enquanto faz as conversões) aqui é 0,25 ($\frac{1}{4}$), (…) não aqui dá 0,4 ($\frac{2}{5}$) e aqui 24% é 0,24. Primeiro é 0,24 que é 24%, depois 0,25, um quarto; depois $\frac{2}{5}$.

Professora: Depois o $\frac{2}{5}$ que é quanto? Como é que comparaste com o 0,25?

Leonor: Acrescentei zeros aqui (0,240), se acrescentar zeros aqui vamos ver que é maior (0,400). Agora o 1 e uma metade e o 3, 6 metades.

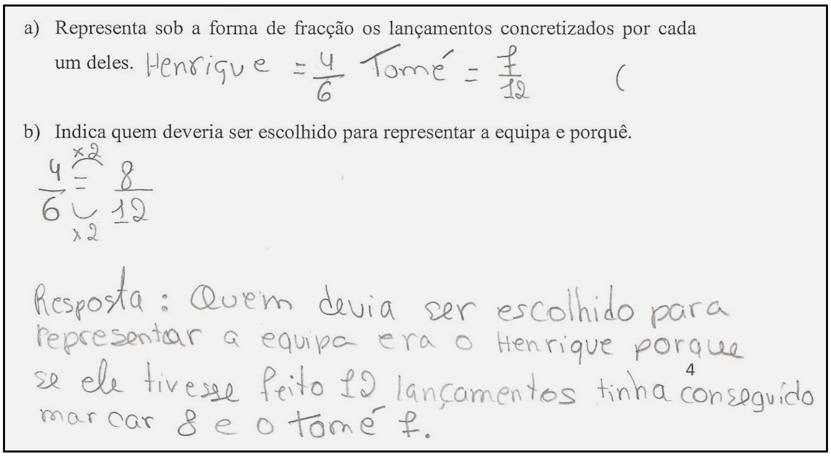
Assim, a aluna converte as fracções em numerais decimais, dividindo o numerador pelo denominador, compreende o numeral misto fraccionário e converte-o em numeral decimal sem recorrer a qualquer algoritmo. Contudo, utiliza a representação decimal apenas como apoio à ordenação uma vez que, na resposta utiliza sempre as representações dadas na pergunta.

Tarefa 3.

Num treino de basquetebol dois jogadores estiveram a fazer lançamentos ao cesto e Henrique conseguiu marcar 4 dos 6 lançamentos enquanto o Tomé conseguiu marcar 7 dos 12 lançamentos.

a) Representa sob a forma de fracção os lançamentos concretizados por cada um deles.
b) Indica quem deveria ser escolhido para representar a equipa e porquê.

Para comparar as fracções $\frac{4}{6}$ e $\frac{7}{12}$ a aluna utiliza a equivalência de fracções. Refere que, se ambos fizessem 12 tentativas o Henrique concretizaria mais golos. Justifica esta estratégia, dizendo que assim ambos estão na mesma "unidade" e depois compara apenas os numeradores.



a) Representa sob a forma de fracção os lançamentos concretizados por cada um deles. Henrique $= \frac{4}{6}$ Tomé $= \frac{7}{12}$ (

b) Indica quem deveria ser escolhido para representar a equipa e porquê.

$$\frac{4}{6} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{=}} \frac{8}{12}$$

Resposta: Quem devia ser escolhido para representar a equipa era o Henrique porque se ele tivesse feito 12 lançamentos tinha conseguido marcar 8 e o tomé 7.

Leonor: Porque ele está mais perto da unidade. E se nós fizéssemos fracções equivalentes 6x2=12 e era igual. 4x2 é 8 e 6 x2 é 12

Professora: E isso quer dizer o quê?

Leonor: Que esta é maior ($\frac{8}{12}$) porque são os 2 da mesma unidade e 7 é mais pequeno do que 8.

Professora: Isso que dizer que se fizessem os dois 12 lançamentos…

Leonor: Era o Henrique que devia ser escolhido … Eu pus assim: Quem devia ser escolhido para representar a equipa era o Henrique porque ele se tivesse feito 12 lançamentos tinha conseguido marcar 8 e o Tomé 7.

Verifica-se que, após a unidade de ensino, Leonor mostra facilidade em usar as estratégias formais (conversão das fracções em numerais decimais ou em percentagens e a equivalência de fracções) para comparar fracções. Contudo, mostra por vezes alguma dificuldade no uso das estratégias informais como é o caso do *pensamento residual*.

Conclusão

A unidade de ensino permitiu aos alunos desenvolver o seu conceito de número racional e adquirir flexibilidade na conversão entre representações. No início os alunos tinham ainda dificuldade na comparação de números representados na forma decimal, com um número diferente de casas decimais, mas conseguiam comparar fracções em casos simples. Deste modo, mostravam ter algum conhecimento intuitivo, mas pouca compreensão dos processos formais que já tinham estudado.

O trabalho na unidade de ensino permitiu aos alunos desenvolver a sua compreensão do sistema decimal, deixando de ter dificuldades na comparação nesta representação. No fim da unidade de ensino, os alunos revelam muito maior à vontade na ordenação de numerais decimais do que no início, o que sugere que a decisão de realizar muito cedo um trabalho significativo com numerais decimais foi acertada, tal como a decisão de usar as diversas representações em simultâneo.

No caso das fracções, os alunos desenvolveram a capacidade de fazer comparações usando estratégias formais como a conversão das fracções em numerais decimais ou em percentagens, tal como sugerido por Bezuk e Cramer (1989), e a equivalência de fracções com denominadores comuns. Também usam estratégias informais, no caso das fracções apresentarem o mesmo numerador ou o mesmo denominar. Mas, no final, mostram ainda algumas dificuldades no uso de estratégias informais quando as fracções têm os numeradores e os denominadores diferentes. Apesar do trabalho feito na unidade, Leonor revela forte tendência para usar pensamento residual (Post et al., 1986) atestando a resistência das estruturas aditivas. O seu melhor desempenho surge quando a aluna se mostra capaz de usar estratégias já com um vincado carácter formal mas apoiadas directamente nas suas estratégias informais. Isto sugere que o grande problema do ensino é saber como promover a formalização progressiva das estratégias informais (Gravemeijer, 2005).

Deste modo, a aposta no desenvolvimento da capacidade de usar flexivelmente as diversas representações de números racionais, pondo em pé de igualdade as representações decimal e fraccionária e valorizando ainda a representação pictórica, revelou-se apropriada, fornecendo aos alunos um processo natural de ordenação de racionais. A abordagem exploratória, em que os alunos são colocados perante tarefas que têm que resolver recorrendo a estratégias por eles inventadas, revelou-se positiva no desenvolvimento da sua compreensão das relações entre representações e da relação de ordem dos números racionais.

Referências

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York, NY: Macmillan.

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how? In P. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 156-167). Reston, VA: NCTM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schaube, L. (2003). Designing experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2006). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89-108.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Orton, R., Post, T., Behr, M., Cramer, K., Harel, G., & Lesh, R. (1995). Logical and psychological aspects of rational number pedagogical reasoning. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 3*, 63-75.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *8*(1), 39-48.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1992). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, L. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Learning, Tteaching, and assessing rational number concepts: Multiple research perspectives* (pp. 327-362). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Post T., Wachsmuth I., Lesh R., & Behr M. (1985). Order and equivalence of rational number: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 18-36.

REPRESENTAÇÕES NA APRENDIZAGEM DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Sandra Nobre
Escola Professor Paula Nogueira
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
sandraggnobre@gmail.com

Nélia Amado
FCT - Universidade do Algarve
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
nmpamado@hotmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Este trabalho analisa as representações utilizadas por alunos do 9.º ano na resolução de uma tarefa integrada no estudo dos sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas. O seu objectivo é (i) perceber como é que os alunos abordam a tarefa do ponto de vista algébrico, isto é, recorrem ou não simbolismo algébrico e que tipo de relações estabelecem entre os dados e (ii) compreender como é que esta tarefa pode servir de suporte à aprendizagem de métodos formais algébricos permitindo o desenvolvimento do pensamento algébrico. A análise de dados incide nas resoluções dos alunos e nos diálogos entre os alunos e a professora que ocorreram durante a discussão da tarefa. Verificamos que a maioria dos alunos recorre a modos de representação aritméticos na resolução dos problemas e consideramos que este tipo de representação proporciona uma base sustentável de processos informais para a aprendizagem de métodos formais de resolução de sistemas de equações do 1.º grau.

Palavras-chave: Álgebra, Pensamento algébrico, Representações, Sistemas de equações.

Introdução

O 9.º ano de escolaridade constitui um momento de transição do ensino básico para o secundário. Os alunos que pretendem prosseguir estudos necessitam de um conhecimento mais profundo de Álgebra, mas simultaneamente a compreensão de conceitos algébricos que requer maior abstracção é difícil para muitos deles.

O desenvolvimento do pensamento algébrico é uma das grandes finalidades no ensino da Matemática (Ponte et al., 2007). O *Programa de Matemática do Ensino Básico* apresenta como propósito principal do ensino da Álgebra:

> Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos. (Ponte et al., 2007, p. 55)

Sabe-se que as representações escritas produzidas pelos alunos, em particular, na resolução de problemas são poderosas ferramentas que devem ser desenvolvidas por constituírem uma componente essencial da aprendizagem, possibilitando a organização e a comunicação de ideias. Em particular, constituem um meio para a aprendizagem progressiva de métodos formais algébricos, que são umas das componentes importantes do trabalho em Álgebra. Neste artigo procuramos olhar para o pensamento algébrico envolvido na resolução de problemas através das representações dos alunos e perceber como é que estas representações podem servir de suporte para a aprendizagem de métodos formais.

O desenvolvimento do pensamento algébrico

O desenvolvimento do pensamento algébrico está estreitamente relacionado com a experiência matemática dos alunos. Kieran (2007) refere que, num nível mais avançado, este pensamento se manifesta no uso de expressões simbólicas e de equações em vez de números e operações. No entanto, para os alunos que ainda não aprenderam as notações algébricas, as formas de pensamento mais geral sobre números, operações e notações, como o sinal de igual, podem efectivamente ser consideradas algébricas. Esta investigadora afirma que:

> O pensamento algébrico pode ser interpretado como uma abordagem às situações quantitativas, que evidencia os aspectos relacionais das mesmas, com recurso a ferramentas que não são necessariamente letras

> usadas como símbolos e que podem ser utilizadas como suporte cognitivo para a introdução e sustentação do discurso mais característico da Álgebra escolar (Kieran, 1996, pp. 274-275).

Pensar algebricamente abrange conhecer várias formas de representação, nomeadamente as simbólicas. Implica flexibilidade na mudança entre modos de representação, bem como a capacidade de operar com símbolos, em contexto e quando adequado (Schoenfeld, 2008). Este modo de pensamento contempla também o trabalho com estruturas matemáticas e o uso de símbolos na resolução de problemas, incluindo o sentido do símbolo, entendido como a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos (Arcavi, 2006).

Zazkis e Liljedahl (2002) afirmam que o termo Álgebra engloba dois aspectos distintos: pensamento algébrico e simbolismo. Estes autores afirmam que actualmente há uma tendência para separar estes aspectos, sendo esta separação fomentada por dois factores: (i) reconhecimento da possibilidade de manipulação simbólica sem sentido e (ii) um maior foco na estrutura do que nos cálculos, nos primeiros anos. Num estudo acerca da generalização de padrões verificaram que, quando os alunos manifestavam formas de pensamento algébrico ao mesmo tempo que utilizavam notação algébrica (simbolismo), não entendiam a correspondência entre ambos. Na sua perspectiva, o uso de simbolismo algébrico deve ser tido como um indicador de pensamento algébrico mas o facto de não se usar notação algébrica não deve ser julgado como uma incapacidade de pensar algebricamente. Este aspecto vem ao encontro da afirmação de Radford (2000) "os estudantes já estão a pensar algebricamente quando lidam com a produção de uma mensagem escrita, mesmo sem usarem o simbolismo algébrico" (p. 258).

Reconhecemos que a utilização do simbolismo algébrico é uma das grandes potencialidades da Álgebra pois constitui uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas, permitindo expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada. No entanto, neste estudo, assumimos esta perspectiva mais abrangente de pensamento algébrico e consideramos que este se manifesta não só pelo uso do simbolismo algébrico, mas também através de outras representações que envolvem palavras e relações gerais entre números.

Na Álgebra, a aprendizagem e utilização de equações pode tornar-se difícil para os alunos por envolver uma linguagem muito específica. Apesar de grande parte da simbologia utilizada na Álgebra já ser conhecida dos alunos do seu estudo na

Aritmética, não significa que a entendam no novo contexto. Por exemplo, o sinal de igual pode ter ou não o significado de equivalência. Este símbolo surge na Aritmética como um sinal de operação, ou seja, indica a necessidade de fazer algo. Contudo, quando é usado em equações, o seu significado é de que existe equivalência entre os dois membros (Kieran, 1981). Para uma interpretação adequada da estrutura de uma equação é necessária uma compreensão da concepção de simetria e do carácter transitivo da igualdade.

Vários estudos mostram que os alunos têm dificuldades na compreensão e utilização de letras (McGregor & Stacey, 1997) e, por vezes, nem tentam compreender o seu significado, preferindo lembrar simplesmente os procedimentos. Algumas investigações acerca da forma como os alunos abordam a resolução de problemas que envolvem duas equações do 1.º grau a duas incógnitas mostram outros aspectos acerca da concepção do sinal de igual que pode causar dificuldades (Filloy, Rojano & Solares, 2004). Estes autores mostram que certos alunos resolvem equações com uma incógnita, mas não resolvem problemas com duas incógnitas, manifestando dificuldades na aplicação da "transitividade do sinal de igual", quando se depararam com duas equações $4x-3=y$ e $6x+7=y$. Não conseguem reconhecer a transitividade para obter, por exemplo, $4x-3=6x+7$. Uma possível interpretação alternativa tem a ver com a incapacidade dos alunos para substituir o y na primeira equação pela expressão igual da segunda equação. Isto pode ser interpretado como os alunos considerarem os y's como sendo diferentes.

Resolução de problemas e representações na aprendizagem da Álgebra

A resolução de problemas é uma actividade importante em Álgebra. Kieran (2004) considera três tipos de actividade algébrica: actividades de geração, transformação e meta-globais. As primeiras correspondem à construção e interpretação de objectos algébricos. As actividades de transformação incluem a simplificação de expressões algébricas, a resolução de equações e inequações e o cálculo de expressões. Por fim, as actividades meta-globais abarcam a resolução de problemas, a modelação matemática, a generalização de padrões e a análise da variação em situações que envolvem funções.

Windsor (2010) destaca a resolução de problemas como uma oportunidade para enriquecer e transformar o pensamento dos alunos, sublinhando que o professor pode incentivá-los a pensar algebricamente ao invés de os influenciar simplesmente a recorrer a uma determinada estratégia ou procedimento. Salienta ainda que é através da discussão durante o processo de resolução que pode ser desenvolvida uma perspectiva algébrica da Matemática, acrescentando que é fundamental que os alunos reflictam acerca das suas estratégias e partilhem as suas experiências por lhes permitirem desenvolver diferentes formas de entender e abordar os problemas.

Kieran (2006) afirma que, na resolução de problemas de palavras algébricos, os alunos preferem frequentemente recorrer a métodos aritméticos, mostrando dificuldade em utilizar equações. Embora à primeira vista o pensamento aritmético possa parecer um obstáculo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, a verdade é que ele também pode ser visto como uma via para esse desenvolvimento. Entre os processos aritméticos mais utilizados neste tipo de problemas, destacam-se as estratégias de tentativa e erro e de *unwind* (desfazer). Outra estratégia consiste em atribuir um valor a uma quantidade desconhecida e verificar a sua exactidão, usando um raciocínio funcional, isto é, reconhecendo a relação existente entre as variáveis, mesmo que essa relação não seja expressa através de linguagem algébrica formal (Johanning, 2004).

No processo dinâmico e evolutivo da aprendizagem da Matemática, nomeadamente num ambiente de resolução de problemas, é importante incentivar os alunos a representar as suas ideias matemáticas de forma que façam sentido para eles, mesmo que essas representações não sejam convencionais. No entanto, é igualmente importante que os alunos aprendam formas estabelecidas de representação que facilitem a actividade matemática e que promovam a comunicação das ideias matemáticas. A resolução de problemas pode ser um bom veículo para estimular o uso de uma grande diversidade de representações. Além disso, possibilita o estabelecimento de conexões entre diferentes tipos de representação e a passagem de umas para outras, ampliando o conhecimento matemático dos alunos (Dufour-Janvier, Bednarz & Bélanger, 1987).

As representações constituem veículos para a compreensão e interpretação de ideias matemáticas e, simultaneamente, ferramentas para o desenvolvimento de estratégias na resolução de problemas, proporcionando múltiplas concretizações de um conceito ou estrutura matemática. A apropriação de propriedades comuns às diversas representações contribui para a caracterização do referido conceito ou estrutura. Podemos distinguir duas categorias de representações: “internas” e “externas”. Nas primeiras, encontram-se as imagens mentais que correspondem às formulações internas construídas pelo indivíduo sobre uma dada realidade. As segundas são organizações simbólicas externas (símbolos, figuras, diagramas, gráficos, etc.) cujo objectivo é representar ou codificar uma determinada "realidade matemática" (Dufour-Janvier et al., 1987). As representações internas não são directamente observáveis, quando muito podemos inferi-las pelo comportamento observado da pessoa ou através da sua interacção com as representações externas (Goldin, 2008).

Em vez de representações, Mason (1987) prefere falar de diferentes modos de representação de ideias matemáticas. Para este autor, a actividade de construir significado ou dar sentido a uma ideia decorre do circuito que se estabelece entre a manipulação e a expressão. A manipulação inclui a utilização de objectos físicos, a criação de figuras e diagramas, no papel ou mentalmente, bem como o uso de símbolos. Por seu lado, a expressão implica ser capaz de dizer algo e ser capaz de registar no papel (ou no computador) o sentido do que se diz, através de figuras, diagramas, símbolos ou palavras, usando diversos modos de representação. Os modos de representação podem ser usados simultaneamente como objectos de manipulação e como meios de expressão.

Na resolução de problemas, Preston e Garner (2003) distinguem os seguintes modos de representação: (i) linguagem natural escrita para explicar o raciocínio e as estratégias, como complemento de outros modos de representação; (ii) pictórico, com recurso a desenhos ou imagens para apresentar, conjugar e sintetizar a informação; (iii) aritmético, por vezes, através de estratégias de tentativa e erro, de desfazer ou do uso de tabelas; (iv) gráfico, com recurso a gráficos de variáveis contínuas ou discretas com o objectivo de mostrar o seu comportamento; e (v) algébrico, correspondendo à utilização de linguagem simbólica para generalizar.

Metodologia

No tópico matemático sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas os alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade resolveram os problemas propostos (em anexo) integrados numa experiência de ensino que foi desenvolvida pela investigadora. Anteriormente os alunos já tinham resolvido problemas na folha de cálculo que envolviam relações que podem ser traduzidas por equações do 1.º grau com duas incógnitas e já possuíam a noção de sistema de equações, embora na aula ainda não tivesse sido trabalhado nenhum método de resolução, do ponto de vista formal.

Para a construção da tarefa, a professora teve como pressupostos que esta fosse acessível a todos os alunos e que envolvesse o trabalho com ideias de suporte à aprendizagem dos métodos formais de resolução de sistemas de equações do 1.º grau, em particular, os métodos de substituição e de adição ordenada. As quatro situações propostas foram sequenciadas de acordo com o seu crescente grau de complexidade.

Os objectivos deste estudo, em particular, são: (i) identificar os modos de representação que os alunos utilizam para resolver os problemas e como os mobilizam para alcançar a solução e (ii) perceber como é que as representações utilizadas na resolução dos problemas podem constituir uma base sustentável para a aprendizagem de métodos formais de resolução de sistemas de equações lineares. Tendo em conta estes objectivos, a metodologia adoptada é de natureza qualitativa e enquadra-se no paradigma interpretativo. Para a recolha de dados procedeu-se à gravação áudio da aula em que a tarefa foi discutida e à recolha das resoluções dos alunos da turma. A aula foi transcrita e as resoluções dos alunos foram analisadas. Assim, na análise de dados tivemos em atenção não só as resoluções mas também o discurso dos alunos e o da professora durante a discussão da tarefa. Desta forma, podemos conhecer aquilo que leva os alunos a realizar determinados procedimentos e a fazer determinadas opções relativamente à utilização ou não da linguagem algébrica.

Estiveram presentes na aula 21 alunos, sendo 6 rapazes e 15 raparigas, com idades compreendidas entre os 14 e os 18 anos. Os alunos resolveram os problemas em pares e só depois foi feita a sua discussão em grande grupo. A discussão, para cada um dos problemas, iniciou-se pelas resoluções consideradas mais informais (aritméticas) e só depois se avançou para outras mais formais que incluíam o recurso à simbologia algébrica, bem como procedimentos algébricos, como a resolução de equações.

Resultados globais

Após análise das resoluções dos alunos verificou-se que, quanto aos modos de representação, para além do recurso à linguagem natural e do modo de representação pictórico, podiam ser distribuídas por três categorias: aritmética, algébrica/aritmética e algébrica.

Nas situações classificadas como aritméticas os alunos recorreram apenas às operações elementares, utilizando estratégias de desfazer ou de tentativa e erro. Nas resoluções algébricas/ aritméticas, os alunos começaram por designar o valor de cada animal por uma letra, escreveram as equações que traduzem cada uma das situações mas de seguida utilizaram procedimentos exclusivamente aritméticos para encontrarem a solução.

Aquando da análise das diferentes resoluções verificámos que nalgumas situações surgiam não só a escrita de equações para expressar as relações presentes na informação do enunciado mas também a resolução de algumas delas, pelo que decidimos integrá-las na categoria representações algébricas. O critério estabelecido para as resoluções integrarem esta categoria foi o dos alunos terem resolvido pelo menos uma das equações utilizando procedimentos formais, ou seja, as regras usuais.

Os diferentes tipos de resposta, de acordo com os modos de representação predominantes, estão sintetizados no Quadro 1.

Quadro 1. Tipo de resposta dos alunos.

Modo de representação	Correcta				Incompleta				Sem resposta			
	S1	S2	S3	S4	S1	S2	S3	S4	S1	S2	S3	S4
Aritmética	16	14	17	16	0	2	1	2	-	-	-	-
Algébrica/Aritmética	4	4	1	1	0	0	0	0	-	-	-	-
Algébrica	1	1	1	0	0	0	0	0	-	-	-	-
Total	21	19	19	17	0	2	1	2	0	0	1	2

Da observação do Quadro 1 apuramos que num total de 84 respostas analisadas, apenas três estavam em branco e cinco incompletas, o que significa que praticamente todos os alunos resolveram na íntegra os problemas propostos.

Quanto ao modo de representação, verificamos que nos três primeiros problemas a maior parte dos alunos recorreu a um modo de representação aritmética e no quarto só uma aluna não utilizou este tipo de procedimento. Apenas 4 alunos recorreram ao modo de representação algébrica/aritmética no primeiro e segundo problemas; estes alunos começaram por escrever equações prosseguindo depois com modos de representações aritméticas. No terceiro problema apenas um aluno recorreu a este tipo de representação. No que diz respeito aos modos de representações algébricas, apenas um aluno utilizou este tipo de representação para encontrar as soluções para os três primeiros problemas.

Quanto à linguagem natural, este foi também um modo de representação que acompanhou a explicação dos procedimentos dos alunos, tendo-se verificado mais a sua presença nas situações em que os alunos não recorriam ao modo de representação algébrico. As representações pictóricas surgiram essencialmente nas situações 2 e 3 onde os alunos delimitam os grupos de animais convenientemente para efectuarem substituições de modo alcançarem a solução.

Passamos de seguida a apresentar, para cada um dos problemas propostos, exemplos ilustrativos das respostas dadas pelos alunos, nas diferentes categorias, e excertos de alguns diálogos que ocorreram durante a discussão em sala de aula.

Situação 1

Modo de representação aritmética. O aluno A, como se pode observar na figura 1, começa por dividir o valor 27 por 3, obtendo o valor de cada rato. De seguida, obtém o valor de dois ratos e faz a diferença entre 34 e o valor obtido. Divide depois o resultado por 2, obtendo o valor de cada coelho.

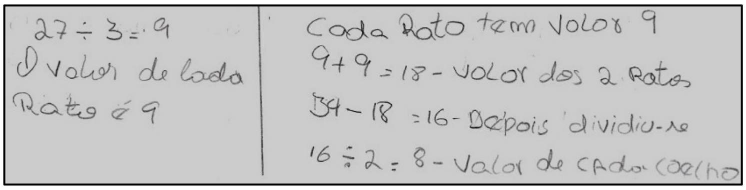


Figura 1: Representação do aluno A.

Modo de representação algébrica/aritmética. A aluna B começou por escrever uma equação que traduz as relações que observa em cada uma das imagens e de seguida envereda por uma resolução aritmética, à semelhança do caso anterior, como se pode observar na figura 2. Neste tipo de resolução, as representações dos alunos assentam em estratégias de desfazer o que equivale aos sucessivos passos da resolução das respectivas equações.

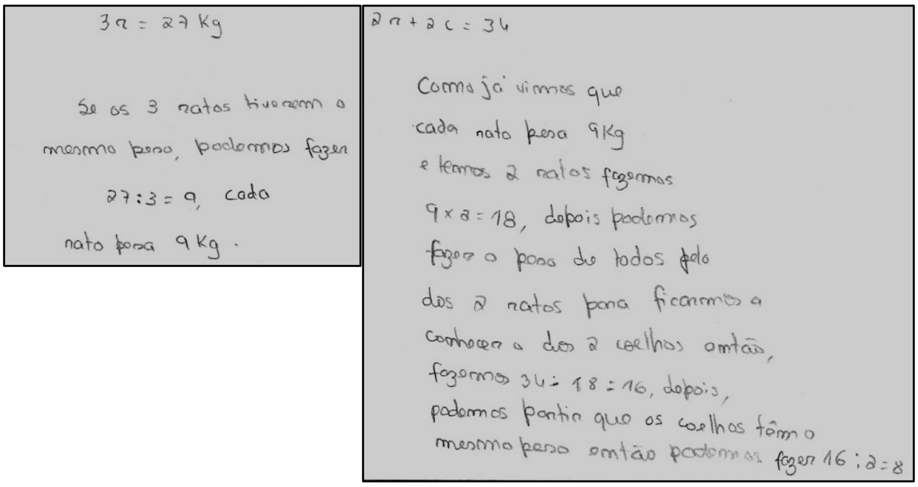


Figura 2. Representação da aluna B.

Modo de representação algébrica. A resolução apresentada na figura 3 mostra que a aluna escreveu uma equação para cada caso, resolveu a primeira com as regras usuais e substituiu a solução obtida na segunda equação que também resolveu através de procedimentos formais. Esta resolução expressa com bastante clareza o método formal de resolução de um sistema de equações pelo método de substituição.

Na discussão da tarefa, a aluna C referindo-se ao valor do cão, explicou como procedeu.

> *Aluna C*: Depois substituí-o aqui no 2c que é duas vezes os cães, temos que pôr um 9 que é o que deu anteriormente, depois resolvemos a equação e descobrimos o valor pedido.
>
> […]
>
> *Professora*: a resolução da Aluna C, coincide com a resolução de um sistema de equações pelo método de substituição, chama-se método de substituição […] é o que vocês já tinham feito mas muitos de outra maneira […] é um sistema de equações porque as duas condições têm que ser cumpridas simultaneamente. Nesta situação que é das mais simples, o valor obtido da primeira equação vamos substituí-lo imediatamente na segunda.

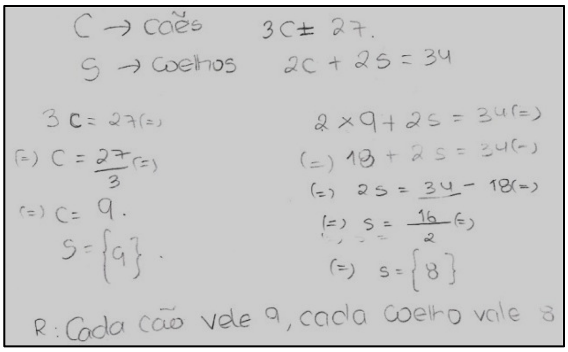


Figura 3. Representação da aluna C.

A professora tendo como suporte as resoluções apresentadas pelos alunos informa-os que aquele processo de resolução se denomina por método de substituição e reforça o que os alunos já apresentaram.

Passamos de seguida à análise do segundo problema que envolve igualmente relações entre duas quantidades desconhecidas. Esta situação é mais complexa do que a anterior por envolver duas substituições para encontrarmos a solução.

Situação 2

Modo de representação aritmética. Na resolução apresentada na figura 4, para além da representação aritmética e da linguagem natural para explicar os seus procedimentos, a aluna recorre também ao modo de representação pictórico, circundando dois grupos de animais na segunda figura, cada um constituído por dois elefantes e um crocodilo, o que lhe permitiu obter o valor de um crocodilo. Voltou depois à primeira imagem para descobrir o valor de cada elefante.

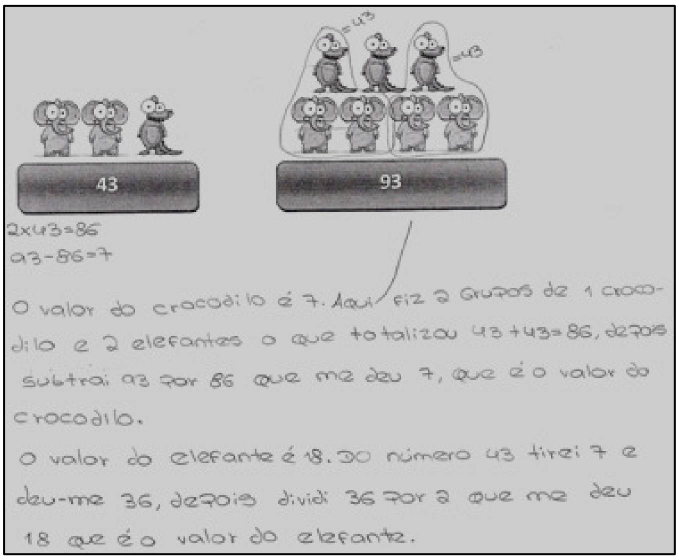


Figura 4. Representação da aluna D.

Modo de representação algébrica/ aritmética. Nesta categoria os alunos escreveram as equações relativas a cada uma das imagens e de seguida enveredaram por processos aritméticos para encontrar os valores das incógnitas.

Modo de representação algébrica. A aluna designou o valor de cada animal por uma letra e, em seguida, escreveu as equações. À semelhança dos colegas delineou os dois grupos na segunda imagem o que lhe permitiu encontrar o valor do crocodilo e resolver a equação para a primeira figura e encontrar o valor do elefante. Por fim, a aluna recorreu à segunda equação para verificar se os valores encontrados satisfaziam a condição, como se pode verificar na figura 5. Na discussão, em sala de aula, após um aluno ter apresentado uma resolução aritmética a professora questionou os alunos no sentido de saber se conseguiriam agora resolver este problema utilizando um método análogo ao que a aluna C utilizou no primeiro problema. Uma aluna vai ao quadro, atribui letras aos valores desconhecidos e escreve o sistema de equações. Em seguida, a professora questiona os alunos acerca da forma como se resolveria o sistema.

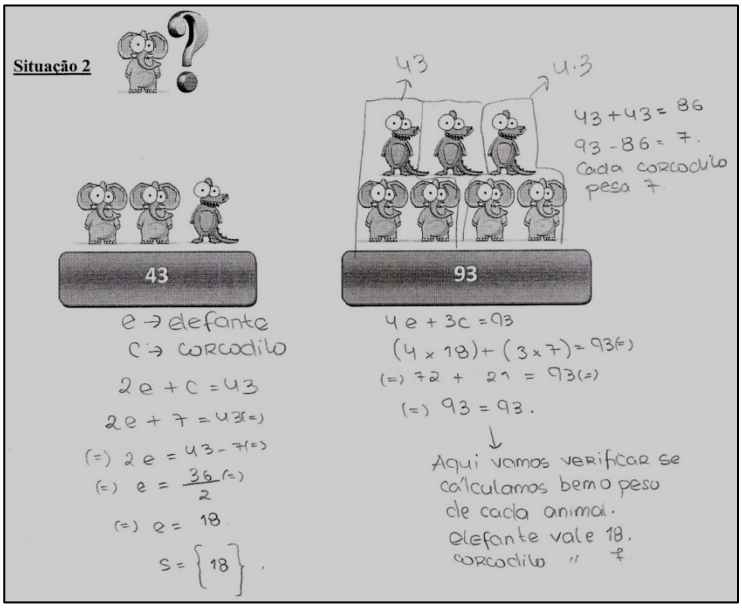


Figura 5. Representação da aluna C.

Neste segundo problema as substituições efectuadas também correspondem ao que usualmente se faz no método de substituição formal como se pode verificar a seguir.

$$\begin{cases} 2e+c=43 \\ 4e+3c=93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e+c=43 \\ \underbrace{\boxed{(2e+c)+(2e+c)}}_{\text{Os dois grupos formados por dois elefantes e um crocodilo, cada um.}}+c=93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e+c=43 \\ \underbrace{\boxed{43+43}}_{\text{Substituição pelo valor obtido da primeira figura.}}+c=93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e+c=43 \\ c=93-86 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e+\boxed{7}=43 \\ c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=18 \\ c=7 \end{cases}$$

Substituição pelo valor obtido da segunda figura.

Figura 6. Substituições efectuadas pelos alunos.

Passamos de seguida à análise do terceiro problema. Neste caso existem três quantidades desconhecidas e três imagens.

Situação 3

Modo de representação algébrica/aritmética. Na figura 7 apresentamos uma resolução integrada na categoria algébrica / aritmética, onde a aluna também recorre à linguagem natural e ao modo de representação pictórico. A aluna começou por escrever a equação correspondente a cada uma das imagens, de seguida, seguiu um raciocínio análogo à da questão anterior, fazendo um grupo com 3 minhocas e duas abelhas na segunda imagem, o que lhe permitiu encontrar o valor da minhoca. Depois, substituindo o valor de cada minhoca na primeira imagem encontrou o valor de cada abelha. Por fim, na última imagem a aluna a aluna substituiu os valores já conhecidos obtendo o terceiro valor em falta.

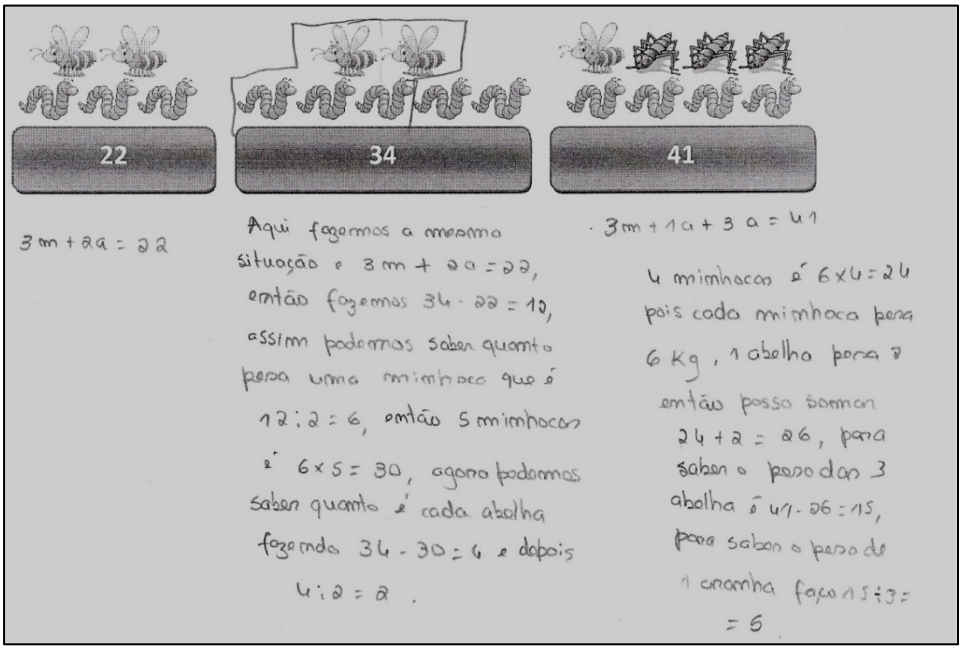


Figura 7. Representação da aluna B.

Modo de representação algébrica. Na resolução da aluna que se apresenta a seguir, na figura 8, a aluna segue passos análogos aos apresentados na resolução da figura 6, mas fá-lo com recurso ao simbolismo algébrico e praticamente não recorre à linguagem natural. Depois de substituir na segunda imagem o grupo de cinco animais da primeira figura pelo respectivo valor, a aluna encontra através de processos aritméticos o valor de cada lagarta. Posteriormente, substitui esse valor na equação correspondente à primeira figura o que lhe permite através da sua resolução encontrar o valor de cada abelha. Para terminar, substitui os valores conhecidos na última equação, resolve-a e encontra o outro valor em falta.

A resolução deste problema, do ponto de vista formal, corresponde à resolução de um sistema de três equações a três incógnitas. Os alunos não mostraram dificuldades na sua resolução, embora a maioria dos alunos tenha recorrido a um modo de representação aritmética não deixaram de estabelecer devidamente as relações entre os valores dos animais e a substituição foi um procedimento visível em todas as resoluções.

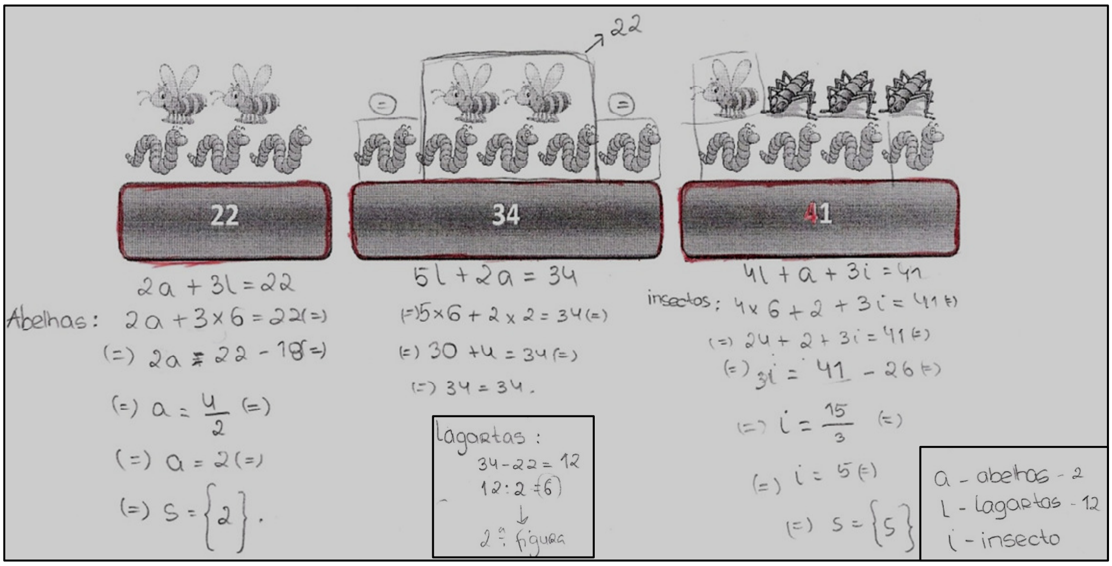
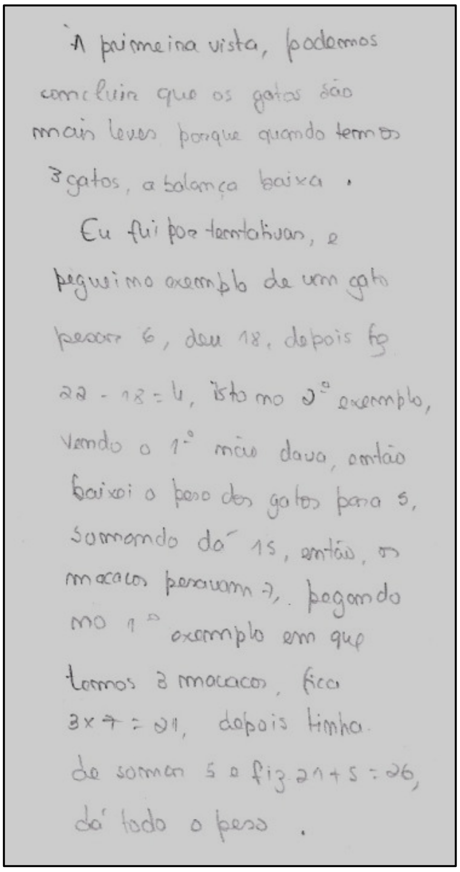


Figura 8. Representação da aluna C.

Situação 4

O último problema tem características distintas dos anteriores e à primeira vista o estabelecimento de relações entre os valores dos animais pode não ser tão evidente como nos problemas anteriores. Nos outros casos foi possível constituir grupos de animais e substituir pelo respectivo valor de acordo com os dados presentes nas imagens era um aspecto facilitador da sua resolução. Neste caso, grande parte dos alunos não conseguiu estabelecer relações entre os valores dos animais e enveredaram por processos de tentativa e erro.

Modo de representação aritmética. Na figura 9 apresentamos a resolução de uma aluna que assenta num processo de tentativa e erro. A aluna recorre à linguagem natural e começa por explicar que os gatos têm um valor inferior aos macacos e depois apresenta as suas tentativas. No final verifica a validade dos valores encontrados.

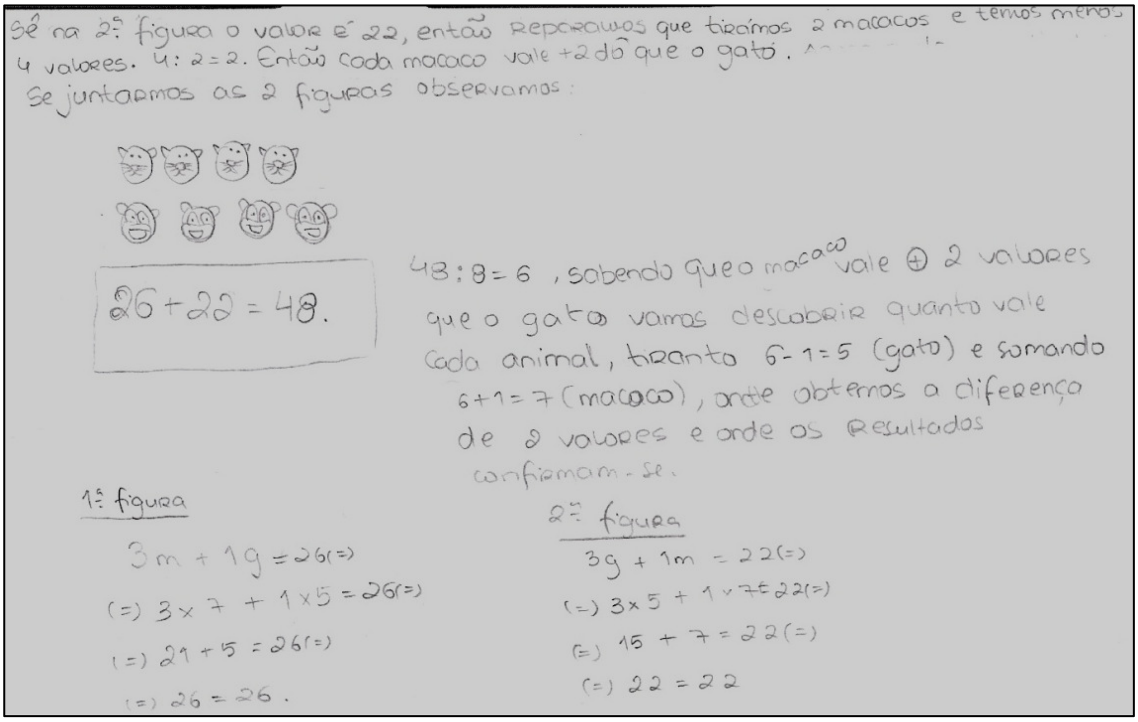


À primeira vista, podemos
concluir que os gatos são
mais leves porque quando temos
3 gatos, a balança baixa.
Eu fui por tentativas, e
peguei no exemplo de um gato
pesar 6, deu 18, depois fiz
22 - 18 = 4, isto no 2º exemplo,
vendo o 1º não dava, então
baixei o peso dos gatos para 5,
somando dá 15, então, os
macacos pesavam 7, pegando
no 1º exemplo em que
temos 3 macacos, fica
3x7 = 21, depois tinha
de somar 5 e fiz 21+5 = 26,
dá todo o peso.

Figura 9. Representação da aluna B.

Modo de representação algébrica/aritmética. Apenas uma aluna apresentou uma resolução que considerámos integrar esta categoria. Recorrendo apenas a procedimentos aritméticos na resolução do problema a aluna acabou por escrever as duas equações referentes a cada uma das imagens apresentadas, e efectuou a substituição dos valores encontrados para verificar a veracidade da solução encontrada, como se pode verificar na figura 10.

A aluna começou por verificar que a diferença entre o valor de cada macaco e o valor de cada gato era de 2 unidades. Depois somou o valor dos dois grupos de animais obtendo 48 para o valor de quatro gatos e de quatro macacos. Dividiu, em seguida, por 8 obtendo o valor médio de cada animal. Dado que a diferença era de 2 a aluna somou e subtraiu uma unidade ao valor médio obtendo o valor do macaco e o valor do gato.



Se na 2ª figura o valor é 22, então reparamos que tirámos 2 macacos e temos menos 4 valores. 4 : 2 = 2. Então cada macaco vale +2 do que o gato.
Se juntarmos as 2 figuras observamos:

26 + 22 = 48.

48 : 8 = 6 , sabendo que o macaco vale ⊕ 2 valores que o gato vamos descobrir quanto vale cada animal, tirando 6 - 1 = 5 (gato) e somando 6 + 1 = 7 (macaco), onde obtemos a diferença de 2 valores e onde os resultados confirmam-se.

1ª figura

3m + 1g = 26 (=)
(=) 3 × 7 + 1 × 5 = 26 (=)
(=) 21 + 5 = 26 (=)
(=) 26 = 26.

2ª figura

3g + 1m = 22 (=)
(=) 3 × 5 + 1 × 7 = 22 (=)
(=) 15 + 7 = 22 (=)
(=) 22 = 22

Figura 10. Representação da aluna C.

Na aula, a aluna apresentou a sua resolução e explicou todos os procedimentos aos colegas.

> *Aluna C*: Aqui temos 3 macacos e aqui temos 3 gatos e um macaco. Aqui tirámos estes macacos mas ficámos com este, não é? Não é?
>
> *Vários alunos*: Sim.
>
> *Aluna C*: Então quer dizer que aqui está uma diferença de 4, então quer dizer que cada macaquinho é mais dois do que os gatos.
>
> *Aluna E*: ya.
>
> *Professora*: e depois a partir dai? Já chegámos à conclusão que o macaco tem que valer mais dois do que o gato. E a partir daqui como fizeste?
>
> [A aluna dirige-se ao quadro e desenha]
>
> *Aluna C*: Estes são os gatos… estes são os macacos.
>
> *Aluna F*: Eles todos juntos pesam o quê?
>
> *Aluna C*: Pesam 26 + 22 que é 48.
>
> *Aluna F*: ya!

Aluna C: então eu depois dividi os 48 pelos 8 animais, não é? … que dá 6, quer dizer se eles fossem , valessem todos a mesma coisa, valiam 6 cada um mas como a gente sabe que os macacos pesam mais 2 então tiramos 1 dos 6 que é o valor dos gatos e fica 5 e somamos 1 aos 6 que é os macacos e fica 7 que é aquilo que vocês já disseram no início e depois a gente vai escrever as expressões… as ….

Aluna B: o sistema de equações!

Aluna C: o sistema de equações e verificamos que a resposta está certa.

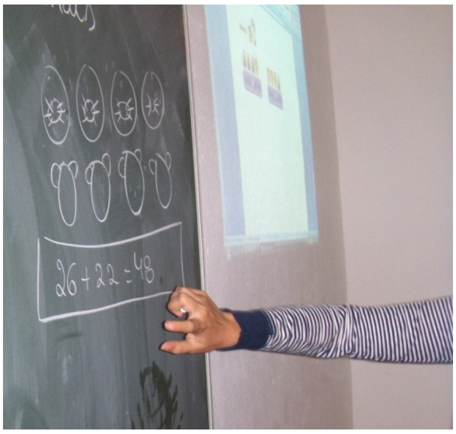


Figura 11. Aluna C a explicar a junção dos valores dos animais.

A explicação da aluna foi decisiva para um maior número de alunos compreenderem o modo de representação que a aluna utilizou. Por outro lado, serviu de suporte para a professora introduzir o método de adição ordenada, agora com recurso ao simbolismo algébrico.

Professora: […] A estratégia que a aluna C usou é uma estratégia muito interessante, vocês reparem que ela juntou tudo, ela juntou os macacos e os gatos todos, então no fundo o que é que ela fez com estas duas equações?

Alguns alunos: Juntou.

Professora: Se eu juntar estas duas equações o que vai acontecer?

Aluna C: dá 4g mais 4m

[A professora escreve no quadro $\begin{array}{c} 3m+g=26 \\ \underline{3g+m=22} \end{array}$]

Aluno E: Isso foi o que a aluna C fez!

Alguns alunos: 4*g* mais 4*m*.

[A professora escreve a soma $4g+4m=$]

Aluno F: 48

Aluno E: É igual ao que a aluna C fez!

Este excerto da discussão permite identificar a correspondência que o aluno E está a fazer entre a resolução apresentada pela aluna C, sem recurso às equações, e o que a professora escreve no quadro. A partir deste momento, os alunos chegaram facilmente à soma do valor de um gato e de um macaco e através da substituição numa das equações encontraram o valor pedido. Para concluir, a professora acrescentou:

Professora: Isto que acabámos de fazer tem um nome, este método em que se somam equações chama-se método da adição ordenada.

Conclusão

Após a análise das representações externas dos alunos, verificámos que quase todos os alunos conseguiram resolver correctamente os problemas e que a maior parte recorreu a um modo de representação aritmética, na resolução dos quatro problemas, conjugando a linguagem natural com o modo de representação pictórico. Conseguiram estabelecer relações de dependência adequadas de forma a obter as soluções, o que está de acordo com o que afirma Kieran (2006) acerca da preferência dos alunos por este tipo de métodos. Entre os processos aritméticos mais utilizados encontram-se estratégias de tentativa e erro e de desfazer. Os modos de representação aritméticos não devem ser desvalorizados, pois os alunos apesar de não estarem a utilizar a linguagem algébrica formal não ficam inibidos de desenvolver o seu pensamento algébrico (Kieran, 1996, 2007; Radford, 2000; Zazkis & Liljedahl, 2002); não expressaram as relações com a simbologia da Álgebra, particularmente com recurso a letras, mas estabeleceram essas relações e mantiveram-nas presentes durante toda a actividade de resolução dos problemas. Para além de terem sido capazes de estabelecer relações adequadas que permitiram obter as soluções, os alunos tiveram a capacidade de, no momento oportuno, recorrer a(s) determinada(s) representação(ões), de tal modo que a manipulação de representações se tornou numa forma matemática activa de encontrar a solução para os problemas. Isto faz supor que os alunos desenvolvem atitudes positivas no sentido de procurarem representações que melhor os ajudem a abordar um problema. O recurso espontâneo a representações alternativas poderá constituir uma estratégia para a superação de dificuldades (Dufour-Janvier et al., 1987).

Consideramos que estes problemas constituíram uma oportunidade para os alunos estabelecerem relações de dependência que os incentivou a pensar algebricamente ao invés de influenciá-los a recorrer simplesmente a um determinado procedimento como é sugerido por Windsor (2010). Permitiu-lhes, por um lado, trabalhar com a ideia de substituição em que os alunos manifestam habitualmente dificuldades (Filloy, Rojano & Solares, 2004) e, por outro, com a ideia de adição ordenada, ambas geradoras de sentido para os métodos formais de resolução de sistemas de equações do 1.º grau.

O facto de pelo menos alguns alunos terem recorrido a representações simbólicas/algébricas mostrou-se importante, pois foi assim possível estabelecer mais facilmente a ponte entre a linguagem aritmética e a linguagem algébrica e formal da resolução de sistemas como era pretendido pela professora.

A discussão em sala de aula revelou-se fundamental pois serviu de suporte para que determinadas ideias relativas ao pensamento algébrico, como o recuso à simbologia algébrica, e a uma perspectiva algébrica da resolução de sistemas fosse desenvolvida. Em paralelo, permitiu aos alunos reflectir acerca das suas estratégias e desenvolver diferentes formas de entender e abordar os problemas propostos (Windsor, 2010).

Reconhecemos que os modos de representação aritméticos e algébricos/aritméticos considerados informais indicam-nos que estes problemas constituem situações propícias para os alunos trabalharem no âmbito das relações de dependência entre variáveis e providenciam uma base consistente para uma representação mais formal (Johanning, 2004). Este aspecto é muito importante, pois tem vindo a ser reconhecida a importância dos métodos informais para encontrar as soluções para determinada tarefa por estes anteciparem os procedimentos formais (Streefland, 1991).

Referências

Arcavi, A. (2006) El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale et al. (Orgs.). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp.29-48). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem solving and the representation of two unknown quantities. In M. Johnsen Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 391–398). Bergen University College.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.). New York, NY: Routledge.

Johanning, D (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: a closer look at students' informal strategies. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 371-388.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *International Congress on Mathematical Education 8: Selected lectures* (pp. 271-290). Seville: SAEM Thales.

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In K. Stacey et al (Eds). *The Future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 21-34). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (2007). Developing Algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1) 5-26.

Mason, J. (1987). Representing representing: Notes following the conference. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 207-214). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1–19.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. G., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Acedido em 26 de Março, 2010, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/ Documents/ProgramaMatematica.pdf.

Preston, R., & Garner, A. (2003). Representation as a vehicle for solving and communication. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9,* 38-43.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 237-268.

Schoenfeld, A. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 479 – 510). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Streefland, L. (1991). Fractions, an integrated perspective. In L. Streefland (Ed), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.

Windsor. W., (2010). Algebraic Thinking: A Problem Solving Approach. In Sparrow, L., Kissane, B., & Hurst, C., (Eds.). *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (pp.665-672). Fremantle, WA: MERGA.

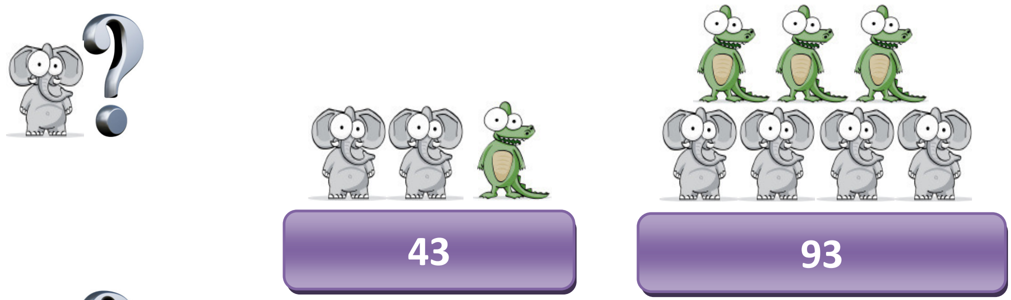
Zazkis, R., & Liljedhal, P.(2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

Anexo

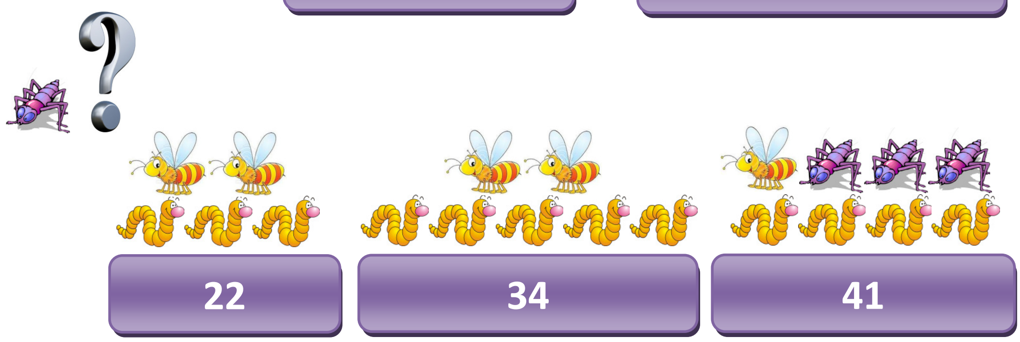
Para cada uma das situações seguintes determina o valor de cada animal pedido. Explica todos os procedimentos.

Situação 1

Situação 2



Situação 3



Situação 4

O SENTIDO DO SÍMBOLO DE ALUNOS DO 10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Daniela Nogueira
Escola Secundária D. Sancho I
danielanogue@gmail.com

Floriano Viseu
CIEd-Universidade do Minho
fviseu@ie.uminho.pt

Resumo

Na transição para o secundário, muitos alunos sentem-se mais à vontade a trabalhar com situações numéricas do que algébricas, o que tende a dever-se a um maior contacto com os números até ao final do 3.º ciclo. No desenvolvimento do pensamento algébrico, ganha relevância a compreensão do sentido do símbolo. O tema das funções do 10.º ano potencia essa compreensão. Recorrendo quanto possível à resolução de problemas, pretendemos averiguar como alunos do 10.º ano desenvolvem o sentido do símbolo no estudo deste tema. Seguindo uma metodologia qualitativa e interpretativa, com o formato de estudo de caso, analisamos os dados que foram recolhidos através da actividade dos alunos, da transcrição de aulas áudio-gravadas, de entrevistas e notas de campo. O estudo envolve três alunos com diferentes desempenhos de aprendizagem – Sílvia, Rui e Rute –, cuja informação é interpretada segundo as três fases que decorreram antes, durante e após a intervenção pedagógica que orientou o estudo das Funções. Os três alunos revelam capacidade de seleccionar a variável, embora Rute nem sempre seja capaz de rever o seu significado; tendem a aplicar preferencialmente algoritmos conhecidos, o que não os ajuda a afastarem-se do significado individual das variáveis e a analisar a expressão no seu todo. Em relação aos papéis das letras, mostram compreendê-las conforme o contexto em que surgem, embora tendam a não distinguir o papel de variável do de incógnita.

Palavras-Chave: Pensamento algébrico, Sentido do símbolo, Funções.

Introdução

A álgebra é um tema matemático que tem merecido uma especial atenção nas sucessivas reformulações do currículo escolar. A importância do seu estudo reside na compreensão e resolução de situações do dia-a-dia como também de pré-requisito para o aluno prosseguir os seus estudos. Porém, a aprendizagem de alguns tópicos algébricos não se torna fácil para muitos alunos. O estudo da álgebra, embora se encontre tendencialmente ligado à manipulação de símbolos e à aplicação de um conjunto de procedimentos, implica que os alunos apreendam os conceitos e as estruturas que permitem expressar relações e traduzir ideias matemáticas (Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2006).

Atendendo à importância da álgebra na formação dos alunos, Kieran (1992) defende que este tema deve começar a ser estudado o mais cedo possível. Actualmente, os diferentes programas da disciplina de Matemática procuram articular entre si, nas mais variadas formas, a transição do estudo de temas a um nível concreto, próprio do currículo do ensino básico, para um estudo mais formal, próprio do currículo do ensino secundário. Procura-se efectuar gradualmente uma "transição entre a aritmética e a álgebra" (NCTM, 1991, p. 121). No entanto, os alunos quando iniciam o ensino secundário manifestam dificuldades na transição do pensamento concreto para o abstracto, o que tende a criar obstáculos ao desenvolvimento da capacidade de generalização, de resolução problemas e do uso de simbologia (Kieran, 1992). Para Vale et al. (2006), a dificuldade desta transição pode dever-se à introdução do conceito de variável, na maioria das vezes, de forma descontextualizada. Arcavi (1994) defende que o desenvolvimento da noção do sentido do símbolo associa a capacidade do aluno de reconhecer o seu poder e de saber quando o seu uso é adequado, a capacidade de manipular e lhe dar sentido em diferentes contextos de modo a que este se torne "pronto para ser posto em acção a um nível quase de um reflexo" (p. 32). Ao apercebermo-nos, de acordo com a nossa prática docente, que os alunos quando chegam ao 10.º ano tendem a procurar mais os processos numéricos do que algébricos para exprimir o seu raciocínio, procuramos averiguar como se desenvolve o sentido do símbolo de alunos deste ano escolar no tema de funções.

O uso de símbolos no desenvolvimento do pensamento algébrico

A álgebra desperta o interesse da investigação na área da educação matemática uma vez que é uma das suas linguagens de expressão. Ao mediar a transição do pensamento concreto para o abstracto, dá-se significado à álgebra como linguagem formal que ajuda os alunos a compreender melhor a matemática escolar. Essa compreensão traduz o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno (Arcavi, 1994; Kaput, 1999; Kieran, 1992) sem ficar preso à escrita da linguagem formal (Arcavi, 1994). A discussão sobre o entendimento de pensamento algébrico faz emergir um misto de aspectos que ajudam a caracterizá-lo. De acordo com as perspectivas de Kaput (1999) e Kieran (1992), trata-se da capacidade que o aluno demonstra para analisar e estabelecer relações, procurando fazer uso delas de modo a aplicá-las em novas situações através de uma linguagem cada vez mais simbólica para expressar e sintetizar as suas ideias. Associado a estes aspectos surge o uso de simbologia e o conceito de variável.

O uso de símbolos permite aglutinar as ideias tornando a informação mais fácil de compreender e manipular (Schoenfeld & Arcavi, 1988; Sfard & Linchevski, 1994). A noção de símbolo surge como um dos modos de representação de conceitos e procedimentos matemáticos, mas estende-se a qualquer coisa que a representa. Para Castro e Castro (1997), o símbolo é um ente que se toma como substituto de algo, ao qual se chama referente. Estes entes podem tomar uma variedade de formas, desde objectos concretos a marcas escritas no papel e podem representar desde conceitos simples a outros mais complexos. A capacidade de usar os símbolos permite manipulá-los no lugar de objectos que representam. Os símbolos matemáticos ajudam a generalizar ideias, a aplicar essas ideias a diversas situações e a facilitar a comunicação sobre elas. Porém, Davis e Hersh (1995) consideram que quando se perde de vista o significado daquilo que os símbolos representam, cai-se no formalismo e no uso perigoso do simbolismo. Castro e Castro (1997) advogam que muitas das dificuldades em matemática procedem de uma ênfase prematura no simbolismo e nas regras sem ter em conta a compreensão do significado matemático do referente. Estes autores defendem que o desenvolvimento da capacidade de usar os símbolos é fundamental, quando se introduzem aos alunos novos símbolos matemáticos, para estabelecer conexões entre o símbolo e o significado a ele associado.

A importância que a actividade de representar e analisar situações usando símbolos algébricos tem na promoção do pensamento algébrico, faz com que Arcavi (1994) defenda que se deve procurar o desenvolvimento do 'sentido de símbolo' (*symbol sense*). Ter 'sentido de símbolo' inclui a capacidade de seleccionar uma representação simbólica, o que faculta ao aluno o poder de decidir quando os símbolos são úteis e como devem ser utilizados para estabelecer relações e generalizar. Na procura de fazer com que os alunos entendam os símbolos, o autor apresenta seis componentes fundamentais: (1) simpatia com os símbolos, que inclui a sua compreensão, o sentido estético do seu poder, permitindo compreender quando e como devem ser utilizados para mostrar relações; (2) capacidade de 'manipular' e 'ler' através das expressões simbólicas, que inclui a capacidade de se afastar dos significados e ao mesmo tempo conseguir ter uma visão global das expressões simbólicas de modo a que as manipulações sejam rápidas e eficientes, em que o aluno faz uma leitura dos símbolos em vez de tentar um algoritmo em busca de uma solução; (3) consciência de que se pode estabelecer com sucesso relações simbólicas; (4) capacidade de efectuar uma escolha apropriada do símbolo; (5) consciência da necessidade de rever os significados dos símbolos durante a resolução de um problema e comparar os resultados obtidos com os esperados e ver a sua adequação ao contexto do problema; (6) consciência de que os símbolos podem desempenhar papéis distintos de acordo com os contextos em que são usados e desenvolver o sentido intuitivo dessas diferenças e a capacidade de trabalhar com eles.

Relacionado com o conceito de símbolo surge o de variável, que Schoenfeld e Arcavi (1988) consideram tratar-se de um conceito central no ensino e na aprendizagem da matemática. Para estes autores, compreender este conceito fornece a base para a transição da aritmética para a álgebra e é necessário para o uso com significado de muitos conceitos matemáticos. Os aspectos dinâmicos do conceito de variável devem ser apresentados aos alunos sempre que for oportuno, podendo-se, numa primeira fase, fazer observações simples de problemas de variação e, numa fase mais avançada, analisar relações de dependência.

Para ilustrar diferentes formas de usar letras em álgebra, Küchemann (1978) usa uma categorização que redefine o significado de variável ao apresentar seis níveis para o uso das letras: *letra avaliada*- a letra pode ser avaliada de imediato sem passos intermédios (se $a+5=8$ então $a=3$); *letra não considerada*- a existência da letra é reconhecida sem que lhe seja dado um significado (se $a+b=43$ então $a+b+2=45$); *letra como objecto*- é entendida como o nome de um objecto concreto (se um rectângulo tem c de comprimento e l de largura então o seu perímetro é $P=2l+2c$); *letra como incógnita*- é entendida como um número específico mas desconhecido; *letra como número generalizado*- representa um conjunto de valores (se $c+d=10$ e $c<d$ então c assume vários valores); *letra como variável*- é entendida como a representação de uma série de valores desconhecidos (na presença de duas expressões do tipo $2n$ e $n+2$ podemos analisar qual delas é a maior). Embora esta categorização ajude a entender o uso das letras por parte dos alunos em várias situações, o autor salienta que o importante em álgebra não é medir a capacidade do uso de técnicas e algoritmos, mas sim compreender como os alunos lidam com certos problemas matemáticos.

Considerando a utilização de variáveis intrinsecamente ligadas à álgebra, Usiskin (1988) advoga que estas são usadas de formas diferentes de acordo com a concepção da álgebra que se considere: (1) *estudo de estruturas*: as variáveis são usadas como símbolos arbitrários nas actividades de cálculo algébrico, tornando-se sinais que se manipulam; (2) *aritmética generalizada*: as variáveis são usadas como forma de traduzir e generalizar modelos; (3) *estudo de procedimentos para resolver problemas*: as variáveis são usadas como incógnitas ou constantes que podem ser simplificadas e onde se pode determinar o seu valor; (4) *estudo de relações entre grandezas*: as variáveis são usadas como argumentos ou parâmetros que permitem relacionar objectos e fazer gráficos. Perante esta pluralidade, o autor reforça a ideia de que o conceito de variável é multifacetado e embora a álgebra se relacione com a compreensão do significado das *letras* e das operações entre elas, limitá-la a este aspecto é muito redutor.

Aliado à capacidade de manipular símbolos surge a capacidade de os interpretar e usar de forma criativa para descrever situações e resolver problemas (Ponte, 2006). A resolução de problemas é uma actividade promotora da compreensão de significados e do uso da linguagem algébrica por apelar à representação de quantidades (NCTM, 2007). Vários estudos corroboram a importância da resolução de problemas no desenvolvimento do sentido do símbolo. Por exemplo, Freire, Cabral e Filho (2004) ao categorizarem as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas, estes apresentaram estratégias simbólicas para representar as suas formas de pensar e exprimirem as suas ideias. Também Goldin (2002) identificou diferentes tipos de representação na resolução de problemas, entre os quais a representação simbólica, que considera serem factores decisivos no ensino–aprendizagem de Matemática, quer pelo uso de um sistema de símbolos, quer pelo papel que desempenham na conceptualização do mundo real.

Método

Com este estudo procuramos averiguar como alunos do 10.º ano desenvolvem o sentido do símbolo no tema de funções através, quanto possível, da resolução de problemas em grupo de quatro elementos. Com este objectivo, realizámos três estudos de caso com alunos de grupos distintos seleccionados em função do seu desempenho de aprendizagem a Matemática no 1.º período do ano lectivo de 2009/10: Rui (bom desempenho), Sílvia (desempenho médio) e Rute (desempenho fraco). Entre os 24 alunos que participaram no estudo optamos por estes três pela pertinência da informação que recolhemos de cada um deles. Os dados foram recolhidos através dos registos escritos que os alunos produziram na resolução das tarefas propostas antes da discussão em grupo turma; da transcrição da gravação da resolução das tarefas por cada grupo (RA); de uma entrevista (E) realizada numa sala de aula a cada um dos três alunos; e por notas de campo (NC). Com a entrevista efectuada após a leccionação do tema das funções, procuramos aceder com mais detalhe ao modo de pensar dos alunos acerca de algumas das tarefas trabalhadas. O estudo das funções do 10.º ano decorreu no 2.º período e no início do 3.º e foi orientado pela valorização da actividade do aluno na resolução das tarefas propostas, que foram elaboradas com base em estudos realizados por Arcavi (1994), Kieran (1992) e Küchemann (1978) e em alguns manuais escolares.

Após uma primeira leitura da documentação reunida procurámos examinar, categorizar e recombinar evidências (Yin, 2005) sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, retirando para este texto a informação relativa ao sentido do símbolo. A informação recolhida foi fragmentada na procura de regularidades mas sem retirar o sentido conferido pelos participantes. Novas leituras a estes fragmentos permitiram, como defendem Miles e Huberman (1994), organizar e sistematizar a informação em torno das seguintes categorias:

(1) *Simpatia com os símbolos*: escolher a variável de acordo com o contexto, revendo o significado dos símbolos usados e percebendo a sua importância na tradução de informações;
(2) *Ler através das expressões*: manipular a expressão através da informação que retirou da sua análise geral ainda que em termos numéricos; afastar-se do significado de um símbolo analisando uma expressão no seu todo podendo a posterior verificar o resultado obtido;
(3) *Distinguir os papéis dos símbolos*: reconhecer quando uma letra assume o papel de incógnita, parâmetro, variável ou número generalizado.

Em cada uma destas categorias, a informação é apresentada segundo o momento em que foi recolhida antes, durante e após a intervenção pedagógica que orientou o estudo das funções.

Desenvolvimento do sentido de símbolo

Simpatia com os símbolos

Antes da intervenção pedagógica. No início do estudo das funções, os três alunos revelam capacidade de interpretar enunciados de problemas próximos dos que trabalharam no 3.º ciclo, como se verifica, por exemplo, na resolução do seguinte problema:

> Os três lados de um triângulo têm diferentes comprimentos. O segundo lado tem mais três centímetros que o primeiro e o terceiro lado mede o dobro do primeiro lado. Como podes representar o perímetro deste triângulo?

Rute usa a letra l para escrever as expressões relativas à medida do comprimento de cada um dos lados e identifica por P o valor do perímetro. Rui e Sílvia usam a letra x para representar a variação conjunta dos comprimentos dos diferentes lados de um triângulo escaleno e a letra P para representar o perímetro do triângulo. Na identificação do dobro de uma dada quantidade Sílvia transforma a soma de dois termos idênticos no seu quadrado (Fig. 1).

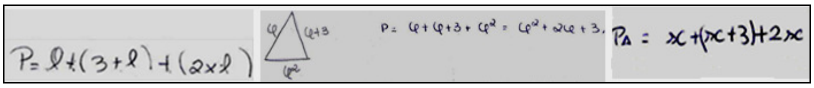
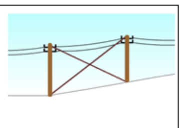


Figura 1: Tradução do perímetro de um triângulo escaleno por Rute, Sílvia e Rui.

Na tradução de enunciados de outros problemas, os alunos tendem a privilegiar o uso da letra x para representar quantidades desconhecidas.

Durante a intervenção pedagógica. Na resolução de problemas que implicam a descoberta de modelos matemáticos, Sílvia e Rui vêem-se confrontados com a necessidade de trabalhar com símbolos para exprimirem o seu raciocínio, como se verifica na resolução do problema “A inclinação dos postes”:

> Em dois postes, distanciados 11m um do outro, medindo um 8m e o outro 7m, foram colocadas duas cordas esticadas ligando o topo de uma à base de outra e vice-versa, tal como é sugerido na figura ao lado. A que distância do solo as cordas se cruzam? Na resolução explica como procedeste para chegar à solução e apresenta os cálculos que efectuaste.



Na abordagem ao problema, Sílvia insere um referencial que lhe permite estabelecer as relações que identifica e escolhe uma letra para representar o desnível do segundo poste em relação à horizontal: “um eixo por aqui, a altura vai aumentar, mas a distância entre os postes vai ser na mesma 11, aqui vai ser $(11, y)$” (RA15).

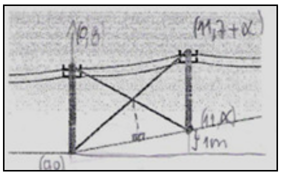


Figura 2: Representação de Sílvia do problema "A inclinação dos Postes".

A aluna escolhe a letra y por esta corresponder à altura no eixo das ordenadas, sem se aperceber que deste modo "está a usar a mesma letra em situações diferentes" (NC10/05/10). Na discussão com os seus colegas de grupo opta por usar α pois "assim não se confunde com o y da função" (NC10/05/10).

Já Rui considera que precisa de "escrever as equações das rectas e calcular a intersecção" (RA15). Designa por x a distância do primeiro poste ao ponto de intersecção, por y a distância deste ponto ao solo no caso de o terreno ser regular e por h o desnível do segundo poste em relação à horizontal. O aluno apercebe-se que no caso de o terreno ser inclinado precisa de "modificar as coordenadas acrescentando um h à altura e fazer o cálculo normalmente até chegar à equação" (RA15) (Fig. 3).

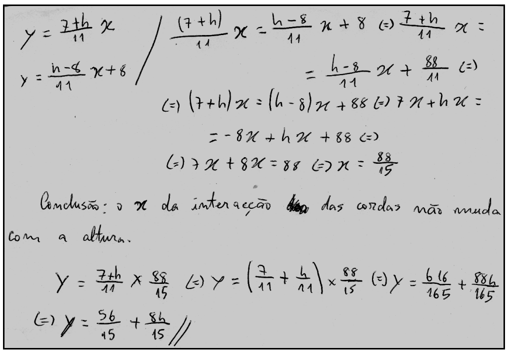


Figura 3: Determinação da altura a que se cruzam as cordas por Rui.

Ao escreverem as coordenadas do segundo poste em função de α, ou a altura em função de h, Sílvia e Rui manifestam que compreendem o significado dos símbolos que escolheram. Rute, embora indicie evoluir em termos de capacidade para escolher um símbolo adequado ao contexto, apenas o consegue fazer perante problemas que envolvem menos variáveis. Neste problema não foi capaz de traduzir a relação simbolicamente, o que a impediu de o resolver.

Após a intervenção pedagógica. Os alunos representam algebricamente a informação que retiram dos enunciados de problemas, usando os símbolos de acordo com o contexto. Por exemplo, escolhem a letra *d* para representar a distância e a letra *t* para representar o tempo, como exemplificam as resoluções de Sílvia e Rute (Fig. 4).

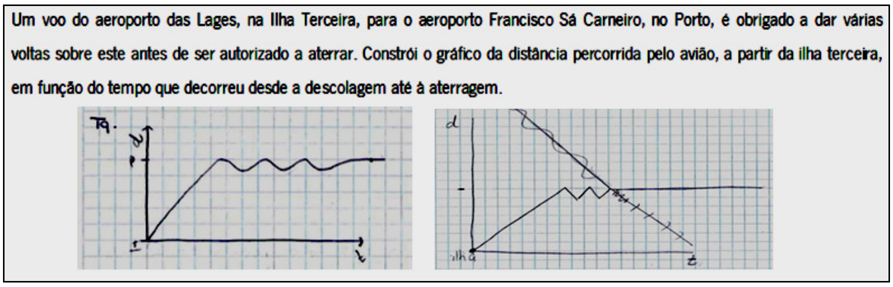


Figura 4: Esboço da distância percorrida por um avião segundo Sílvia e Rute.

Apesar de seleccionarem a variável de acordo com o contexto, apenas Rui e Sílvia, que apresentaram resoluções idênticas, revelam compreender como devem ser usadas as variáveis para mostrar informação. Rute evidencia não rever o significado dos símbolos que escolheu.

Noutra situação em que é pedida uma relação entre as quantidades que representam o número de professores e de alunos, Rui, Sílvia e Rute estabelecem a relação entre as variáveis sem atender à ordem da leitura que fazem (Fig. 5).

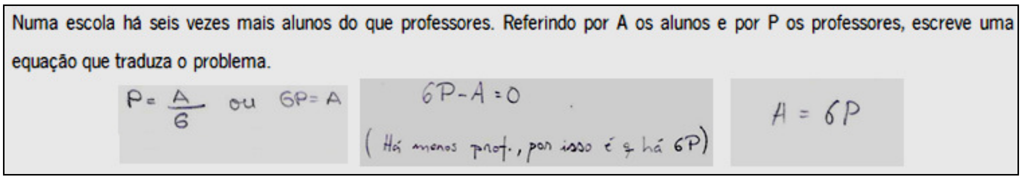


Figura 5: Relação entre o n.º de professores e alunos segundo Sílvia, Rute e Rui.

Sílvia apresenta duas expressões equivalentes, o que revela compreender a relação que estabelece e a dependência entre as variáveis. Rute opta por uma relação de diferença entre duas quantidades e apresenta a respectiva justificação, manifestando compreender o significado das letras que elas representam. Rui apresenta apenas uma expressão e coloca no primeiro membro a letra A, denotando compreender o poder dos símbolos que usou não se deixando influenciar pela ordem de leitura.

Ler através das expressões

Antes da intervenção pedagógica. A noção que os alunos mostram ter sobre o uso de letras surge associada à ideia de que para determinar o valor de uma expressão têm que aplicar um conjunto de procedimentos. Por exemplo, na determinação dos valores que verificam uma equação com várias letras, os alunos indiciam que a equação se pode reduzir à forma $y = p$. Mas, para Sílvia as letras ao serem diferentes significa que não podem assumir os mesmos valores, enquanto para Rute a igualdade entre duas letras leva-a a considerar que ambas assumem os mesmos valores (Fig. 6).

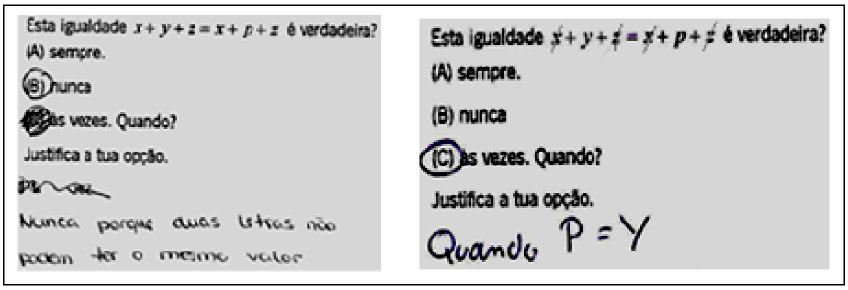


Figura 6: Comparação entre expressões de Sílvia e Rui.

Fruto da actividade que desenvolveram nos diferentes anos escolares, os alunos tendem a considerar o significado de cada uma das letras em particular não analisando uma expressão como um todo. No entanto, Rui apercebe-se da relação entre as duas variáveis.

A capacidade que Sílvia e Rui revelam na análise e simplificação de expressões algébricas inteiras já não é a mesma quando trabalham com expressões fraccionárias. Sílvia atribui valores particulares às letras em vez de procurar relações entre os termos que lhe permitisse simplificá-los. Rui opta por somar os numeradores das fracções como se os denominadores fossem iguais, desembaraçando-se deles como se fosse uma equação. Rute não consegue delinear nenhuma estratégia para simplificar a expressão (Fig. 7).

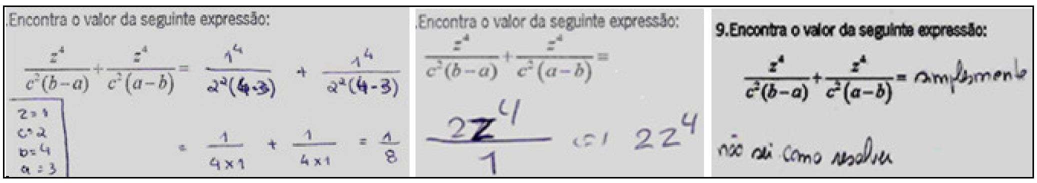


Figura 7: Simplificação de uma fracção por Sílvia, Rui e Rute.

A atribuição de valores diferentes às letras indicia que, para Sílvia, estas não podem assumir o mesmo valor. Ao unir com o sinal de igual a expressão dada com a expressão que obtém pelos valores que atribui às letras, a aluna não distingue o geral do particular. Rui não identifica que os termos são simétricos. Ao simplificá-los revela que não conseguiu ler a expressão.

Os alunos evidenciam diferentes formas de analisar e estabelecer relações entre expressões, como exemplifica a seguinte situação (Fig. 8).

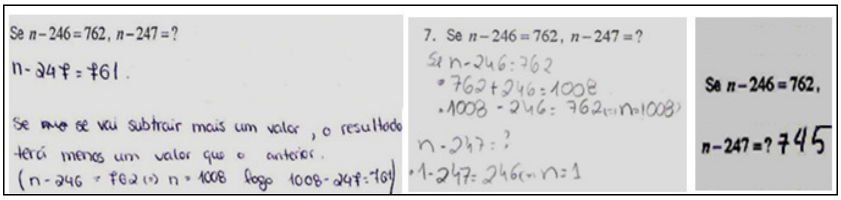


Figura 8: Análise de relações entre expressões de Sílvia, Rute e Rui.

Perante o conhecimento do valor de uma expressão, Sílvia apercebe-se da transformação que tem de fazer para determinar o valor de outra expressão. Exprime essa transformação em linguagem corrente, mas recorre à linguagem simbólica para dar significado à interpretação que efectuou. Rute aplica regras em detrimento de estabelecer relações entre as expressões. Rui apresenta um valor como solução desprovido de qualquer justificação, o que parece resultar da sequência numérica que estabelece entre o subtractivo das duas expressões. Considera o algarismo das centenas do número que traduz a primeira expressão (7) e os algarismos das restantes ordens advém da sequência que o aluno estabelece entre 46 e 47.

Durante a intervenção pedagógica. Os alunos tendem a analisar relações embora prevaleça a aplicação de procedimentos algébricos. Por exemplo, na resolução do problema "Volume das caixas" obtidas a partir do corte de quadrados iguais nos cantos de uma folha A4, Rui e Sílvia começam por conjecturar que o volume é o mesmo procurando provar através da aplicação da fórmula do volume de um prisma (Fig. 9).

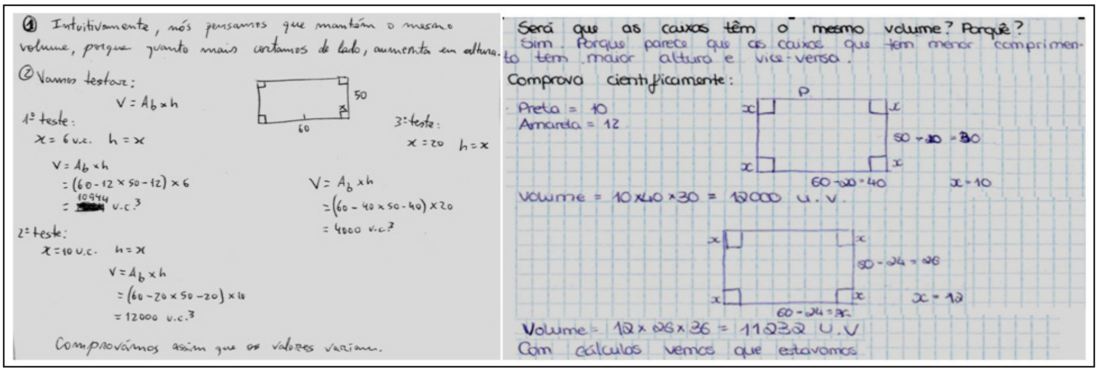


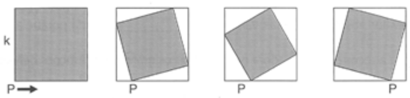
Figura 9: Variação do volume de "caixas" segundo Rui e Sílvia.

Já Rute conjectura que os volumes são diferentes, embora não apresente qualquer esboço nem justificação que ilustre a variação do volume.

Ao obterem valores diferentes para o volume nos casos que testam, aceitam ou refutam a sua conjectura com base num reduzido número de casos, como exemplifica a afirmação de Rui: “depois de todas as tentativas chegamos à conclusão que quanto menor for o corte maior é o volume” (RA17).

Na resolução de outro problema, “Imagens em movimento”, os três alunos mostram capacidade para analisar as relações entre duas variáveis que variam conjuntamente. Sílvia e Rui atribuem letras às variáveis e estabelecem um modelo que representa a situação em causa. Rute apenas usa a linguagem corrente para expressar a sua compreensão da situação (Fig. 10).

Uma loja de fotografia tem um modelo de uma moldura digital. A moldura tem a forma de uma quadrado com 6 cm de lado. Dentro dessa moldura vai-se movendo uma fotografia, também de forma quadrada, gerando sequências de quadrados inscritos, dando movimento à imagem estática, como sugere a figura que a seguir se apresenta.



Quais os possíveis valores para o deslocamento da fotografia dentro da moldura?

Esboçar um possível gráfico, sem fazer nenhum cálculo, que represente a variação da área do quadrado inscrito à medida que o ponto P se desloca.

Estabelecer o modelo matemático que relaciona a área de cada quadrado com o deslocamento do ponto P.

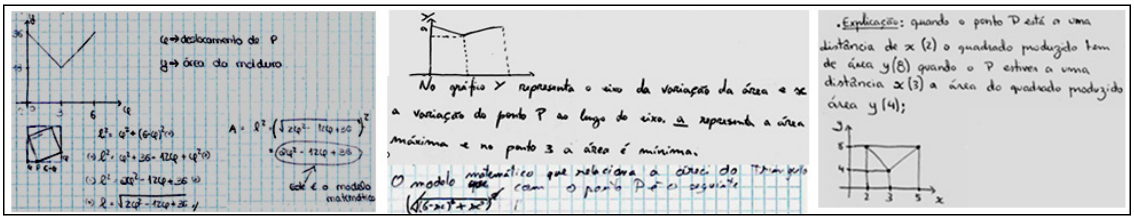


Figura 10: Esboço da variação da área de um quadrado de Sílvia, Rui e Rute.

No esboço gráfico que desenham, Sílvia e Rui preocupam-se em atribuir significado às letras que escolhem para representar as duas variáveis e mostram compreender a relação de dependência de uma em relação à outra. Rute não mostra ser capaz de se afastar do significado de cada uma das letras.

Após a intervenção pedagógica. Os alunos parecem alterar a forma como pensam quando analisam relações. Enquanto Sílvia e Rui antes da intervenção pedagógica procuravam encontrar alguns valores que satisfizessem uma igualdade, agora procuram dar sentido à relação entre as expressões, como se observa na resolução que apresentam de uma equação fraccionária. Embora não conheçam ainda o procedimento de resolução destas equações, apercebem-se da relação que há entre as expressões do numerador e do denominador que constituem a expressão do 1.º membro da equação. Já Rute opta por concretizar a variável para se aperceber dessa relação (Fig. 11).

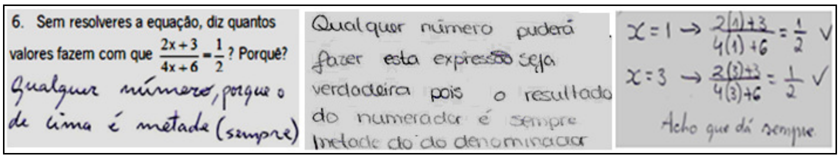


Figura 11: Resolução de uma equação fraccionária por Rui, Sílvia e Rute.

A capacidade de manipular as expressões também se verifica na resolução da desigualdade entre expressões algébricas, embora Rute continue a aplicar regras mesmo em situações em que as expressões não apresentem denominadores ou mais do que uma variável (Fig. 12).

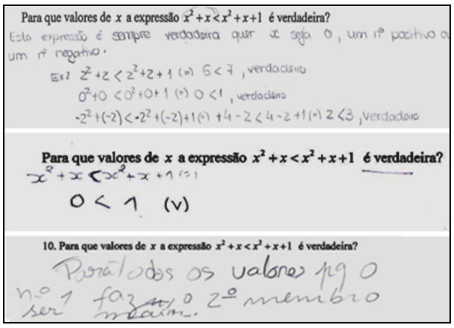


Figura 12: Comparação de expressões por Sílvia, Rute e Rui.

Sílvia, para além de explicar o seu raciocínio através da linguagem corrente, fundamenta a sua resposta através da concretização de três valores. Rute identifica os termos semelhantes e reduz a inequação a uma forma mais simples: "eu fiz de cabeça, cortei x^2 com x^2 e x com x" (NC14/06/10). Constata que a desigualdade é sempre verdadeira independentemente dos valores de x, mas não explicita o conjunto de valores que a variável pode assumir: "se é verdade é porque x pode ser qualquer coisa" (NC14/06/10). Rui apercebe-se que as expressões diferem de uma unidade para qualquer valor que atribua à variável.

Distinguir os papéis dos símbolos

Antes da intervenção pedagógica. Na tradução do significado das letras, como por exemplo nas expressões algébricas $A = c \times l$, $n + 3$ e $a + 1 = 24$, os alunos indiciam compreender que estas nem sempre assumem o mesmo papel (Fig. 13).

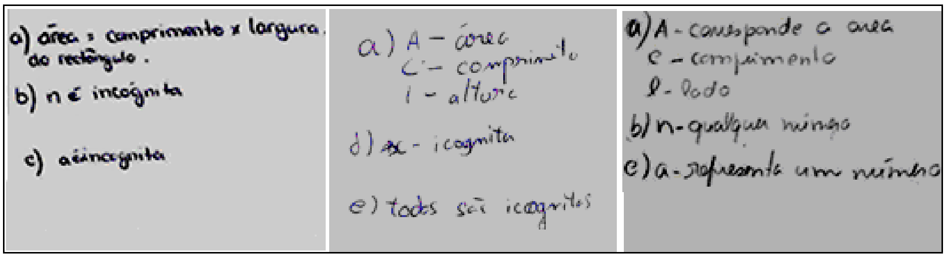


Figura 13: Identificação dos papéis das letras por Sílvia, Rui e Rute.

No caso em que as letras representam uma incógnita ou uma variável, Sílvia e Rui têm tendência a designá-las por incógnita. Rute, ao considerar que as letras representam um número ou um valor desconhecido, tende a vê-las como rótulos ou objectos reconhecendo-as pelo nome da entidade que representam.

Durante a intervenção pedagógica. A análise da influência da variação dos parâmetros que compõem uma expressão que representa uma função quadrática, nas relações que podem estabelecer entre os gráficos, permite aos alunos aperceberem-se dos diferentes papéis que as letras assumem. Sílvia e Rui consideram a influência dos parâmetros na deslocação da parábola sem efectuar qualquer concretização, enquanto Rute necessita de exemplificar substituindo os parâmetros por números inteiros (Fig. 14).

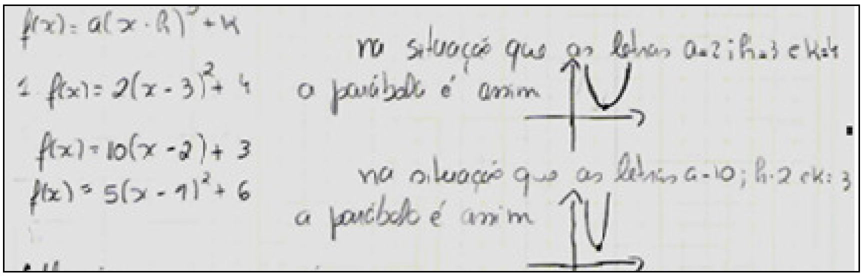


Figura 14: Efeito dos parâmetros na transformação de parábolas segundo Rute.

Os três alunos diferenciam o papel que as variáveis, dependente e independente, desempenham em relação aos parâmetros. No entanto, Sílvia e Rute apenas se apercebem de algumas das transformações, enquanto Rui constata a influência que a variação dos parâmetros tem nas relações que pode estabelecer entre gráficos, quando afirma que "recorri à calculadora e ao experimentar mudar o a, vi as parábolas a virar, e ao mudar os outros vi todas ao mesmo tempo" (RA12).

Após a intervenção pedagógica. Na análise da translação do gráfico de uma função, os alunos reconhecem que há valores associados ao vector da deslocação que podem ser representados por letras e fazem a distinção entre parâmetro e variável. Por exemplo, Sílvia e Rui recorrem à calculadora para comparar o gráfico de $y = x$ com o gráfico de $y = |x|$. A partir do esboço gráfico da segunda função, Sílvia fez uma extensão à família de funções que resultam da translação do gráfico desta função (Fig. 15).

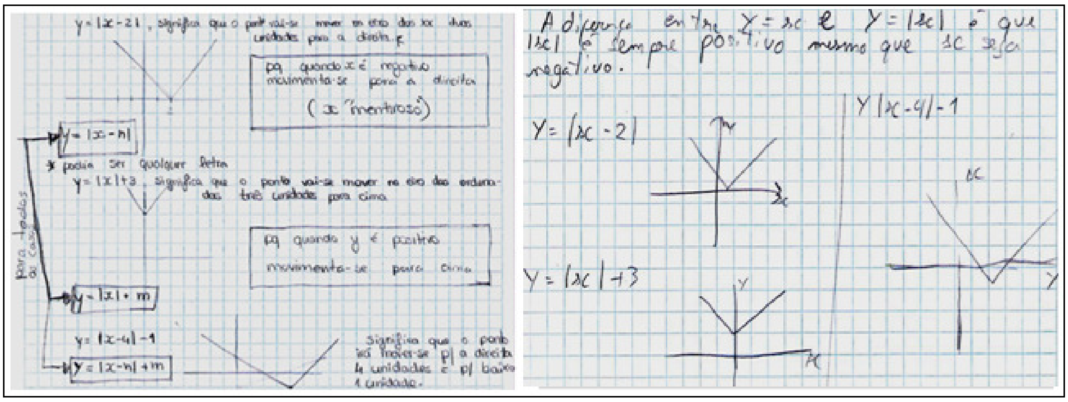


Figura 15: Efeito dos parâmetros na transformação de gráficos segundo Sílvia e Rui.

Da observação de um número limitado de casos, da translação do gráfico da função $y = |x|$, a aluna infere que a deslocação na vertical é intuitiva o que já não acontece na horizontal: "quando somo valores positivos o gráfico sobe, quando somo valores negativos desce; quando faço isso no x é ao contrário" (E). Rui apenas se limita a fazer as suas observações em termos concretos. Apesar de não escrever uma expressão que generalize as transformações que efectuou mentalmente, manifesta compreender a influência dos parâmetros, no caso geral, tendo por isso assumido que o seu raciocínio se aplica em qualquer situação, independentemente do número de unidades que o gráfico original se desloque. Quanto a Rute, reconhece que a variação dos parâmetros influencia a deslocação no eixo dos xx ou no eixo dos yy "porque eu pensei assim, esta é $2x$ tem que cortar o eixo do xx, e esta é $y = 3$, tem que cortar o eixo do yy" (E). Quando tenta explicar o seu raciocínio, baseado nos gráficos das funções linear e constante, decide testar a sua afirmação na calculadora e reconhece que "não me lembrei (…) vai descer duas unidades (…) está a mexer em x, e o eixo dos xx é 'mentiroso', porque está menos e vai deslocar-se duas unidades para a direita" (E). A relação que estabelece entre a expressão algébrica inicial e as seguintes permite-lhe esboçar os gráficos e depreender a influência dos valores que altera.

Conclusões

Simpatia com os símbolos

Sílvia, Rui e Rute iniciam o estudo de funções a traduzir enunciados de problemas da linguagem corrente para linguagem matemática, reconhecendo a utilidade do símbolo que escolhem para estabelecer uma relação. Durante o estudo deste tema, Rui e Sílvia revelam capacidade para rever os símbolos que usam, enquanto Rute tende a escolher símbolos de acordo com o problema, denotando fazê-lo com sucesso em casos em que os problemas envolvem poucas variáveis. Os três alunos, por vezes, recorrem em simultâneo à notação simbólica e à designação em linguagem corrente do que a variável representa, o que para Arcavi (1994) evidencia a capacidade de usar os símbolos de acordo com o contexto. Após a intervenção pedagógica, destaca-se a capacidade que adquiriram para saber quando usar os símbolos. Rui e Sílvia mostram compreender como os usar, numa maior diversidade de situações. Para Arcavi (1994), a capacidade de trabalhar com letras parece ter influência na forma como se usa e compreende os símbolos algébricos. A diversidade de situações em que as letras podem ser usadas e com as quais foram confrontados, parece ter influenciado a capacidade que os alunos adquiriram para seleccionar o símbolo que melhor representa a situação no contexto do problema.

Ler através das expressões

Embora os três alunos privilegiem a aplicação de algoritmos, Rui e Sílvia conseguem manipular expressões através da sua análise global. Rui é quem revela maior capacidade para compreender a relação entre as variáveis quando as expressões são inteiras. Na manipulação de símbolos algébricos, Sílvia nem sempre se preocupa com aquilo que eles representam, o que, em algumas situações, a impede de compreender os resultados que obtém, como foi o caso em que considerou que letras diferentes não podem assumir o mesmo valor. Em situações que envolvem relações com expressões fraccionárias, os alunos não as analisam numa perspectiva global preferindo aplicar regras suas conhecidas, o que parece dever-se a práticas rotineiras e mecanizadas, como defende Kieran (1992).

Durante o estudo, os alunos tendem a fazer as suas conjecturas com base numa análise geral da situação e a posteriori procuram verificá-las através da concretização das variáveis. Como defendem Lins e Gimenez (1997), por concretizações numéricas os alunos inferem algumas das relações. Rui e Sílvia tendem a usar progressivamente uma linguagem simbólica para traduzir as relações que estabelecem procurando dar significado aos símbolos que usam. Rute tende a fazê-lo nas suas próprias palavras denotando uma maior dificuldade em se afastar do significado individual dos símbolos. Assim, os três alunos embora desenvolvam a capacidade de trabalhar com letras, não deixam de inferir algumas relações a partir de casos particulares, o que revela que em expressões que envolvem muitas variáveis nem sempre conseguem ler através das expressões, nem são capazes de as manipular através das informações que dela podem retirar (Arcavi, 1994). A evolução dos alunos parece dever-se ao tipo de tarefas que trabalharam e à possibilidade de as discutir.

Distinguir os papéis dos símbolos

Os três alunos reconhecem que as letras podem assumir diferentes papéis mas nenhum deles os identifica claramente. Na análise que fazem de algumas expressões, Rui, Sílvia e Rute identificam o papel das letras como objecto (Küchemann, 1978), quando estas estão associadas à inicial do nome da entidade que representam. Quando as letras representam incógnitas ou variáveis, Rui e Sílvia tendem a designá-las como incógnita, o que parece resultar do uso acrítico que fazem das letras (Kieran, 1992), como exemplifica a afirmação de Sílvia: "eu acho que é melhor pôr aqui como aparece na máquina" (NC01/02/10). Por isso, Sílvia e Rui tendem a usar, na maior parte das situações, a letra x.

Durante a intervenção pedagógica, os três alunos reconhecem o papel das letras ao distinguirem as variáveis dependente e independente dos parâmetros. Sílvia e Rui nem sempre recorrem à concretização para inferir relações, enquanto Rute tem necessidade de o fazer.

Após a intervenção pedagógica, Sílvia evidencia ter uma noção mais clara do papel das letras, quando afirma: "varia e influencia a forma como o gráfico aparece" (E), ou quando usa letras para generalizar uma relação. Rui, apesar de mostrar capacidade para inferir as mesmas conclusões tende a privilegiar sínteses em linguagem corrente.

Quanto a Rute, de acordo com Kaput (1999), tende a manipular símbolos algébricos sem a preocupação de perceber o que eles representam. Esta aluna evidencia reconhecer que as letras que usa, ainda que de forma arbitrária, assumem papéis diferentes. Este facto, é corroborado pela sua afirmação: "aqui fazia, ia por tentativas, mas não pode ser (…) vou usar letras para representar coisas desconhecidas que assim dá para muitos casos" (E). Este uso arbitrário das letras revela, segundo Lins e Gimenez (1997), uma tendência "letrista. O facto dos três alunos continuarem a revelar alguma dificuldade em identificar o papel das letras quando estas assumem o papel de variável parece dever-se ao múltiplo uso que o conceito de variável assume com o defendem Shoenfeld e Arcavi (1988).

Referências

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. In L. Rico (Coord.), *La educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-122). Barcelona: Editorial Horsori.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Freire, S., Cabral, C., & Filho, C. (2004). Estratégias e erros utilizados na resolução de problemas algébricos. In *Anais do VIII ENEM - Comunicação Científica GT 2 - Educação Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental*. Acedido em 3 de Agosto, 2010, de http://www.proativa.virtual.ufc.br/publicacoes/artigos/fe344475950fa0e968e183661eff2bcb.pdf.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Küchemann, D. (1978). Childrens' understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7 (4) pp. 24-28.

Lins, R. C., & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.* Campinas: Editora Papirus.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook.* Thousand Oaks: Sage.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of the variable. In *Mathematics Teacher, 81* (6), 420-427.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). *Between Arithmetic and Algebra: in the search of a Missing link the case of equations and inequality*. Acedido em 8 de Agosto, 2010, de http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-3/279.pdf.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In F. Coxford (Ed.), *The Ideas of algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2006). Os padrões no Ensino- Aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 193-212). Lisboa: Secção de Educação.

Yin, R. K. (2005). *Estudo de Caso: planejamento e métodos.* Porto Alegre: Bookman.

O SENTIDO DE SÍMBOLO DE UM ALUNO E A ÁLGEBRA DO 12.º ANO

Maria Teresa Grossmann
Colégio Internacional de Vilamoura
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
teg@portugalmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jponte@ie.ul.pt

Resumo

Este trabalho tem por objectivo caracterizar o sentido de símbolo de um aluno do 12.º ano, Diogo, e a sua relação com a forma como trabalha conceitos específicos de Matemática A. A caracterização do seu sentido de símbolo é baseada num quadro de referência que incide na forma como resolve questões de Álgebra envolvendo expressões algébricas, equações, problemas e funções. A metodologia é qualitativa (estudo de caso), sendo a recolha de dados feita por um teste diagnóstico, duas entrevistas e outros documentos escritos pelo aluno. O quadro de referência mostrou ser uma ferramenta útil e adequada à caracterização do sentido de símbolo do aluno. Verificamos que o aspecto mais desenvolvido do sentido do seu símbolo é a manipulação simbólica e que os aspectos menos desenvolvidos são a sua passagem de estruturas mais concretas para mais abstractas, a tendência para atribuir à letra de uma expressão simbólica um único valor e a reduzida flexibilidade em mover-se entre as representações gráfica e algébrica.

Palavras-chave: Sentido de símbolo, Álgebra, Expressões algébricas, Equações, Problemas e funções.

Introdução

Para muitos alunos a Matemática é constituída por um conjunto de regras e procedimentos rígidos, relativos a uma grande quantidade de tópicos compartimentados, sem relação entre si, o que torna impossível a sua retenção e em muitos casos torna inexequível a sua aplicação directa. Por vezes, os professores, na sua ânsia de concluírem os temas, fazem do ensino um caminho rápido para a procura da solução das questões propostas, o que pode constituir um obstáculo ao desenvolvimento do sentido de símbolo, um conceito proposto por Arcavi (1994), para quem os símbolos algébricos são "meios poderosos para resolver e compreender problemas, e para comunicar sobre eles" (p. 33). Desenvolver o sentido de símbolo constitui, também, uma forma de reforçar as três capacidades transversais do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) igualmente importantes no ensino secundário: Resolução de problemas, Raciocínio matemático e Comunicação matemática.

Para trabalhar com os alunos o seu sentido de símbolo, é necessário percebê-lo e avaliar os seus efeitos. Por isso, o objectivo deste trabalho é compreender o sentido de símbolo de um aluno do 12.º ano do ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem da Álgebra. Mais especificamente, procuramos saber:

1. Que sentido de símbolo revela o aluno no modo como resolve questões de Álgebra envolvendo expressões algébricas, equações, problemas e funções?
2. Qual a relação entre o sentido de símbolo do aluno e a forma como aborda questões que incidem sobre os conceitos trabalhados no programa de Matemática A do 12.º ano?

A Aritmética, a Álgebra e o sentido de símbolo

Procurando caracterizar os objectos matemáticos de cada domínio, Ponte (2006), indica que, enquanto no centro da Aritmética estão os números, "no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstractas, que tanto podem ser equações, inequações ou funções como podem ser outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos" (p. 11). Quando se muda da Aritmética para a Álgebra, é necessária uma reconceptualização dos objectos matemáticos representados por símbolos, pois, como indicam Filloy, Puig e Rojano (2008), essa passagem não consiste apenas numa generalização da Aritmética nem numa explicitação do que estava implícito. Estes autores consideram que, para uma construção de certos elementos de sintaxe específicos da Álgebra, é necessária a preservação de uma base aritmética bem consolidada, sendo também fundamental a capacidade de romper com ideias específicas da Aritmética que podem ser um entrave à modificação de algumas noções e à consequente atribuição de sentido aos textos e processos matemáticos da Álgebra.

Sfard e Linchevsky (1994) acrescentam que a transição do operacional para o estrutural implica um avanço na abstracção e generalização. Numa análise a partir de uma perspectiva histórica, consideram que:

> Provavelmente a dificuldade não reside tanto na ideia da utilização de letras em vez de números ou de operações… Mas sim na necessidade de imbuir as fórmulas simbólicas com o duplo significado: o de procedimentos computacionais e o de objectos produzidos. (p. 199)

Este carácter dual da Álgebra simbólica em que a própria expressão encerra em si o processo, visível nos operadores que contém, e é simultaneamente o produto desse mesmo processo, fomenta, pelo menos numa fase inicial, uma certa resistência por parte da nossa intuição (Sfard & Linchevsky, 1994). Lee e Wheeler (1989) estudaram a conexão entre a Aritmética e a Álgebra em 350 alunos de 15-16 anos, concluindo que, para estes, "a Aritmética e a Álgebra são dois mundos dissociados" (p. 44), o que não nos deve surpreender, pois, apesar da utilização de alguns sinais em comum, o que é efectivamente feito em cada uma das áreas é muito diferente.

Para Davis e Hersh (1998), "O que parece inicialmente pouco intuitivo, dúbio e de alguma forma misterioso acaba por se tornar, após um certo tipo de processo mental, numa verdade gloriosa" (p. 149). Apesar dos autores se referirem à demonstração matemática, tais palavras também podem ser aplicadas à forma como se dá sentido à Matemática. O processo mental envolvido neste "dar sentido a" é obviamente a chave da questão e pressupõe um caminho longo e difícil que Sfard (1991) divide em três etapas, *a interiorização*, *a condensação* e *a reificação*.

Kaput (2008) encara a Álgebra um artefacto cultural e o pensamento algébrico uma actividade humana, pelo que considera fundamental a forma como os alunos fazem, pensam e falam sobre a Matemática. No pensamento algébrico Kaput (1999) distingue cinco componentes sobrepostas e interligadas entre si. A primeira é a Álgebra como a generalização e formalização de padrões, considerando que são intrínsecas à actividade matemática e ao pensamento, pressupondo a generalização um alargamento do pensamento e da comunicação para além das situações concretas e sendo a formalização a expressão dessa generalização numa linguagem mais ou menos formal. A segunda é a Álgebra como manipulação de formalismos, criticando fortemente o exercício rotineiro e sem significado da manipulação algébrica na sala de aula que não proporciona aprendizagem com compreensão. Em terceiro surge a Álgebra como o estudo de estruturas abstractas, devendo estas ser ensinadas para a compreensão e devendo partir da experiência matemática dos alunos, em íntima relação com outros temas matemáticos. A quarta componente é a Álgebra como o estudo de funções, relações e de variação conjunta, sendo possível abordar o conceito de função no início da escolaridade sem valores numéricos e sem fórmulas, em contextos significativos para os alunos. Finalmente Kaput indica a Álgebra como um nicho para a utilização de diversas linguagens na modelação e de controlo de fenómenos.

Um outro autor que se tem dedicado à Álgebra e ao seu sentido é Arcavi (1994) que utiliza a expressão "sentido de símbolo". Considera que o simbolismo algébrico deve ser introduzido desde muito cedo em situações nas quais os alunos possam apreciar o poder dos símbolos na expressão, generalização e justificação de fenómenos aritméticos. Segundo Arcavi (2006), todos, ou quase todos, podem desenvolver o sentido de símbolo, mesmo que só parcialmente, e considera que seria um objectivo desejável para a educação matemática tornar o sentido de símbolo uma parte inseparável da Matemática, assim como os sentidos são uma parte integrante do nosso ser (Arcavi, 1994). Não utiliza o termo "pensamento algébrico", que considera demasiado abrangente.

Para Arcavi (1994), os símbolos são o instrumento principal da Álgebra e ter sentido de símbolo é dar significado a esses símbolos. Assim recorre à expressão "sentido de símbolo" em relação à Álgebra como uma continuação do "sentido de número" da Aritmética. Ancora os comportamentos que considera ilustrarem o sentido de símbolo na sensibilidade que o aluno deve ter perante o símbolo, para tomar decisões sobre a sua utilidade, provar relações e aceitar ou rejeitar conjecturas. Para ele, é fundamental que o aluno não perca uma visão global do que está a trabalhar e seja flexível, evitando cair em situações de circularidade ou em manipulações destituídas de significado, e seja capaz de, a partir da inspecção dos símbolos e da comparação dos significados com os resultados da manipulação, sentir o problema**.** A um nível cognitivo mais elevado, o sentido de símbolo deve incluir a habilidade de criar e manipular uma expressão simbólica para um determinado objectivo, tendo em atenção o ganho de significados mais ricos que podem emergir de expressões equivalentes derivadas de manipulação simbólica. Inclui ainda no sentido de símbolo a habilidade de escolher a representação simbólica adequada a um determinado problema sem perder a noção dos diferentes papéis que o símbolo pode desempenhar em diferentes contextos, bem como a coragem de reconhecer quando não é a melhor escolha. O primeiro comportamento que Arcavi (1994) apresenta como ilustrativo do sentido de símbolo é "fazer amizade com os símbolos" (p. 24), o que sugere a necessidade de quebrar as barreiras mentais que os alunos parecem ter perante os símbolos, reconhecendo nestes, à semelhança de um bom amigo, a capacidade de os ajudarem a ultrapassar inúmeras situações problemáticas, que de outra forma seria muito difícil, ou mesmo impossível, de resolver.

O Programa de Matemática do Ensino Básico refere, para a Álgebra do 3º ciclo, "o estudo de relações de diversos tipos (equações, inequações e funções) e da variação, bem como o trabalho com tarefas que envolvam actividades de simbolização e de modelação… A aprendizagem das operações com monómios e polinómios, e da simplificação de expressões algébricas, deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida…" (ME, 2007, p. 55). No ensino secundário espera-se que os alunos complementem e aprofundem a sua compreensão das propriedades algébricas na resolução de equações e inequações e trabalhem com formas equivalentes de expressões e funções, ampliando o seu repertório de funções conhecidas. O programa de Matemática A (ME, 2001) explicita como um conhecimento a ser adquirido pelos alunos, o "interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos, por via intuitiva, analítica e usando calculadora gráfica" (p. 4).

O sentido de símbolo envolve dar sentido à Álgebra e a tudo o que esta integra. Por isso, à medida que avançam nos diversos níveis de escolaridade e crescem como pessoas, os alunos devem desenvolver e aprofundar o seu sentido de símbolo, apreendendo as potencialidades da sua utilização e compreendendo a forma como os símbolos se relacionam e/ou substituem. A resolver equações, a simplificar expressões, a trabalhar com funções ou a modelar um problema, o sentido de símbolo é indispensável. Assim Grossmann, Gonçalves e Ponte (2009), a partir de alguns aspectos descritos por Arcavi (1994), desenvolveram um conjunto de indicadores do sentido de símbolo com base no que é necessário para se efectuar a passagem da Aritmética para a Álgebra. É esse quadro, devidamente adaptado para o ensino secundário, que serve de referência e este trabalho.

Metodologia

Esta comunicação tem por base um estudo diagnóstico mais vasto cujo objectivo é compreender o sentido de símbolo de alunos do ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem da Álgebra. Insere-se no paradigma interpretativo, pretendendo através da interpretação do trabalho do aluno, compreender o seu sentido de símbolo e a forma como ele é visível no seu trabalho com conteúdos do 12.º ano. Usa uma abordagem do tipo qualitativo e assume uma lógica exploratória, sendo algumas das categorias de análise de dados emergentes do próprio estudo.

A investigação tem um *design* de estudo de caso. O objectivo é compreender o sentido de símbolo de um aluno, Diogo, que, no ano lectivo de 2009/10, frequenta apenas Matemática, que vê como " uma disciplina que requer bastante estudo". Este é o último ano em que o sistema de ensino nacional lhe permite inscrever-se no 12.º ano regular para concluir o ensino secundário.

Diogo foi escolhido de um conjunto de seis alunos que realizaram um teste diagnóstico e uma primeira entrevista por revelar, numa primeira análise, um sentido de símbolo cujo estudo parecia ter potencial para evidenciar algumas das dificuldades sentidas pelos alunos no seu trabalho em Álgebra. A primeira autora desta comunicação foi professora do aluno durante a primeira metade do ano lectivo (até à interrupção do Carnaval) por se encontrar a substituir o professor regular. A investigação teve lugar paralelamente à actividade lectiva e não interferiu com o decorrer desta.

Os instrumentos de recolha de dados utilizados são um teste diagnóstico sobre o sentido de símbolo e duas entrevistas, sendo ainda recolhidos outros documentos escritos pelo aluno tais como fichas de trabalho e testes de avaliação internos e externos, sempre realizados individualmente. As tarefas do teste diagnóstico e das entrevistas envolvem expressões algébricas, equações, problemas e funções, sendo escolhidas de modo a permitirem apreender aspectos do sentido de símbolo na resolução escrita e oral do aluno.

O teste diagnóstico e as entrevistas foram realizados na escola, numa sala de trabalho. A primeira entrevista foi realizada no 1.º período pouco depois da realização do teste diagnóstico e de uma primeira análise deste. A realização da entrevista perto do teste pretendeu garantir que o aluno se lembrasse do trabalho que tinha efectuado em cada questão e estivesse em condições de prestar esclarecimentos adicionais. A segunda entrevista foi realizada perto do final do ano lectivo. Trata-se de uma entrevista semi-estruturada e baseada em tarefas e tem o objectivo de obter um conhecimento mais aprofundado do sentido de símbolo do aluno. Tem uma vertente de entrevista clínica na medida em que é baseada em tarefas específicas sobre as quais o aluno trabalha. Ambas as entrevistas foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas. A recolha documental consistiu, para além das respostas do teste diagnóstico e de notas de campo no decorrer das entrevistas, na recolha de outros elementos escritos pelo aluno facultados pela sua professora.

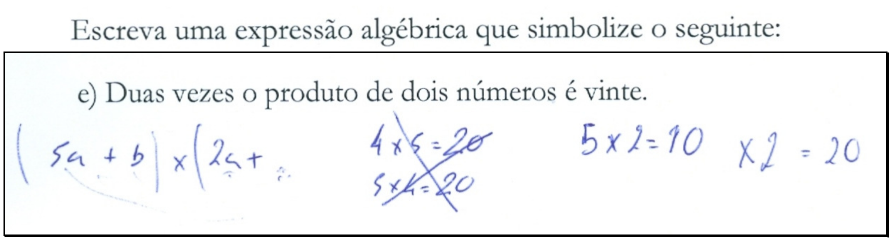
Os dados têm origem no teste diagnóstico, nas entrevistas e nos documentos escritos pelo aluno. A análise tem duas vertentes; a primeira incide sobre o teste diagnóstico, as transcrições das entrevistas e as notas de campo tiradas no decorrer das mesmas e pretende contribuir para a compreensão e caracterização do sentido de símbolo de Diogo e para a reconstrução dos processos utilizados e das dificuldades sentidas, na resolução das tarefas propostas. A segunda tem como finalidade estabelecer uma relação entre o sentido de símbolo do aluno e a forma como este aborda questões que incidem sobre os conteúdos trabalhados no programa de Matemática A do 12.º ano, baseando-se nos documentos escritos pelo aluno em fichas de trabalho e testes de avaliação interna e externa.

A caracterização do sentido de símbolo do aluno tem como base o quadro de referência de Grossmann, Gonçalves e Ponte (2009), adaptado no âmbito deste trabalho, nomeadamente com a introdução do aspecto “compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objecto matemático” como um aspecto do sentido de símbolo em relação às funções (anexo 1). Assim são quatro categorias em análise (expressões algébricas, equações, problemas e funções), procurando-se para cada uma analisar aspectos mais salientes do sentido de símbolo de Diogo.

O sentido de símbolo de Diogo

Expressões algébricas

Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstracta. A dificuldade em utilizar letras quando pensa em números é confirmada por Diogo, numa alínea da primeira tarefa da entrevista, na qual o aluno insiste em trabalhar com valores concretos:



Entrevistadora: Por exemplo, encontraste dois números que verificam essa condição, mas se fosse uma expressão geral, com letras.

Diogo: Com letras…

Entrevistadora: Exactamente.

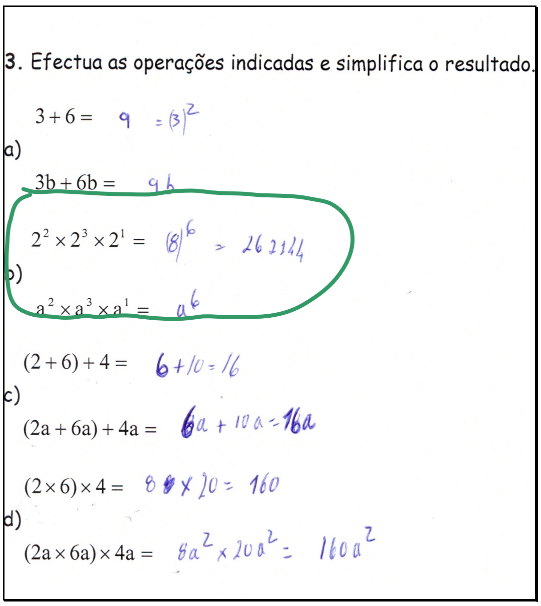
Diogo: Isto das letras…

Entrevistadora: É que para ti é mais fácil pensar em dois números?

Diogo: Eu ainda não consegui perceber isso.

Tendo em atenção a forma como utiliza o símbolo, Diogo não parece ter assimilado o sentido da letra como um símbolo que pode ser utilizado para escrever expressões algébricas sem ter que tomar um valor específico. O aluno sente sempre necessidade de atribuir um número à letra e considera que ela apenas toma esse valor, transportando dessa forma a Álgebra de volta à Aritmética.

A questão 3 do teste diagnóstico pressupunha, em cada alínea, uma passagem do trabalho com números para o trabalho com letras. As respostas de Diogo são as seguintes:


3. Efectua as operações indicadas e simplifica o resultado.

a) $3+6 =$ 9 $= (3)^2$

$3b+6b =$ 9b

b) $2^2 \times 2^3 \times 2^1 =$ $(8)^6 = 262144$

$a^2 \times a^3 \times a^1 =$ a^6

c) $(2+6)+4 =$ $6+10=16$

$(2a+6a)+4a =$ $6a+10a=16a$

d) $(2\times 6)\times 4 =$ $8 \times 20 = 160$

$(2a \times 6a)\times 4a =$ $8a^2 \times 20a^2 = 160a^2$

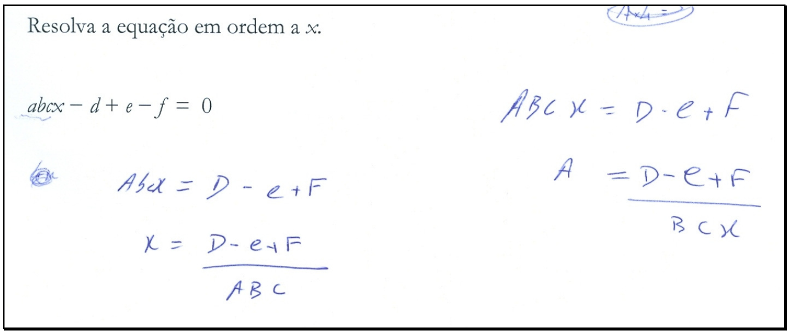
Em relação às regras das potências, o aluno atribui-lhes um sentido que não se baseia na sua compreensão. Considerando o que escreve na primeira parte da alínea *b)* este confirma na entrevista que aplica a seguinte regra: “multiplicar as bases e somar os expoentes”. No entanto, ao responder à segunda parte dessa alínea, Diogo aplica a mesma regra mas indica agora que “as partes literais estão a somar” e daí o resultado apresentado. Ou seja, parece que, para ele, o que está em jogo é a multiplicação $a \times a \times a$ que considera ser uma soma à qual atribui o valor *a*. Neste caso particular a sobreposição de regras e concepções erradas resulta numa resposta correcta mas o caminho que percorre para lá chegar evidencia um fraco sentido de símbolo.

Na alínea *d)*, apesar da aplicação da propriedade distributiva errada, Diogo faz correctamente a multiplicação $2a \times 4a = 8a^2$. No entanto, ao fazer $8a^2 \times 20a^2 = 160a^2$ volta a considerar que $a^2 \times a^2 = a^2$, justificando mais uma vez que as partes literais "estão a somar".

As respostas de Diogo revelam um conjunto de incoerências e uma aplicação de regras matemáticas erradas mas revestidas de algum sentido para o aluno, que traduzem um fraco sentido de símbolo, nas expressões algébricas, na passagem de uma estrutura concreta para uma mais abstracta.

Equações

Manipulação simbólica utilizando os procedimentos adequados. Diogo resolve correctamente algumas questões que envolvem uma manipulação com algum grau de complexidade. Tal é o caso da questão quatro da entrevista clínica apesar de, ao longo da resolução escrita, o aluno ir sempre pedindo confirmação por parte da entrevistadora em relação aos vários procedimentos que vai adoptando.



No decorrer da entrevista, o aluno também analisa com sentido de símbolo a posição relativa das letras numa expressão, concluindo correctamente quando lhe é pedido que resolva a equação em ordem a uma outra letra:

> *Entrevistadora:* (…) Se em vez de te pedir para fazeres em ordem a *x*, te pedir para fazeres em ordem a *a*, o que é que mudava na tua resolução?
>
> *Diogo:* O *def* passava para o outro membro
>
> *Entrevistadora*: Da mesma maneira?

Diogo: Sim.

Entrevistadora: E depois?

Diogo: … Acho que fazia a mesma coisa.

Entrevistadora: Portanto ficaria *a* igual a?

Diogo: a igual a… Posso fazer aqui?

Entrevistadora: Podes, podes.

Diogo: Sim, fazia a mesma coisa.

Entrevistadora: E se fosse o *b* ou o *c*, achas que haveria uma grande diferença?

Diogo: Acho que não, porque está tudo a multiplicar, estes membros. Se estão a multiplicar, depois têm que ir a dividir.

Perante a sexta tarefa proposta na entrevista:

Alguns alunos encontravam-se a resolver um problema. A sua solução foi:

$$\frac{8y-6}{4}=\frac{1}{2}(4y-3)$$

$$2y-6=2y-\frac{3}{2}$$

$$-6=-\frac{3}{2}$$

Os alunos sabiam que a sua resposta não estava correcta mas não conseguiam identificar o que tinham feito errado. Será que tu consegues?

$$\frac{8y-6}{4}=\frac{4y-3}{\cancel{2}}$$

$$2y-6=2y$$

$$\frac{8y-6}{4}=\frac{4y-3}{2}$$

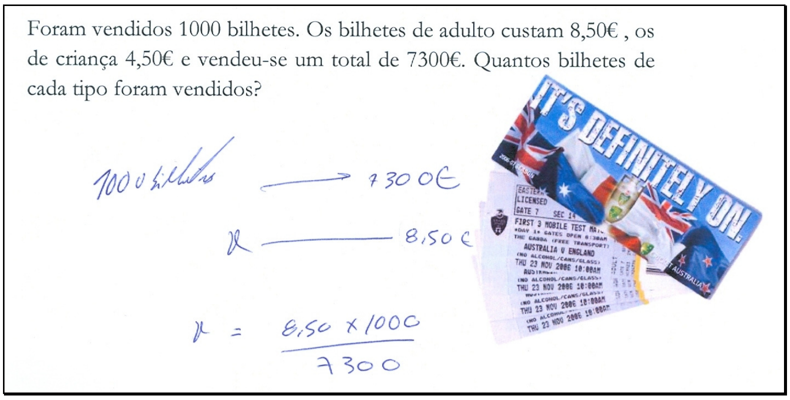
(Sharma, 2000)

O aluno tem dúvidas na simplificação do numerador com o denominador. Na expressão $\frac{4y-3}{2}$, não sabe se deve dividir só o quatro por dois ou dividir também o três. O erro da resolução apresentada na questão baseia-se exactamente nessa operação incorrecta. O aluno identifica o erro no segundo membro (que está correcto) em vez de o identificar no primeiro, obtendo uma condição impossível que não identifica como tal.

Assim, manipulação simbólica recorrendo aos procedimentos adequados parece ser um dos aspectos do sentido de símbolo com algum relevo em Diogo, apesar do aluno nem sempre estar seguro sobre procedimentos essenciais.

Problemas

A utilidade de recorrer ao símbolo e de o interpretar no contexto do problema. Na questão 7, proposta no decorrer da entrevista clínica o aluno reponde da seguinte forma:


Foram vendidos 1000 bilhetes. Os bilhetes de adulto custam 8,50€ , os de criança 4,50€ e vendeu-se um total de 7300€. Quantos bilhetes de cada tipo foram vendidos?

1000 bilhetes ⟶ 7300€

x ⟶ 8,50€

$x = \frac{8{,}50 \times 1000}{7300}$

Diogo: Isto deve ser uma regra de três simples.

Entrevistadora: Achas?

Diogo: Acho que sim.

Entrevistadora: E que condições é que…? Como é que…?

Diogo: Pode ser… quantos bilhetes de cada tipo foram vendidos? 1000 bilhetes.

Entrevistadora: Sim?

Diogo: ...

Entrevistadora: 1000 bilhetes corresponde a 7300?

Diogo: Eu estou a arranjar hipóteses…

Entrevistadora: Sim. E o que é que é o teu *x*?

Diogo: É o 8,50 vezes 1000 a dividir por 7300.

Entrevistadora: Que corresponderia a quê? Esse número?

Diogo: Ao valor de… Supostamente… Não sei, depende do resultado que me der… Dos, da quantidade de bilhetes que custam.

Entrevistadora: 8,5? Os de adulto?

Diogo: Sim.

Entrevistadora: Quanto é que te deu o *x*?

Diogo: 1,17.

Entrevistadora: 1,17.

Diogo: Não deve estar correcto. Quantos bilhetes de cada tipo foram vendidos?

Entrevistadora: Porque é que pensaste na regra de três simples?

Diogo: Não sei professora.

Entrevistadora: E se aí tivesse dado assim um número razoável… De 500 ou…

Diogo: Depois ia achar para o…

Entrevistadora: Fazias o mesmo para?

Diogo: O de 4,5.

Entrevistadora: Para o 4,5. E tinhas maneira de verificar a tua solução?

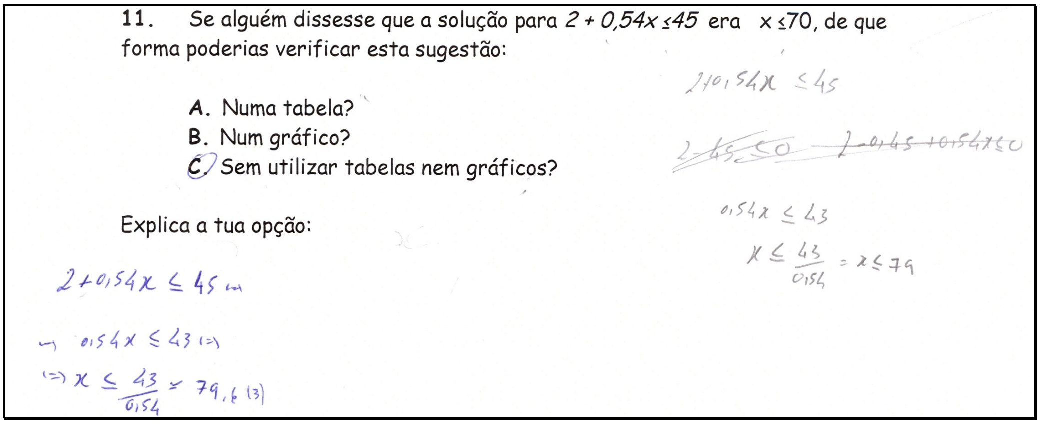
Diogo: Se tinha maneira?

Entrevistadora: Sim. Imagina que arranjavas um número para o *x*. Aí na máquina em vez do 1,17 dava-te um número que te parecia que podia ser. Fazias o mesmo para os outros bilhetes, era? E como é que no fim… Imagina que tinhas dois valores, esses dois valores, tinhas alguma maneira de verificar se estariam bem? Comprovar que não te tinhas enganado. Que esses valores estariam certos?... Não? Ok.

Diogo recorre ao símbolo mas não explica com clareza o que representa *x* limitando-se a tentar dar-lhe um valor. Parece resolver a questão um pouco ao contrário, procurando chegar a valores com a calculadora e, depois, tentando atribuir-lhes significado no caso de eles se enquadrarem no contexto do problema. Apesar de parecer considerar útil recorrer ao símbolo *x*, não o interpreta pois obtém um valor sem sentido no contexto do problema. Das suas respostas na entrevista, depreende-se que se o valor de *x,* apesar de obtido da forma incorrecta, fosse um inteiro positivo, iria considerá-lo correcto, atribuía-lhe significado e seguiria o mesmo processo para obter o outro valor pedido, não conseguindo no entanto indicar uma forma de verificar se a resposta estava correcta. Assim, apesar de obter um valor descontextualizado, o aluno não utiliza essa informação para rever a sua estratégia de resolução e não encontra o erro através dessa análise, revelando nesta situação pouco sentido de símbolo.

Funções

Escolher a representação simbólica adequada, compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objecto matemático. A escolha da representação simbólica adequada pressupõe que o aluno conhece várias representações e sabe trabalhar com cada uma delas com um certo grau de eficiência. Na questão 11 do teste diagnóstico Diogo opta pela resolução analítica da questão em detrimento da utilização do gráfico ou da tabela:

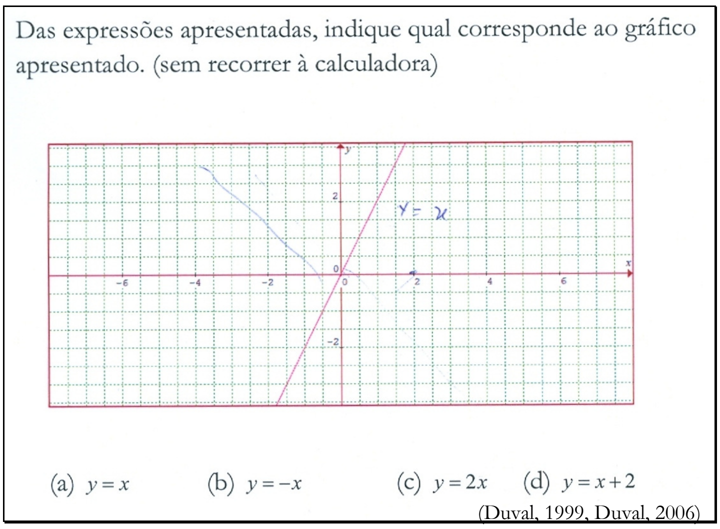


No decorrer da entrevista, Diogo mostra que não compreende como utilizar a tabela ou o gráfico nesta situação, justificando que não tem valores de *x*:

> *Entrevistadora:* Porque é que tu utilizaste a resolução analítica? (…) Porque é que optaste pelas contas e não pela tabela ou pelo gráfico?
>
> *Diogo:* Por… Porque se fizer as contas acho que… Acho que comprovou-se que era o valor indicado, mas se fosse …
>
> *Entrevistadora:* Como farias como uma tabela ou com um gráfico?
>
> *Diogo:* Tinha que saber os valores do x.

Mais uma vez, parece que, para Diogo, tem pouco sentido atribuir a *x* diversos valores, que não são explicitados na questão. Fica assim limitado à manipulação simbólica, o que estreita o seu leque de opções e, consequentemente, a amplitude do seu sentido de símbolo.

A tarefa 12 da entrevista apresenta o gráfico de uma recta e pede que o aluno identifique a sua expressão entre quatro hipóteses:



(Duval, 1999, Duval, 2006)

Entrevistadora: Achas que a recta dada é a recta $y= x$ porquê?

Diogo: Porque como passa aqui…(*Diogo identifica o ponto (0,0)*) se passasse o 2 (Diogo aponta para o ponto (2,0)) dizia que era $y = 2x$.

(…)

Entrevistadora: E se fosse $x +2$? Qual é que seria a diferença?

Diogo: Não sei, por isso é que agora quando tentei explicar esta voltei outra vez à…

Entrevistadora: Aquela.

Diogo: Porque não sei se é esta ou

Entrevistadora: Se era a) ou se era d)?

Diogo: Se era a c) ou a d), quando a recta passava aqui no ponto…

Entrevistadora: Ah!

Diogo: No ponto 2.

Entrevistadora: Não te lembras?

Diogo: É esta.

Entrevistadora: Achas que é a c)? Como é que estás a pensar?

Diogo: Se aqui, se eu digo que y = x.

Entrevistadora: Hum hum…

Diogo: E está no ponto 0, então é porque o valor de x está aqui no valor 0. Se passa para 2, o valor de x é 2, por isso diria que era $y = 2x$. $2x$ tem valor…

Entrevistadora: Onde é que o x tem valor 2?

Diogo: Se passasse aqui na recta.

Entrevistadora: Então qual é a nossa recta?

Diogo: Quando?

Entrevistadora: Esta recta que está traçada, a que…?

Diogo: …$y = x$.

Entrevistadora: Ah. Se passasse aqui é que dirias que era $y = 2x$. Ok

No decorrer da entrevista, Diogo faz confusão entre 2 como ordenada na origem (que situa no eixo horizontal) da recta $y=x+2$ e o declive 2 da recta $y=2x$ e não recorre a nenhuma estratégia que lhe permita encontrar a representação correcta. Termina como começou confirmando que se a recta passasse no ponto (2,0) então a equação seria $y=2x$. O Quadro 1 sistematiza o sentido de símbolo de Diogo nos aspectos analisados.

Quadro 1. Resumo do sentido de símbolo de Diogo

Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstracta (sentido do número para sentido de símbolo). (Expressões algébricas)	Assume um conjunto de regras, algumas erradas mas que considera correctas, às quais atribui um sentido próprio e que utiliza frequentemente. A sua necessidade de atribuir valores concretos às letras que figuram numa expressão algébrica, também dificulta a forma como se move entre a Aritmética e a Álgebra. Sente-se mais à vontade a trabalhar com a primeira (que lhe permite "fazer contas") embora nem sempre o faça de forma correcta. Não vê com clareza, os vários papéis que a letra pode desempenhar numa expressão algébrica e tem tendência a considerá-las como representantes de um único valor.
Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados. (Equações)	Revela destreza, apesar de por vezes se deparar com dúvidas em procedimentos essenciais relativamente simples que podem comprometer o resultado final.
Decidir se é útil recorrer ao símbolo e interpretá-lo no contexto do problema. (Problemas)	Recorre ao símbolo mas quando este não tem sentido no contexto do problema, não utiliza essa informação para reavaliar os seus procedimentos.
Escolher a representação simbólica adequada. (Funções)	Tem alguma dificuldade em trabalhar com algumas representações o que limita a sua escolha.
Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objecto matemático. (Funções)	Opta pela resolução analítica em detrimento do recurso ao gráfico ou à tabela. Não identifica correctamente a representação gráfica de uma recta com a sua equação.

O sentido de símbolo de Diogo e a Álgebra do 12.º ano

O sentido de símbolo de Diogo reflecte-se na forma como aborda questões que incidem especificamente sobre os conteúdos trabalhados no âmbito do programa de Matemática A do 12.º ano. Um aspecto relevante do sentido de símbolo do aluno é a manipulação simbólica. O exemplo seguinte, retirado do último teste intermédio realizado no decorrer do ano lectivo, mostra o seu trabalho num exercício de números complexos no qual ele efectua uma manipulação simbólica utilizando sempre os procedimentos adequados:

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Determine $\dfrac{(1+2i)(3+i) - i^6 + i^7}{3i}$, **sem recorrer à calculadora**.

Apresente o resultado na forma $x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

Grupo II

$i^2 = -1$

1) $\dfrac{(1+2i)(3+i) - i^6 + i^7}{3i}$

$= \dfrac{3+i+6i+2i^2 - (-1) + (-i)}{3i} =$

$= \dfrac{3+i+6i+2\times(-1)+1-i}{3i} =$

$= \dfrac{3+i+6i-2+1-i}{3i} = \dfrac{2+6i}{3i} =$

$= \dfrac{(2+6i)}{(3i)} \times \dfrac{(-3i)}{(-3i)} = \dfrac{-6i-18i^2}{-9i^2} = \dfrac{-6i-18\times(-1)}{-9\times(-1)} =$

$= \dfrac{18-6i}{9} = \dfrac{18}{9} - \dfrac{6}{9}i = 2 - \dfrac{2}{3}i$ c.q.d

$i^6 = ?$

6 |4

2 1

$6 = 4\times 1 + 2$

$(i^4)^1 \times i^2 = 1\times(-1)$

$= -1$

$i^7 = ?$

7 |4

3 1

$7 = 4\times 1 + 3$

$(i^4)^1 \times i^3 = 1\times(-i)$

$= -i$

No entanto, a manipulação simbólica de Diogo é por vezes afectada por alguma insegurança em operações básicas essenciais. Num outro teste intermédio, esse aspecto é visível na resolução de uma equação de 1.º grau e condiciona o sentido de símbolo do aluno num aspecto que este mostra ter desenvolvido com procedimentos mais complexos. O seu trabalho na Álgebra é assim afectado pelo facto de não conseguir dar sentido a procedimentos básicos em algumas manipulações simbólicas.

4. Numa certa região, uma doença está a afectar gravemente os coelhos que lá vivem. Em consequência dessa doença, o número de coelhos existentes nessa região está a diminuir.

Admita que o número, em **milhares**, de coelhos que existem nessa região, t **semanas** após a doença ter sido detectada, é dado aproximadamente por

$$f(t) = \frac{k}{5 - 4\,e^{-0{,}17\,t}} \qquad (k \text{ designa um número real positivo})$$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

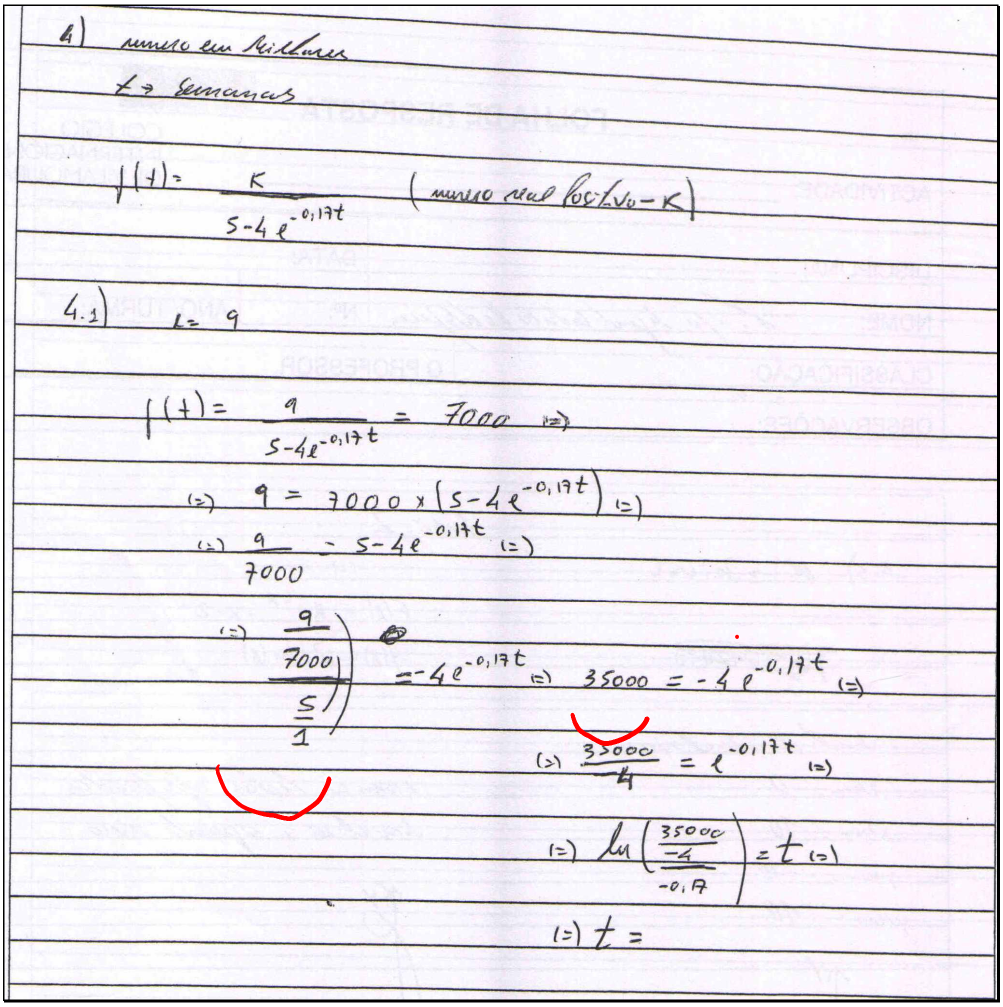
4.1. Suponha que $k = 9$

Ao fim de quantos **dias**, após a doença ter sido detectada, é que o número de coelhos existentes na referida região é igual a $7\,000$?

4.2. Admita agora que o valor de k é desconhecido.

Sabe-se que, durante a primeira semana após a detecção da doença, morreram quatro mil coelhos e não nasceu nenhum.

Determine o valor de k, arredondado às décimas.



4) numero em milhares

t → semanas

$f(t) = \frac{K}{5-4e^{-0,17t}}$ (numero real positivo - K)

4.1) t = 9

$f(t) = \frac{9}{5-4e^{-0,17t}} = 7000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 = 7000 \times (5-4e^{-0,17t}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{9}{7000} = 5-4e^{-0,17t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\frac{9}{7000}}{\frac{5}{1}}\right) = -4e^{-0,17t} \Leftrightarrow 35000 = -4e^{-0,17t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{35000}{-4} = e^{-0,17t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ln\left(\frac{\frac{35000}{-4}}{-0,17}\right) = t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t =$

No teste diagnóstico realizado no âmbito deste trabalho, Diogo revela ter o seu sentido de símbolo condicionado por um conjunto de regras incorrectas que ele considera adequadas, nomeadamente as regras das potências. No exemplo seguinte verifica-se que isso tem consequências no seu trabalho sobre conteúdos do 12.º ano. Trata-se de um exercício que envolve logaritmos e as suas propriedades, o aluno não responde à primeira questão pois não aplica a regra das potências que lhe permitiria fazer $5^{2+\log_5 5^2} = 5^2 \times 5^{loh_5 5^2}$ e a partir daí proceder à simplificação pedida. A sua dificuldade não se prende com as propriedades dos logaritmos, que utiliza bem tanto em 3.1 como em 3.2, mas sim com a regra das potências.

3. Simplifique o mais possível aplicando as propriedades operatórias dos logaritmos:

3.1. $5^{2+2\log_5 2}$

$\cancel{5^{2+\log_5 2^2}}$

$5^{2+\log_5 2^2}$

3.2. $4(\log_{10} x+\log_{10} y-2.\log_{10} z)$

$\cancel{4(\log_{10} x+\log_{10} y-\log_{10} z^2)}$

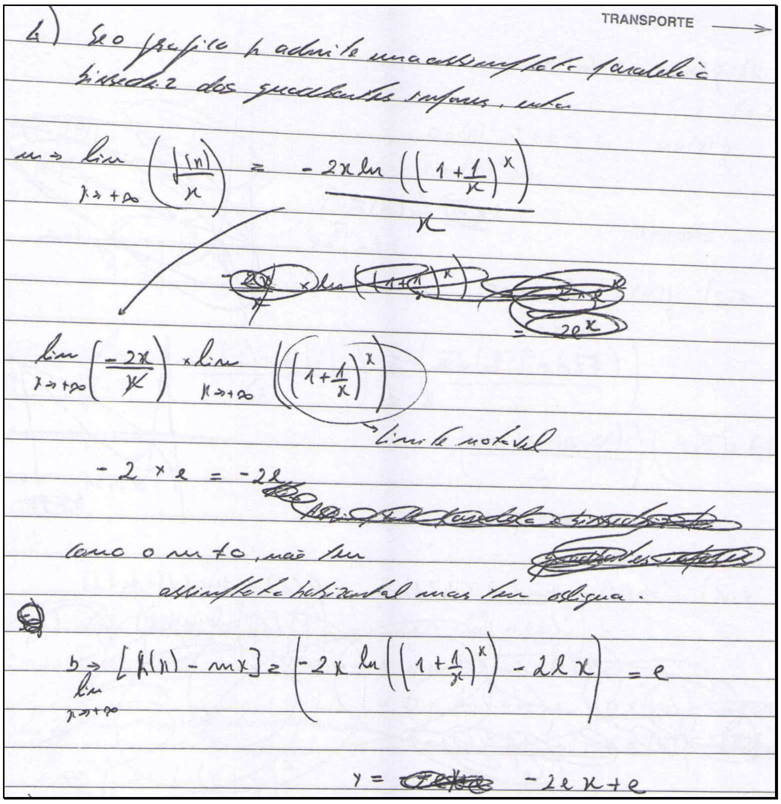
$4\left(\log_{10} x+\log_{10} y-\log_{10} z^2\right) = 4\left(\log_{10} x+\log_{10}\left(\frac{y}{z^2}\right)\right)$

$= 4\left(\log_{10}\left(x \times \frac{y}{z^2}\right)\right)$ ✓

No decorrer da tarefa 12 da entrevista Diogo já tinha revelado pouco sentido de símbolo numa tarefa relacionada com rectas e o seu declive. Esse aspecto parece condicionar o seu trabalho no exemplo que a seguir se apresenta, no qual não identifica os declives das rectas bissectrizes dos quadrantes como $m=1$ e $m=-1$. O aluno não parece dar sentido ao papel de m na equação de uma recta pelo que, apesar de determinar através do cálculo de limites o declive da assímptota, não lhe atribui o papel que ele deve desempenhar.

Seja f uma função de dominio $\mathbb{R}^+$, cujo o gráfico admite uma assimptota paralela à bissectriz dos quadrantes pares. Seja ainda h uma função de dominio $\mathbb{R}^+$ e tal que

$h(x)=f(x)+2x\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$. Prova que o gráfico de h admite uma assimptota paralela à bissectriz dos quadrantes impares.



TRANSPORTE

4) Se o gráfico h admite uma assimptota paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares, então

$m \to \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{h(x)}{x}\right) = \frac{-2x \ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2x}{x}\right) \times \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$

limite notável

$-2 \times e = -2e$

Como o $m \neq 0$, não tem assimptota horizontal mas tem oblíqua.

$b \to \lim_{x \to +\infty} [h(x) - mx] = \left(-2x \ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) - 2ex\right) = e$

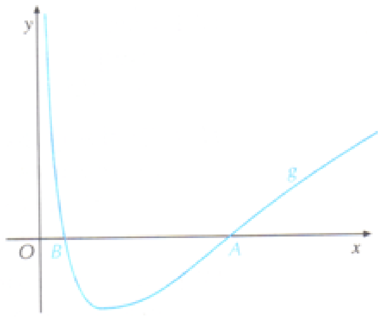
$y = -2ex + e$

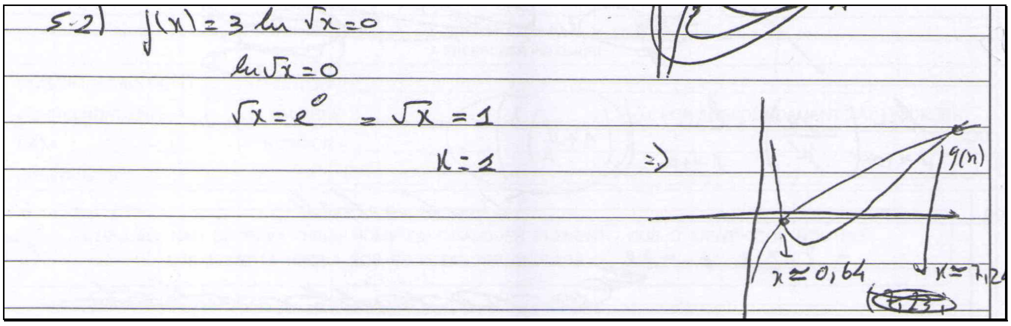
A escolha da representação simbólica adequada reveste-se para Diogo de alguma dificuldade pois não trabalha com as diferentes representações da mesma forma. Neste exemplo, recorre às resoluções analítica e gráfica da mesma questão, mas não estabelece qualquer correspondência entre elas, revelando pouco sentido das diferentes representações do mesmo objecto matemático.

5. Na figura está parte da representação gráfica da função g, que é definida por: $g(x) = -1 + \ln^2 x$.

5.1 Determina as abcissas dos pontos A e B.

5.2 Determina as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos de g(x) e da função f, definida por $f(x) = 3\ln\sqrt{x}$.





O sentido de símbolo de Diogo, retratado anteriormente, é visível e influencia a forma como o aluno trabalha os conceitos do 12.º ano.

Conclusão

Este trabalho permite-nos caracterizar o sentido de símbolo de Diogo tendo por base o quadro de referência indicado (anexo 1). O aluno evidencia dificuldade na passagem de uma estrutura mais concreta para uma mais abstracta, tendendo a atribuir à letra de uma expressão simbólica um único valor, não conseguindo ver o seu papel no contexto de um dado problema e não recorrendo a ela para escrever uma expressão geral. Parece não ter conseguido ultrapassar a especificidade da Aritmética como referem Filloy, Puig e Rojano (2008), nem avançar na abstracção e generalização envolvida na passagem do operacional para o estrutural (Sfard & Linchevsky, 1994). Diogo revela também pouca flexibilidade em mover-se entre as representações gráfica e algébrica, não as relacionando com clareza e não evidenciando o que Arcavi (1994) define como a habilidade de escolher a representação simbólica adequada a um determinado problema. Além disso, o aluno parece ter interiorizado algumas regras muito próprias que utiliza com frequência no seu trabalho sem se questionar sobre a sua correcção, não tirando conclusões a partir da inspecção dos símbolos e da comparação dos significados com os resultados da manipulação (Arcavi, 1994).

A vertente do sentido de símbolo de Diogo que identificamos como a mais desenvolvida é a manipulação simbólica, visível na forma como consegue resolver tarefas exigíveis no 12.º ano, envolvendo cálculo de limites, propriedades dos logaritmos, números complexos, etc. No entanto, os indícios de sentido de símbolo que apresenta quando lida com esses conceitos, acabam por se esvair ao não atribuir sentido a conceitos e procedimentos básicos, que usa por vezes de forma incorrecta. A caracterização do sentido de símbolo de Diogo está em sintonia e tem consequências no seu trabalho na sala de aula e nos testes de avaliação (internos e externos). O seu trabalho surge frequentemente destituído de sentido, o que se traduz em alguma falta de coerência, inclusive ao longo do mesmo exercício e em dificuldades na transferência de conhecimentos e procedimentos para outras situações.

Alicerçado numa base pouco sólida, o sentido de símbolo de Diogo ameaça ruir perante qualquer dificuldade, pois o aluno parece conceber a Matemática como um conjunto de regras que é preciso saber aplicar, mas não lhes reconhece um sentido mais profundo. Tem sempre que escrever, fazer algo, começa invariavelmente por fazer contas, de preferência com a calculadora e tenta encaixar os valores a que chega por esta via na sua resposta, não fazendo nunca uma inspecção dos símbolos nem antes de iniciar o seu trabalho nem quando o termina. A falta de sentido de símbolo manifesta-se assim na sua grande dificuldade em recorrer ao poder do símbolo para corrigir o seu próprio trabalho e para tirar conclusões com fundamento.

Apesar de Diogo ter conseguido concluir a disciplina, ficam as questões: Que utilidade terá a Matemática na sua vida futura? Para que servirá este emaranhado de regras aplicadas ao último tema tratado na aula? Terminado o contacto com a disciplina ser-lhe-á alguma vez possível recorrer a ela para resolver algum problema? Algures no seu percurso escolar algo falhou e as consequências são graves. A passagem para a Álgebra não foi totalmente concretizada e, apesar do aluno conseguir resolver questões algébricas, não compreende o seu significado, não consegue dar sentido ao símbolo, e o que não tem sentido depressa se esquece…

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale et al. (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1998). *The mathematical experience*. New York: Mariner Books.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach.* Boston, MA: Springer.

Grossmann, M. T., Gonçalves, A. S., & Ponte, J. P. (2009). Um enquadramento do sentido de símbolo no 3.º ciclo. *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (p. 547), Braga: Universidade do Minho.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Erblaum.

Lee, L., & Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 41-54.

ME (2001). *Programa do ensino secundário: Matemática A*. Lisboa: Ministério da Educação.

ME (2007*). Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Acedido de http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale et al. (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Sfard, A., & Linchevsky, L. (1994).The gains and pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 191-228.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflexions on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,*1-36.

Anexo 1

Quadro de referência do sentido de símbolo

Expressões Algébricas	Estar familiarizado com os símbolos e o seu significado.
	Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente.
	Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstracta (sentido do número para sentido de símbolo).
	Criar uma expressão simbólica para um determinado objectivo.
Equações	Sentir o problema a partir da inspecção dos símbolos.
	Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados.
	Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado.
	Identificar equações equivalentes procurando novos aspectos dos significados originais.
	Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar.
Problemas	Decidir se é útil recorrer ao símbolo.
	Criar uma expressão simbólica que traduza a situação.
	Interpretar o símbolo no contexto do problema.
	Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjecturas.
	Generalizar.
Funções	Utilizar o símbolo para estabelecer relações quantitativas.
	Escolher a representação simbólica adequada.
	Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos.
	Utilizar o símbolo para modelar situações.
	Compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes.
	Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões.
	Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objecto matemático.

"O SINAL DE IGUAL" – UM ESTUDO VERTICAL

Laura Bandarra
Agrupamento de Escolas Artur Gonçalves, Torres Novas
laurabandarra@hotmail.com

Resumo

O presente artigo tem como foco as perspectivas que os alunos de diferentes ciclos de escolaridade têm do sinal de igual. O estudo é uma primeira abordagem de uma investigação em desenvolvimento dedicada a compreender o pensamento algébrico numa perspectiva de articulação vertical. A recolha de dados relativa a este artigo foi realizada com alunos dos três ciclos de escolaridade, mais concretamente dos 2º, 5º e 8º anos, de turmas em que é leccionado o Programa de Matemática do Ensino Básico. Da análise dos dados conclui-se que alunos de diferentes anos possuem formas díspares de encarar o sinal de igual e que este facto interfere com a compreensão e aprendizagem de conceitos aritméticos e algébricos, e com o desenvolvimento do pensamento relacional.

Palavras-chave: Álgebra, Igualdade, Operacional, Relacional, Vertical.

Introdução

De acordo com as actuais orientações curriculares, a Álgebra escolar deve ser pensada desde os primeiros anos de escolaridade e fortemente ligada aos conceitos aritméticos (NCTM, 2007; ME, 2007). Assim, todos os alunos devem desenvolver o pensamento algébrico, ao longo do percurso escolar, porque os torna poderosos a resolver problemas, expande as suas oportunidades e fornece-lhes um conjunto de ideias matemáticas que são úteis em muitas profissões e carreiras (NCTM, 2007). Desta forma, a competência algébrica revela-se importante na vida adulta, quer no trabalho, quer como preparação para o ensino superior.

A esta visão transversal do ensino e da aprendizagem da Álgebra encontram-se interligadas duas noções fundamentais – a *generalização* e a *simbolização* – categorizadas como o "coração" do pensamento algébrico (Kaput, Blanton & Moreno, 2008), em que a Álgebra surge relacionada com as operações e propriedades aritméticas e o pensamento sobre as relações e formas e respectiva formalização. São também estas duas noções que Kaput (2008) utiliza para caracterizar o pensamento algébrico. Este investigador considera-as os "aspectos nucleares", e associa-lhes ainda três ramos: (i) o estudo de estruturas abstractas; (ii) o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; e (iii) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos.

Neste contexto, a Álgebra escolar não se restringe ao ensino e aprendizagem de um conjunto de regras e técnicas, mas transforma-se numa forma de pensar e raciocinar, em que os alunos generalizam, modelam e analisam situações matemáticas (Kieran, 2007). Desta forma, os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e o formalismo de forma a utilizarem, de forma adequada, a simbologia para registar as suas ideias e conclusões (NCTM, 2007).

No entanto, a simbologia é uma das grandes potencialidades da Álgebra, mas também é fonte de algumas controvérsias e dificuldades de aprendizagem dos alunos (Lannin, 2001). Por exemplo, o sinal de igual é um dos mais utilizados nas aulas de Matemática, mas a maioria dos alunos possui concepções limitadas sobre o seu significado e apenas o encara como operador (Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Carpenter, Franke & Levi, 2003).

O sinal de igual e o pensamento relacional

De acordo com o NCTM (2007), a noção de *igualdade* deve ser desenvolvida ao longo do currículo e associada também à de *equivalência* e *equilíbrio*. Por sua vez, a brochura *Álgebra no Ensino Básico* (Ponte, Branco & Matos, 2009) considera fundamental que os alunos explorem situações em que o sinal de igual surja com significados distintos, nomeadamente como operador (uma operação a realizar), a indicar uma equivalência entre dois objectos matemáticos ou expressões ou para definir uma relação funcional.

Um estudo realizado por Carpenter et al. (2003) revela que os alunos do ensino básico encaram este sinal como um cálculo ou sequências de cálculos a efectuar e, na maioria dos casos, estabelecem uma analogia entre este e o procedimento da calculadora. Para estes investigadores, esta perspectiva sobre o sinal de igual impede que os alunos compreendam determinadas ideias matemáticas básicas e sejam flexíveis na sua representação e utilização. Por exemplo, ao resolverem a situação 8+4 = □+5, a maioria dos alunos considera que a solução do problema pode ser doze (se adicionarem o oito com o quatro) ou dezassete (se adicionarem todos os algarismos da situação ou efectuarem uma extensão do problema, 8+4=12+5=17).

Para McNeil e Alibali (2005), a forma limitada como os alunos encaram a utilização do sinal de igual deve-se sobretudo às experiências matemáticas que vivenciam no ensino básico. Segundo estes investigadores, as situações de aprendizagem mais utilizadas resumem-se sobretudo ao cálculo para obter uma resposta numérica. Também Molina, Castro e Castro (2009) consideram que a visão operacional dos alunos resulta das aprendizagens pré-simbólicas originadas por situações aritméticas tradicionais e de limitações cognitivas.

No entanto, reconhecer e utilizar o símbolo de igual, de forma fluida, para expressar relações constituem ideias matemáticas importantes para a aprendizagem da Aritmética (Carpenter et al., 2003) e da Álgebra (Kieran, 1992; Carpenter, Levi, Franke & Zerigue, 2005). Os alunos que o encaram de forma redutora limitam-se a memorizar um conjunto de regras e manifestam dificuldades na compreensão das equações (Kieran, 1992; Falkner et al., 1999) e dos procedimentos para as resolver (Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006). Nesta situação, para resolver as equações, utilizam preferencialmente estratégias de natureza aritmética (substituem as letras por valores numéricos) ou pré-algébrica (recorrem às operações inversas).

Para alterar este panorama, Carpenter et al. (2003) aconselham a dinamização de discussões, colectivas ou em pequenos grupos, sobre as concepções que os alunos possuem acerca deste sinal. Segundo estes investigadores, tais momentos permitem articular ideias e criar diferentes contextos que desafiam as opiniões dos alunos, e fornecem uma "janela" para os seus pensamentos. Para além disto, afirmam que, ao defenderem as suas concepções, os alunos desenvolvem a capacidade de produzir argumentos matemáticos. Quanto às tarefas a concretizar, consideram que se deve optar pela exploração de igualdades numéricas, que não sejam apenas do tipo a+b=c, em que se analise a veracidade destas ou o preenchimento de espaços em branco. Sugerem também a utilização de palavras e notações para expressar relações (por exemplo, "oito é o mesmo que três mais cinco"). Defendem, ainda, que a concretização destas estratégias permite que os alunos evoluam na forma como encaram o sinal de igual e passem a considerá-lo como uma relação entre expressões numéricas, que até pode ser analisada sem o recurso ao cálculo. Por sua vez, Knuth et al. (2006) consideram que estas situações devem ser concretizadas em todo o ensino básico, pois os alunos que frequentam o final do 3.º ciclo também possuem concepções erróneas sobre este símbolo.

Esta forma de "olhar" para as expressões, igualdades e equações como um todo e de utilizar um pequeno conjunto de princípios matemáticos para estabelecer relações depende do desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos. Este inclui também a capacidade de compreender e utilizar as propriedades fundamentais dos números e operações para estabelecer relações e possuir flexibilidade na concretização de procedimentos (Carpenter et al., 2003; Franke, Carpenter & Battey, 2008). O desenvolvimento do pensamento relacional inicia-se com a compreensão do sinal de igual e edifica-se quando os alunos conjecturam, generalizam e justificam. Este tipo de pensamento revela-se essencial para a aprendizagem da Aritmética e da Álgebra.

Para Carpenter et al. (2003) muitos alunos que terminam o ensino básico não desenvolvem este pensamento e apenas conseguem reproduzir procedimentos rotineiros. Desta forma, não reconhecem que a Aritmética e a Álgebra possuem as mesmas ideias fundamentais e não desenvolvem a sua compreensão da Matemática.

Em termos gerais, a literatura revela que o pensamento algébrico e, em particular, o relacional deve ser desenvolvido desde os primeiros anos de escolaridade. A par disto, considera que devem ser concretizadas situações de aprendizagem que permitam a compreensão dos diferentes significados do sinal de igual, sendo este um aspecto fundamental para a aprendizagem dos conceitos aritméticos e algébricos.

O objectivo e a metodologia do estudo

O presente artigo descreve um estudo desenvolvido no quadro de uma investigação mais ampla que se foca no pensamento algébrico dos alunos dos três ciclos de escolaridade, numa perspectiva de articulação vertical. Tem como objectivo analisar a forma como os alunos de diferentes ciclos de escolaridade encaram o sinal de igual, mais concretamente, o significado que atribuem a este sinal quando exploram determinadas tarefas.

A recolha de dados foi realizada com alunos dos três ciclos de escolaridade, nomeadamente uma turma do 2.º ano, outra do 5.º ano e duas do 8.º ano, de três escolas distintas do concelho de Torres Novas (uma por cada ciclo), com as quais trabalho regularmente[1]. Para a selecção das professoras titulares destas turmas tive em consideração os seguintes aspectos: (i) existência de hábitos de trabalho colaborativo; (ii) proximidade geográfica; (iii) possuírem formação no PMEB; e (iv) manifestarem interesse em colaborar comigo neste estudo. Por sua vez, as professoras seleccionaram as turmas com as quais possuem uma boa relação e conhecimento, tanto a nível global como individual.

Note-se que os alunos dos 2.º e 8.º anos de escolaridade encontram-se no segundo ano de implementação do PMEB e os do 5.º ano de escolaridade no primeiro. Os alunos do 2.º ano exploram situações que permitem desenvolver o sentido do número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, e utilizam estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos (ME, 2007). As aulas dos alunos do 5.º ano de escolaridade são planificadas de acordo com as orientações do PMEB, mas a professora titular da turma salienta que a maioria dos alunos não compreende o significado do sinal de igual. Por sua vez, no ano anterior, ao explorarem tarefas relacionadas com o subtópico *Equações do 1.º grau*, os alunos do 8.º ano de escolaridade manifestaram algumas dificuldades em compreender a noção de *equação* e a resolver equações do 1.º grau, utilizando as regras de resolução.

A recolha de dados relativa a este estudo exploratório foi realizada durante os meses de Fevereiro e Março de 2011. Durante este processo, assumi o papel de observadora participante. Numa primeira fase, planifiquei com as professoras e acompanhei a exploração das tarefas e posteriormente reflecti em conjunto com elas sobre os resultados obtidos.

Foram concretizadas algumas tarefas que incluem o uso do sinal de igual pelos alunos e recolhidos os dados que permitem fazer a análise do significado que os alunos atribuem a este sinal. Estas tarefas foram inspiradas na literatura de investigação consultada e também na brochura *Álgebra no Ensino Básico* (Ponte et al., 2009) orientada pelo PMEB.

[1] Actualmente exerço o cargo de Professora Acompanhante do Plano da Matemática e do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB). Neste âmbito, dinamizo reuniões regulares de planificação, elaboração e concretização de materiais e discuto possíveis estratégias a implementar na sala de aula com os professores das escolas que acompanho. As turmas referidas neste estudo pertencem a professores que acompanho profissionalmente neste contexto e que manifestaram interesse em compreender as razões das dificuldades dos alunos em usar de forma adequada o sinal de igual, em especial no 3.º ciclo.

A recolha de dados relativa aos alunos dos 2.º e 5.º anos tem como referência as tarefas 1[2] e 2[3] que a seguir se apresentam:

Tarefa 1:

Completa os seguintes espaços em branco:

12-4=13-	-6=15-7	14-9= -10
9-4= -3	17- =18-8	

Os dados recolhidos foram diversificados. Relativamente aos 2.º e 5.º anos, foram registadas em áudio ou vídeo as justificações que os alunos apresentaram na realização das duas tarefas indicadas, bem como recolhidos os registos escritos que produziram.

No caso do 8.º ano, optou-se pela realização de um inquérito aos trinta e seis alunos das duas turmas que, no ano lectivo anterior, manifestaram muitas dificuldades na compreensão da noção de *equação* e na aplicação dos procedimentos algébricos para resolver equações de 1.º grau. Este instrumento foi aplicado no início da abordagem do tema *Álgebra*, no tópico *Equações*, com o objectivo de captar os significados que os alunos tinham interiorizado relativamente ao sinal de igual.

O inquérito continha cinco questões de resposta aberta, mas neste artigo irei analisar as respostas a apenas três situações. Para realizar este instrumento baseei-me nas situações propostas nos estudos realizados por Carpenter et al. (2003) e Knuth et al. (2006).

Para classificar as respostas fornecidas pelos alunos, verifiquei se a perspectiva que transmitiam era relacional ou operacional. Assim, uma resposta foi categorizada de *relacional* se a opinião do aluno residia na utilização do símbolo de igual para representar uma igualdade de expressões, e de *operacional* se o aluno considerava que o símbolo de igual representava o resultado a obter.

[2] Inspirada em Carpenter et al. (2003) e Molina et al. (2009).

[3] Retirada da brochura *Álgebra no Ensino Básico* (Ponte et al., 2009)

Apresentação e análise de dados

Os alunos do 2.º ano

Os vinte alunos do 2.º ano de escolaridade que exploraram estas tarefas já tinham analisado situações semelhantes. Apresenta-se de seguida excertos de aula onde se realizou a Tarefa 1 e a Tarefa 2, e inclui-se a análise do significado que os alunos atribuem ao sinal de igual.

No início da aula em que se realizou a Tarefa 1, a professora referiu que já tinha explicado anteriormente o significado do sinal de igual e que os alunos deveriam sombreá-lo a vermelho para reforçar a ideia de "que as coisas eram iguais dos dois lados". Quando iniciaram a exploração das situações, a professora lembrou esta justificação e os alunos coloriram o sinal de igual.

Após uma breve explicação das tarefas, os alunos individualmente preencheram os espaços em branco, manifestando, por vezes, dificuldades na compreensão da subtracção. Depois de alguns minutos de exploração, a professora colocou, no quadro, uma folha contendo o enunciado das tarefas e solicitou a alguns alunos que registassem as suas respostas e explicassem à turma os seus raciocínios.

Para resolver a primeira situação da Tarefa 1, 12-4=13- , João produziu a seguinte justificação:

> No 12 tiro 2 e ponho 3…é como juntar um. Para ter o 13 do outro lado, tenho de colocar mais 1 no 12. Se junto 1 no 12 tenho que tirar 1 do 4. Se em vez do 12 tenho o 13, tenho de juntar 1 ao 12 então tenho de juntar também 1 ao 4.

Podemos verificar que João analisou a igualdade numérica na sua totalidade e respondeu de forma correcta. Desta forma, manifestou que compreendeu a subtracção nos sentidos retirar, comparar e completar.

Quando João comunicou o seu raciocínio à turma, um aluno, Dinis, colocou o dedo no ar e afirmou que não concordava com essa justificação. Perante esta situação, a professora solicitou a Dinis, que indicasse como realizou o exercício. Nesta fase dos trabalhos, decorreu o seguinte diálogo:

Professora: Que número colocaste?
Dinis: Coloquei o 6.
Professora: Então diz lá….12-4…
Dinis: Dá 6.
Professora: Diz lá…13-6
Dinis: Dá 7. Ah! Tem de ser o 5.

Desta forma, a professora associou o significado do sinal de igual à igualdade de resultados entre operações.

Para a segunda situação, -6=15-7, Dinis utilizou um raciocínio muito semelhante ao do João e respondeu correctamente que "é 14 porque temos que tirar menos 1 do 7 e se no outro tem 6, temos que tirar menos 1". Desta forma, este aluno manifestou que encara a igualdade numérica como um todo e subtraiu, recorrendo a estratégias de cálculo mental.

Ao resolver 9-4= -3, Rafael comentou que colocou o valor 8, mas que considerou que deve ser 6. Perante esta afirmação, estabeleceu-se o seguinte diálogo entre este aluno e a professora:

Professora: Quanto é que dá 9-4?
Rafael: 5.
Professora: E 6-3?
Rafael:3.
Professora: Então dá o mesmo dos dois lados?
Rafael: Não.
Professora: Olha… coloca os resultados em cima, para perceberes melhor.
(Rafael escreve os valores por cima de ambos os membros da igualdade)
Rafael: Oh, não dá.
Professora: Então ? Qual é o número que dá?
Rafael: o 5.

Desta forma, para ajudar o aluno a resolver a situação de forma correcta a professora propõe a realização de registos informais.

Durante a resolução da situação 17- =18-8, Gonçalo enunciou o seguinte raciocinio: "olhei para a casa das unidades e vi que que era 8. 18-8 dá 10. Tenho 8 e 8. Na outra tenho de por 7 para ser 17 e 7."

Por fim, Miguel resolveu o último exercicio, 14-9= -10, de forma incorrecta, pois considerou que a solução era 5. Para justificar este valor, o aluno afirmou o seguinte:

"Eu meti 5 porque se tirarmos de 10, 5 fica 5". Perante esta afirmação, a professora lembrou o aluno e o resto da turma da história das maçãs.

> Lembram-se quando contei a história das maçãs? Tinha maçãs num bolso e no outro bolso e tinha que tirar. Lembram-se quando eu não tinha nada no bolso…tinha 0 maçãs? Eu podia tirar 45 maçãs?

Perante esta intervenção da professora, os alunos cometaram que não poderiam retirar as quarenta e cinco maçãs e que apenas se deveria utilizar um valor mais pequeno do que o número total de maçãs. Em particular, Miguel percebeu que o valor inicialmente proposto, cinco, não é o correcto e alterou a sua resposta para quinze.

Analisando este momento da aula, verificamos que, para auxiliar os alunos na resolução de uma situação, a professora recorreu a um problema já explorado, que envolvia as operações com os números naturais.

Depois de analisarem as respostas e os raciocínios de alguns alunos e esclarecerem algumas dúvidas pontuais que foram surgindo, os alunos resolveram a Tarefa 2. De acordo com as informações fornecidas pela professora, durante a planificação desta aula, estes alunos já tinham explorado situações análogas.

Da análise dos registos efectuados pelos alunos durante a exploração desta tarefa, verificamos que estes utilizaram estratégias diferentes para explicar os seus raciocínios.

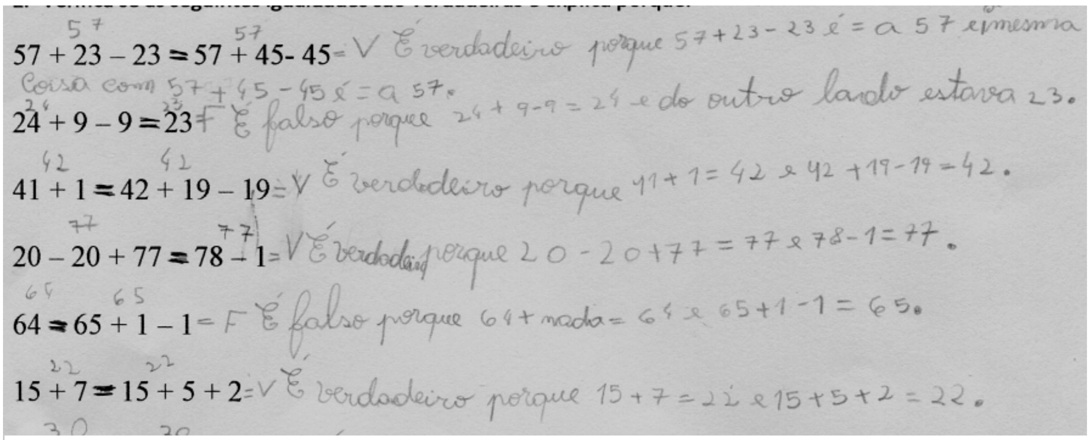


Figura 1. Resolução efectuada por Ana na Tarefa 2

Observando as justificações de Ana, constatamos que a aluna destaca o sinal de igual, efectua as operações indicadas, utilizando a representação horizontal, e verifica se os resultados são os mesmos em ambos os membros da igualdade. Ana considera que a afirmação é verdadeira se os valores obtidos são iguais e falsa na situação contrária. Desta forma, a aluna reconhece que o sinal de igual pode ser utilizado para expressar uma equivalência.

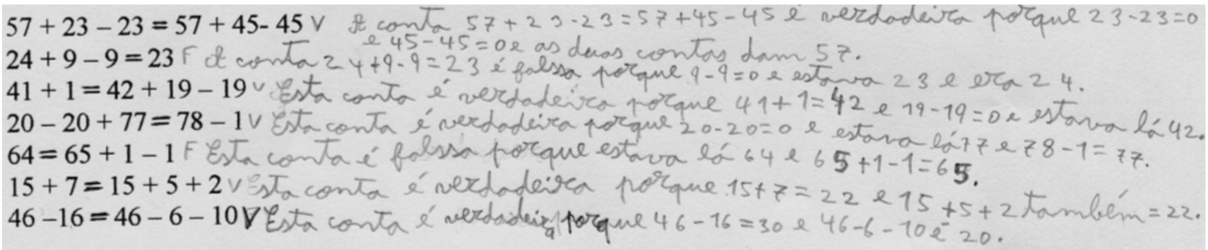


Figura 2. Resolução efectuada por Teresa da Tarefa 2

Por sua vez, Teresa encara a igualdade como um todo e verifica que em algumas situações existe a adição e subtracção do mesmo valor e que o resultado destas operações é zero. Para os restantes casos, a aluna efectua as operações e regista os seus raciocínios de forma clara, utilizando a representação horizontal e estratégias de cálculo mental escrito.

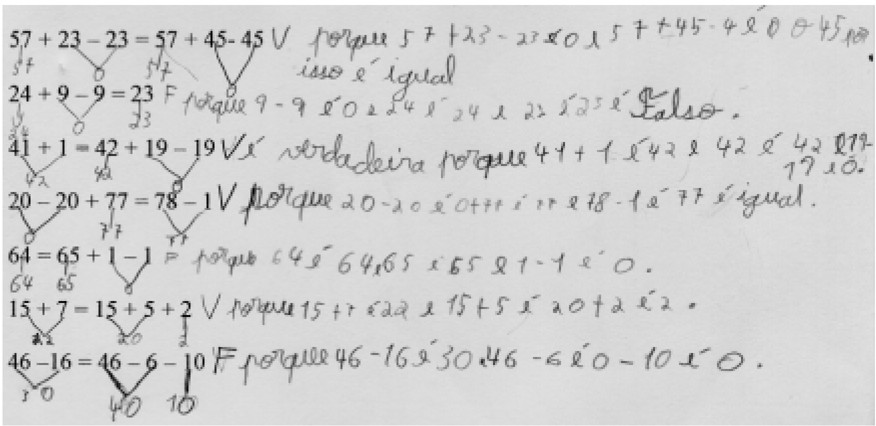


Figura 3. Resolução efectuada por David da Tarefa 2

Já David encara a igualdade como um todo, utiliza esquemas para realizar subtracções cuja diferença seja zero, regista em linguagem natural estes valores e verifica se existe uma igualdade numérica de resultados. Caso isto ocorra, o aluno considera que a afirmação é verdadeira; na situação contrária, atribui o valor lógico Falso. Da análise do seu trabalho, podemos, ainda, verificar que David resolve de forma incorrecta a última igualdade numérica, pois, embora registe que o resultado da subtracção de 46 com 6 é 40, na sua justificação considera que esta diferença é zero.

Na discussão global dos resultados obtidos realizada com o grupo-turma, os alunos apresentaram esquemas e raciocínios idênticos aos de David. Nesta fase da aula, a maioria dos alunos resolveu e justificou correctamente as diversas situações.

No entanto, Alexandre utilizou uma estratégia incorrecta para a situação 41+1=42+19-19, pois adicionou 42 com 19 e subtrai 19 com 19. Perante esta resolução, a professora lembrou os alunos que já trabalharam com exercícios semelhantes e que não deveriam utilizar os mesmos valores duas vezes. Desta forma, com esta ajuda, o aluno consegue resolver correctamente o exercício.

Por sua vez, Liliana afirmou que não consegue resolver as duas últimas situações porque "as outras dão sempre zero de um lado e do outro e aqui não dá". Perante isto, a professora solicitou a esta aluna que resolvesse a penúltima situação, 15+7=15+5+2. Com a ajuda de alguns alunos da turma, Liliana adicionou correctamente as diversas parcelas, utilizando a representação horizontal, e concluiu com sucesso o exercício.

Em termos gerais, os alunos desta turma encaram o sinal de igual de uma forma relacional. Consideram a igualdade como um todo e usam estratégias de cálculo, mental ou escrito, baseadas nas propriedades das operações e nas relações entre números e operações para concluir se existe um equilíbrio nos resultados obtidos. Nas operações com os números naturais utilizam a representação horizontal e entendem os sentidos retirar, completar e comparar da subtracção.

Joana e Mafalda - As alunas do 5.º ano

Em relação ao 5.º ano de escolaridade, apresento a forma como duas alunas encaram o sinal de igual ao explorarem cinco tarefas matemáticas, no decorrer de uma entrevista. Duas destas situações eram comuns às que foram analisadas pelos alunos do 2.º ano, o que possibilitou também comparar as justificações dos alunos dos 2.º e 5.º anos.

Joana e Mafalda possuem um desempenho regular na disciplina de Matemática. Foram seleccionadas para esta entrevista pela sua professora de Matemática porque manifestaram interesse em colaborar neste estudo e gostam de participar em actividades extra lectivas.

Sobre o significado do sinal de igual, Joana possui ambas as perspectivas: a relacional e a operacional. Afirmou que este pode representar um resultado ou uma igualdade de resultados entre dois membros, mas que, em determinadas situações, considera que significa um resultado. Referiu que, quando se depara com este sinal, associa-o ao cálculo. Já Mafalda apenas encara este sinal de uma forma operacional, pois considerou que ele é utilizado para “dizer o resultado de uma conta e que não tem outro significado”.

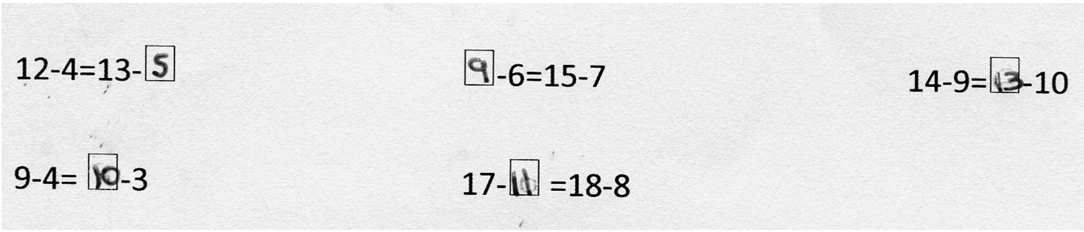


Figura 4. Resolução efectuada por Joana da Tarefa 1

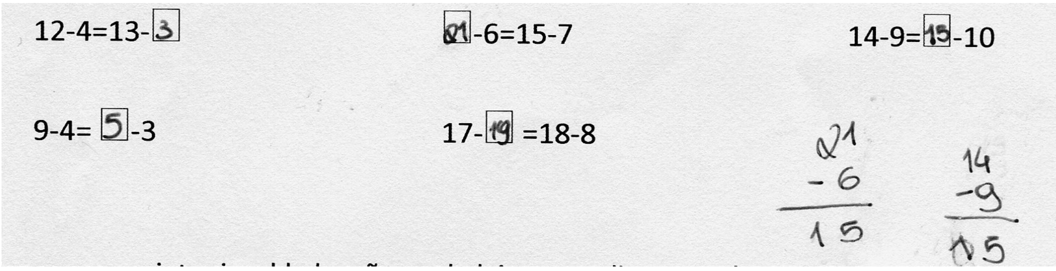


Figura 5. Resolução efectuada por Mafalda da Tarefa 1

Na Tarefa 1, para a situação 12-4=13- , Joana encarou a igualdade como um todo, comparou os aditivos de ambas as subtracções e verificou que se tem 12 num membro e no outro 13 então deve colocar 5 no espaço em branco. Explicou este raciocínio da seguinte forma: “Do 12 para o 13 juntou-se um, então ao 4 tem de se juntar também mais um, fica 5…vejo 12 e 13 e fica 4 e 5”. Em contrapartida, Mafalda comentou que não entendeu este exercício porque o espaço a preencher não se situava após o sinal de igual. A aluna resolveu a situação de forma incorrecta, pois considerou 17- =18-8 e conclui que “se nesta temos 18 e 8 então em cima temos 13 e 3”.

Na resolução de -6=15-7, Joana subtraiu 7 a 15, verificou que o resultado deste cálculo é 9 (de forma incorrecta) e preencheu o espaço em branco com este algarismo. De igual modo, Mafalda adicionou 15 com 6 e considerou que se deve colocar 21. Desta forma, ambas as alunas encaram o sinal de igual de uma forma operacional.

Nas situações 14-9= -10 e 9-4= -3, Joana utilizou o mesmo tipo de raciocínio. Assim, comparou as duas subtracções e verificou que ”se de 9 passa para 10 então de 14 passa para 13”, para a primeira, e “se de 4 passa para 3 então de 9 passa para dez”, na segunda. Assim, esta aluna resolveu estes exercícios sem verificar se os resultados obtidos estão correctos e manifestou alguma dificuldade em compreender o algoritmo da subtracção. Já Mafalda realizou as subtracções, utilizando a representação vertical, e concluiu que “14 menos 9 dá 15 e 9 menos 4 dá 5”.

Para 17- =18-8, Joana verificou que deve colocar onze no espaço em branco porque “do 17 para o 18 vai 1 e temos 17 e 18 logo é dez…1 e 10 fica 11”. Nesta situação a aluna encarou o sinal de igual como operador e efectuou um cálculo mental incorrecto para a subtracção. Da mesma forma, Mafalda subtraiu 17 com 19 e concluiu, de forma equívoca, que o valor a colocar era 19 porque “de 9 para 7 vão 8, e vai 1, 1 mais1 é 2 e 1 menos 2 é 1”.

Em termos gerais, durante a resolução da Tarefa 1, Joana mostrou que simultaneamente possui uma visão operacional e relacional do sinal de igual. Em determinadas situações, a aluna encarou a igualdade como um todo e comparou os algarismos e as subtracções, mas, por vezes, considerou que este sinal significa um resultado e efectua cálculos mentais incorrectos para subtrair. Já Mafalda encarou sempre o sinal de igual de uma forma operacional. Para resolver as situações, esta aluna usa a representação vertical para realizar o algoritmo da subtracção.

Na Tarefa 2, para as cinco primeiras situações, Joana utilizou sempre o mesmo raciocínio. A aluna encarou a igualdade como um todo, comparou os membros das igualdades, verificou que em ambos os lados do sinal de igual existem subtracções cujas diferenças são zero e atribuiu às afirmações valores lógicos correctos. Na situação 15+7 =15+5+2, adicionou cinco com dois, verificou que o total desta operação é sete e considerou que a afirmação é verdadeira porque “adicionamos o 7 dos dois lados do igual”. Para determinar o valor lógico de 46-16=46-6-10, a aluna efectuou as subtracções em ambos os membros do sinal de igual e concluiu que esta afirmação também é verdadeira porque “30 é igual a 30”.

Durante a resolução desta tarefa, Joana mostrou que encara o sinal de igual de uma forma relacional, pois analisou as igualdades na sua totalidade e efectuou cálculos mentais correctos para responder. A aluna possuiu facilidade em trabalhar com a adição de números naturais, mas, quando se deparou com subtracções, efectuou todas as operações e não conseguiu comparar as propriedades da adição com as da subtracção.

Para explorar as diversas situações desta segunda tarefa, Mafalda utilizou sempre o mesmo tipo de estratégia: efectuou as operações indicadas no primeiro membro do sinal de igual e verificou se o resultado obtido coincidia com o valor expresso a seguir ao sinal de igual. Desta forma, a aluna encarou sempre este sinal de uma forma operacional e mostrou dificuldades em utilizar o algoritmo da subtracção.

Os alunos do 8.º ano

Como já referi, o inquérito realizado continha cinco questões de resposta aberta, mas neste artigo irei analisar as respostas a apenas três situações.

Questão 1: Na expressão $a = b+2$, qual é maior o a ou o b? Explica o teu raciocínio.

Analisando as respostas fornecidas pelos alunos para esta questão, verifica-se que sete (19,44 %) consideram que não se pode afirmar qual deles é maior e justificam que estes valores são incomparáveis porque as letras a e b são diferentes.

Também seis alunos (16,67%) afirmam que o maior valor é o de b. Destes alunos, cinco (13,89%) justificam que se adicionou duas unidades a b e um aluno (2,78%) não explica a sua resposta.

Por sua vez, vinte e três alunos (63,89%) consideram que o valor do a é maior que o do b. Para justificar esta resposta, seis alunos (16,67%) referem que o sinal de igual significa uma equivalência entre duas quantidades (relacional), três (8,33%) concretizam valores particulares para a e b, um aluno utiliza a manipulação simbólica (2,78%), treze (36,11%) encaram o sinal de igual como um cálculo a efectuar e afirmam que "representa o resultado" (operacional) e um aluno (2,78%) não justifica a sua opção.

Questão 2: Considera a expressão $3+4\underset{\uparrow}{=}7$.

- Como se chama o símbolo assinalado e o que significa?
- Este símbolo poderá ter outro significado? Qual ou quais?

Das respostas fornecidas pelos alunos, podemos verificar que a maioria dos alunos possui uma visão operacional do sinal de igual e alguns deles nem o interpretam correctamente ou compreendem o significado das variáveis.

Para esta questão, dos trinta e seis alunos que responderam ao inquérito, onze (30,56%) consideram que o sinal de igual pode ser utilizado para representar um resultado ou uma igualdade entre expressões (relacional) e vinte e cinco alunos (69,44%) consideram que apenas pode representar um cálculo a efectuar (operacional).

> **Questão 3:** Que valor de m torna verdadeiras as seguintes afirmações? Explica o teu raciocínio.
>
> a) 4m+10 = 70
> b) 3m+7=25

Comparando as respostas dadas às duas questões anteriores, verificamos que dos dez alunos (27,78%) que possuem uma perspectiva relacional do sinal de igual, dois (5,56%) não conseguem resolver equações, três (8,33%) utilizam pelas tentativas numéricas, três (8,33%) efectuam as operações inversas e dois alunos (5,56 %) optam pelas regras de resolução de equações.

Por sua vez, dos vinte e seis alunos (72,22%) que encaram o sinal de igual como um resultado, treze (36,11%) utilizam as tentativas numéricas, sete (19,44%) não respondem, cinco (13,89%) utilizam as operações inversas e apenas um aluno (2,78%) consegue utilizar as manipulações simbólicas e o formalismo algébrico, para resolver esta questão.

Dos resultados obtidos nestas questões, podemos verificar que a maioria dos alunos considera que o sinal de igual representa um cálculo a efectuar e associam-no às operações aritméticas. Para resolver equações, utilizam maioritariamente as tentativas numéricas (estratégia aritmética) ou as operações inversas (estratégia pré-algébrica). Existe, ainda, um grupo de alunos que não consegue resolver as equações. Podemos também constatar que os alunos que possuem uma visão relacional do sinal de igual recorrem mais vezes às regras de resolução de equações, mas os que optam por esta estratégia ainda são em número muito reduzido.

Conclusões

Da realização deste estudo conclui-se que os alunos de diferentes ciclos encaram o sinal de igual de forma distinta.

Assim, a maioria dos alunos do 2.º ano de escolaridade possui uma visão relacional do sinal de igual, pois encara as igualdades numéricas como um todo e usa estratégias de cálculo, mental ou escrito, baseadas nas propriedades das operações e nas relações entre números e operações para concluir se existe um equilíbrio nos resultados obtidos. Nas operações com os números naturais, os alunos utilizam a representação horizontal e entendem os sentidos retirar, completar e comparar da subtracção. Para resolverem alguns dos exercícios, certos alunos efectuam todas os cálculos para constatar se existe igualdade numérica, enquanto outros evidenciam um maior desenvolvimento do pensamento relacional e a capacidade de compreender e utilizar as propriedades fundamentais dos números e operações para estabelecer relações e possuir flexibilidade na concretização de procedimentos (Carpenter et al., 2003; Franke et al., 2008).

Em relação ao 5.º ano de escolaridade, uma aluna mostrou que possui simultaneamente uma visão operacional e relacional do sinal de igual. Em determinados casos, considera a igualdade como um todo e efectua cálculos mentais correctos para responder, embora manifeste alguma dificuldade com a subtracção de números naturais e com os sentidos retirar, comparar e completar. Por vezes, para resolver estas situações, esta aluna utiliza o sentido operacional do sinal de igual. Em contrapartida, a outra aluna encarou sempre este sinal de uma forma operacional: efectuou as operações assinaladas no primeiro membro da igualdade, utilizando as representações verticais das operações, e analisou se o resultado obtido coincidia com o valor apresentado após este símbolo.

Já o inquérito realizado a alunos do 8.º ano de escolaridade revelou que a maioria deles possui uma visão operacional do sinal de igual, pois consideram que este representa um cálculo e efectuar. Para resolver as equações, utilizam preferencialmente estratégias de natureza aritmética ou pré-algébrica (Knuth et al., 2006) e um número muito reduzido de alunos recorre às regras de resolução de equações. Desta forma, podemos concluir que uma concepção limitada do sinal de igual interfere com a compreensão dos conceitos e algoritmos algébricos (Carpenter et al., 2003) e, em particular, das equações de 1.º grau.

Da análise destas constatações, podemos concluir que, durante todo o Ensino Básico, devem ser concretizadas situações que permitam analisar os diferentes significados do sinal de igual e desenvolver o pensamento relacional, pois destes dependem a compreensão dos conceitos aritméticos e algébricos.

Para além disto, também devemos considerar o tipo de tarefas a concretizar e o ambiente de sala de aula. Assim, os alunos que manifestam melhores desempenhos, os do 2.º ano de escolaridade, já tinham analisado igualdades numéricas semelhantes às propostas, em que o sinal de igual surge associado a diferentes significados, costumam comunicar as suas estratégias oralmente ou por escrito e exploram situações diversas que permitem desenvolver o pensamento relacional. Por sua vez, embora também se encontrem no segundo ano de implementação do PMEB, os alunos do 8.º ano possuem uma visão redutora do sinal de igual e evidenciam a necessidade de explorarem situações em que este surge associado a outros significados.

Sendo assim, urge concretizar estratégias e iniciativas que fomentem o trabalho colaborativo entre professores dos três ciclos de ensino e que promovam a troca de saberes e experiências entre professores de todos os níveis de ensino, pois delas depende a aprendizagem dos nossos alunos.

Referências

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T.P., Levi, L., Franke, M. & Zeringue, J. (2005). Algebra in the elementary school: Developing rational thinking. *ZDM, 37*(1), 53-59.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6*, 232-236.

Franke, M. L., Carpenter, T. P., & Battey, D. (2008). Content matters: The case of algebraic reasoning in teacher professional development. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton, (Eds.) *Algebra in the Early Grades* (pp. 333-359). Hillside, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp.5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associate.

Kaput, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp.133-160). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grows, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: MacMillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching Algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F.K.Lester, Jr., (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., & Alibali, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37* (4), 297–312.

Lannin, J. K. (2001). *Developing middle school students' understanding of recursive and explicit reasoning*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University. Acedido em 10 de Agosto, 2010, de http://matheducation.missouri.edu/homepages/john/Chapter2.pdf.

McNeil, N., & Alibali, M. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, *6* (2), 285–306.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Molina, M., Ambrose, R., Castro E., & Castro, E. (2009). Breaking the addition addiction: creating the conditions for knowing-to act in early algebra. En S. Lerman y B. Davis (Eds.), *Mathematical Action & Structures Of Noticing: Studies inspired by John Mason* (pp. 121-134). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos A. (2009). *A Álgebra no ensino básico*. Ministério da Educação, DGIDC.

Gestão Curricular no Ensino-aprendizagem da Álgebra

(Grupo de Discussão 3)

Coordenação:
Rosa Antónia Tomás Ferreira, *CMUP - Faculdade de Ciências, U. Porto*
Isabel Vale, *Escola Superior de Educação, I. P. Viana do Castelo*

GESTÃO CURRICULAR NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

Isabel Vale e Rosa Tomás Ferreira

A gestão curricular é uma componente fundamental do trabalho do professor, à qual nem sempre tem sido dada a devida atenção. Contudo, a sua complexidade relaciona-se com a gestão não só do currículo propriamente dito, mas também de todo um processo que envolve, em particular, o desenvolvimento dos temas matemáticos, a criação de tarefas e utilização de recursos diversificados e a participação dos alunos e dos professores. No actual momento que atravessamos, a Álgebra é revisitada e valorizada desde o início da escolaridade básica. Este facto obriga a um novo olhar sobre o tema, tornando-se imperativo investigar estratégias de ensino potenciadoras de uma melhor compreensão do que se entende por aprender e ensinar Álgebra, de modo a que este tema percorra, de forma significativa, toda a Matemática escolar.

Este grupo de discussão está organizado em função de três grandes temas: aprendizagem, formação de professores e gestão curricular no âmbito do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. As duas comunicações que se inserem no primeiro tema abordam aspectos do desenvolvimento das capacidades transversais, de resolução de problemas e raciocínio matemático, em alunos dos 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico. Enquanto a primeira comunicação se foca no desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da generalização de padrões em contextos visuais, a segunda comunicação analisa processos de raciocínio dos alunos na resolução de problemas de cunho algébrico. O segundo grupo de comunicações desenrola-se em torno da formação de professores, inicial e contínua. Na primeira comunicação deste grupo, a resolução de problemas de padrão em contextos figurativos volta a ser objecto de estudo, desta vez no contexto da formação inicial de professores de educação básica. A segunda comunicação aborda igualmente aspectos relativos à formação inicial de professores de educação básica, com enfoque no pensamento algébrico dos futuros professores em situações de modelação e nos processos de aprendizagem de alunos do ensino básico em contextos semelhantes. A última comunicação deste segundo grupo versa o desenvolvimento do conhecimento matemático para ensinar de uma professora do 1.º ciclo do ensino básico, num contexto de formação contínua, abordando algumas conexões entre Geometria e Álgebra. Por fim, no último conjunto de comunicações deste grupo de discussão, tendo como pano de fundo o Novo Programa de Matemática

EIEM 2011 - *Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (eds), 7-8 Maio, 2011, pp. 325–326

do Ensino Básico, abordam-se questões mais particulares de gestão curricular. A primeira comunicação procura analisar e compreender os erros cometidos por uma aluna do 7.º ano de escolaridade no ensino-aprendizagem das equações, enfatizando o papel regulador do feedback dado pelo professor. A segunda comunicação analisa em pormenor o percurso dos alunos de uma turma de experimentação do 7.º ano, em torno de duas tarefas relativas ao tópico sequências e regularidades na gestão curricular do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico.

A actividade deste grupo de discussão será desenvolvida em três momentos ao longo do EIEM2011, procurando analisar, discutir e reflectir em conjunto as principais ideias presentes nas comunicações apresentadas. Em especial, a discussão será centrada em torno das potencialidades e dificuldades, emergentes das situações de ensino-aprendizagem apresentadas, procurando perspectivar uma melhor gestão curricular do tema da Álgebra. Um outro objectivo deste grupo de discussão é problematizar um conjunto de questões possíveis de serem investigadas em trabalhos futuros, contribuindo para enriquecer o conhecimento da comunidade de investigação em Educação Matemática.

GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES EM CONTEXTOS VISUAIS: UM ESTUDO NO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE

Ana Barbosa
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo
anabarbosa@ese.ipvc.pt

Resumo

Esta comunicação pretende descrever um estudo realizado com alunos do 6.º ano, centrado na resolução de problemas que envolvem a exploração de padrões em contextos visuais. Procurou-se conhecer as estratégias de generalização usadas pelos alunos, as dificuldades que emergem do seu trabalho, bem como perceber o papel da visualização no seu raciocínio. Tendo em conta as características do estudo optou-se por um *design* de estudo de caso qualitativo. São apresentados alguns resultados decorrentes da implementação de duas tarefas com dois pares de alunos que foram acompanhados de forma mais detalhada. Globalmente, estes resultados revelam que: os alunos usam diversas estratégias de generalização; aplicam estratégias desadequadas quando limitam o seu trabalho ao plano numérico; as abordagens de natureza visual são normalmente facilitadoras do raciocínio permitindo a atribuição de significado às variáveis manipuladas.

Palavras-chave: Resolução de problemas, Padrões, Generalização, Visualização.

Introdução

Os objectivos traçados para a matemática escolar têm vindo a alterar-se nas últimas décadas, de forma a acompanhar a evolução e as necessidades da sociedade. Uma matemática centrada na resolução de tarefas rotineiras além de não responder às exigências colocadas actualmente ao sistema de ensino, não contribui para uma melhor compreensão do que é a matemática e do que significa *fazer* matemática. É neste sentido que, desde os anos oitenta, a resolução de problemas tem vindo a assumir um papel fundamental na matemática escolar considerando-se que a exploração de tarefas desta natureza envolve os alunos em momentos genuínos de actividade matemática. Nas actuais orientações curriculares uma das principais finalidades do ensino da matemática é o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, no entanto os resultados evidenciados pelos nossos alunos, neste âmbito, não têm sido animadores. Este insucesso poderá estar relacionado com a sobrevalorização do domínio de procedimentos e algoritmos e uma experiência reduzida com tarefas que envolvem o raciocínio e a resolução de problemas não rotineiros na aula de matemática.

As tarefas que têm subjacente a exploração de padrões podem contribuir para o desenvolvimento de capacidades próprias da resolução de problemas, já que implicam a análise de casos particulares, a organização de informação de forma sistemática, o estabelecimento de conjecturas e a generalização de resultados. A relevância deste tema é salientada em muitos documentos curriculares, como é o caso dos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) onde se verifica que os padrões, sejam eles de tipo numérico, geométrico ou pictórico, constituem um tema com grandes potencialidades. Este documento defende que os programas de Matemática devem contemplar, desde o ensino pré-escolar até ao ensino secundário, tarefas que envolvam a compreensão de padrões, relações e funções, contribuindo desta forma para mobilização de capacidades de ordem superior, como o raciocínio e a comunicação, que possibilitam um aprendizagem mais significativa da Matemática.

Simultaneamente, tem-se registado nos últimos anos uma tendência de revalorização da Geometria no currículo de Matemática. As ideias geométricas são úteis na representação e na resolução de problemas, em diferentes áreas da matemática e em contexto real, o que fundamenta esta perspectiva. Há também um forte consenso de que a geometria é uma fonte de problemas não rotineiros que podem propiciar o desenvolvimento de capacidades como a visualização espacial, o raciocínio e a argumentação. A visualização em particular tem sido desde sempre uma componente importante do raciocínio dos matemáticos mas nem sempre lhe é atribuído um papel de destaque nas experiências matemáticas dos alunos (e.g. Healy & Hoyles, 1996; Presmeg, 2006). Segundo Vale e Pimentel (2005), no nosso ensino é dada especial importância aos aspectos numéricos e algébricos remetendo alguns alunos, possuidores de maiores capacidades no domínio visual, para situações de insucesso escolar e impedindo outros, com menores capacidades nesta área, de se desenvolverem harmoniosamente. As representações de natureza visual constituem um contributo incontornável para a resolução de problemas, actuando como um elemento facilitador na compreensão das situações propostas e inspirando descobertas criativas. Devem ser criadas oportunidades para que os alunos analisem abordagens de natureza diferente, visuais e não visuais, desenvolvendo um raciocínio mais flexível. A relevância da visualização e das representações visuais está a ser reconhecida por muitos educadores matemáticos mas a investigação acerca do papel das imagens mentais na aprendizagem de conceitos matemáticos e na resolução de problemas é ainda insuficiente.

Tendo por base as ideias explicitadas anteriormente, neste estudo procura-se compreender o modo como alunos do 6.º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais, tendo por base os seguintes objectivos: (i) caracterizar as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos; (ii) conhecer as dificuldades que emergem do seu trabalho; e (iii) perceber qual o papel da visualização no desempenho dos alunos.

Enquadramento teórico

Desde sempre, matemáticos e educadores têm partilhado uma visão entusiástica no que respeita à importância do estudo de padrões, referindo que constituem a essência de todo o trabalho em matemática (e.g. Davis & Hersch, 1995; Devlin, 2002; NCTM, 2000). Muitos autores definem matemática como a ciência dos padrões (e.g. Devlin, 2002; Steen, 1988), deixando transparecer a ideia de transversalidade, considerando-os como uma qualidade que define a matemática mais do que um tópico que a integra. A ênfase na identificação de regularidades é cada vez mais frequente nas recentes abordagens ao estudo da álgebra, tendo em consideração que a procura de padrões constitui um passo fundamental para o estabelecimento de generalizações. O estudo de regularidades em diferentes contextos, a utilização de símbolos e variáveis que representam padrões e a generalização constituem componentes importantes do currículo de vários países, incluindo o nosso. As orientações curriculares nacionais para o ensino básico sublinham a importância do desenvolvimento de competências como a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos e geométricos, bem como raciocinar matematicamente explorando situações problemáticas, procurando regularidades, fazendo e testando conjecturas e formulando generalizações (DEB, 2001; ME-DGIDC, 2007). Este tipo de tarefas propicia o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o pensamento algébrico que servem de suporte ao raciocínio matemático, permitindo aos alunos ir além das meras competências de cálculo.

A generalização de padrões implica a utilização de uma estratégia, um modo de acção, no entanto há uma grande diversidade de abordagens que possibilitam aos alunos generalizar. Têm sido desenvolvidos vários estudos com o intuito de compreender e classificar as estratégias evidenciadas por alunos, de diversos níveis de ensino, quando resolvem problemas com padrões, em diferentes contextos. A análise das categorias propostas por alguns investigadores (Lannin et al, 2006; Orton, 1999; Rivera & Becker, 2008; Stacey, 1989) conduziu à construção da seguinte categorização (Barbosa, 2010):

Estratégia		**Descrição**
Contagem (C)		Desenhar uma figura e contar os seus elementos.
Termo unidade	Sem ajuste (TU_1)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico (TU_2)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual (TU_3)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.
Diferença	Recursiva (D_1)	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Usar a diferença entre termos consecutivos como factor multiplicativo, sem ajustar o resultado.
	Múltiplo da diferença com ajuste (D_3)	Usar a diferença entre termos consecutivos como factor multiplicativo. É feito um ajuste do resultado.
Explícita (E)		Descobrir uma regra, com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.
Tentativa e erro (TE)		Adivinhar uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores. Conhecida uma regra, experimentar sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas.

Figura 1. Categorização das estratégias de generalização.

Há alguns factores que podem ter um impacto significativo na escolha das estratégias usadas na generalização. Lannin, Barker e Townsend (2006) identificaram três categorias alargadas que podem permitir prever a selecção de estratégias por parte dos alunos: (1) *factores sociais*, resultantes das interacções do aluno com os seus pares e com o professor; (2) *factores cognitivos*, associados às estruturas mentais que o aluno desenvolveu; e (3) *factores associados à estrutura da tarefa*, como a estrutura matemática do padrão, os valores atribuídos à variável independente e a capacidade de visualizar.

Lannin, Barker e Townsend (2006) concluíram que, quando os valores de partida são próximos, os alunos tendem a usar regras recursivas e optam por aplicar a estratégia *termo unidade* quando esses valores são múltiplos de termos conhecidos da sequência. A utilização de valores distantes pode encorajar os alunos a aplicar estratégias de natureza explícita. A aplicação indevida da proporcionalidade directa tem sido mencionada em vários estudos (e.g. Rivera & Becker, 2008; Lannin et al, 2006; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999) e normalmente é associada a duas situações: a utilização de uma abordagem estritamente numérica, onde a manipulação das variáveis é feita sem significado; e a generalização de múltiplos de termos conhecidos da sequência. O raciocínio de natureza recursiva está inevitavelmente associado a tarefas que envolvem a exploração de padrões e há uma clara tendência dos alunos para a fixação por este método (Orton, 1999), no entanto estratégias deste tipo apresentam limitações no que concerne à generalização distante pois não promovem a descoberta de uma relação funcional. O foco nos aspectos numéricos do padrão, mesmo quando apresentado em contexto visual, é muitas vezes um entrave à generalização. Neste sentido, Mason (1996) sugere que sejam dadas oportunidades aos alunos para explorar diversos tipos de padrões sendo utilizada a visualização e a manipulação de figuras para facilitar a generalização.

As tarefas que envolvem o estudo de padrões podem ser propostas em diversos contextos, visuais e não visuais, e dar lugar a diferentes abordagens. Segundo Gardner (1993) alguns alunos reconhecem as regularidades visualmente, enquanto outros as detectam analiticamente. Esta dualidade tem gerado muita controvérsia. Apesar de muitos investigadores reconhecerem a relevância do papel da visualização na resolução de problemas (e.g. Presmeg, 2006; Shama & Dreyfus, 1994) outros referem que o pensamento visual é uma fonte poderosa de ideias mas constitui apenas um complemento ao pensamento analítico (Goldenberg, 1996; Tall, 1991). Embora diferentes, estas perspectivas salientam a importância do desenvolvimento e da mobilização de capacidades de natureza visual, enriquecendo as experiências matemáticas dos alunos. Por outro lado, o professor deve ter em consideração que há muitas formas de *ver* uma figura conduzindo a diferentes interpretações. Duval (1998) sublinha que uma figura por ser apreendida *perceptualmente*, quando é interpretada como um todo, ou *discursivamente*, se o indivíduo identifica a disposição espacial dos elementos que a compõem. Os alunos que são capazes de analisar de forma discursiva uma figura podem fazê-lo de diferentes modos condicionando a generalização: (1) ao identificarem conjuntos de elementos disjuntos que compõem a figura inicial formulam uma generalização *construtiva*; (2) se observarem subconfigurações que se sobrepõem, contando os mesmos elementos mais do que uma vez e subtraindo-os posteriormente, a generalização é de natureza *desconstrutiva* (Rivera & Becker, 2008).

Metodologia do estudo

Dada a natureza do problema proposto bem como das questões de investigação definidas, este estudo segue uma abordagem qualitativa, tendo-se optando por um *design* de estudo de caso. A investigação decorreu em duas turmas do 6º ano de escolaridade, de duas escolas do distrito de Viana do Castelo. Ao longo de um ano lectivo, foram acompanhados, a um nível mais aprofundado, dois pares de alunos em cada uma das turmas, constituindo quatro estudos de caso. Neste período de tempo, foram implementadas sete tarefas centradas na resolução de problemas de *generalização próxima* (para determinar o termo da sequência pedido é possível utilizar um desenho ou um método recursivo) e *generalização distante* (os métodos descritos anteriormente não se adequam à resolução deste tipo de questões sendo necessário descobrir uma expressão geral) que os alunos exploraram em pares, contemplando padrões lineares e não lineares. Os alunos envolvidos no estudo não tinham qualquer experiência com tarefas desta natureza. Os dados recolhidos são, essencialmente, de natureza descritiva resultantes da observação participante, entrevistas e análise de documentos. Cada uma das sessões foi videogravada para posterior visionamento e análise. Após a implementação de cada tarefa foram realizadas entrevistas semi-estruturadas aos alunos-caso, tendo sido audiogravadas e transcritas. Através das entrevistas procurou-se identificar e clarificar as dificuldades dos alunos bem como as estratégias de generalização utilizadas em cada uma das tarefas. Neste artigo é realizada a análise do trabalho de dois destes pares de alunos, Carla-Margarida e António-Daniel, na resolução de duas das tarefas implementadas.

O caso Carla e Margarida

No início do estudo a Carla tinha 11 anos. Ao longo do ano lectivo anterior, foi uma aluna constante tendo obtido sempre nível 4. É uma aluna bastante organizada e responsável nos trabalhos que realiza, procurando certificar-se da correcção das suas produções. A Margarida iniciou o 6.º ano de escolaridade com 10 anos de idade. É uma aluna com um aproveitamento inferior ao da colega. Apesar de ter concluído o 5.º ano com nível 3 foi revelando algumas dificuldades ao longo do ano lectivo. Tem alguns traços na sua personalidade semelhantes aos da colega, embora seja um pouco mais introvertida do que a Carla. Nas diversas tarefas exploradas ao longo do estudo, houve uma preocupação evidente por parte dos dois elementos do par em discutir possíveis abordagens de resolução e chegar a um consenso para posteriormente aplicarem a estratégia escolhida. Apesar de a Carla ter uma atitude mais interventiva, ambas revelaram interesse e motivação na exploração dos problemas, tendo efectivamente trabalhado de forma colaborativa.

Tarefa 1 - Os lembretes da Joana

A tarefa *Os lembretes da Joana* (Anexo 1) tem subjacente um padrão crescente do tipo $an+b$. Trata-se de um problema contextualizado, acompanhado da representação visual do 3.º termo da sequência, que integra questões de *generalização próxima* e *distante*.

A Carla e a Margarida começaram por representar um conjunto de 6 lembretes, para proceder à contagem dos *pioneses*. No entanto, em simultâneo, apresentaram o cálculo do número de *pioneses* utilizando uma estratégia recursiva, tendo identificado a diferença entre termos consecutivos e continuado a sequência até ao 6.º termo. Esta situação evidencia a necessidade de validarem o seu raciocínio por intermédio de cálculos, não reconhecendo essa função ao desenho, facto que foi confirmado posteriormente durante a entrevista com o par.

Na abordagem à segunda questão, sentiram que o desenho não seria uma estratégia útil, já que lhes tomaria muito tempo.

> *Investigadora:* Aqui (questão 2) já não fizeram um desenho. Porquê?
> *Carla:* Eram muitos!
> *Margarida:* Tínhamos que desenhar 35.

Optaram antes pela utilização de uma estratégia explícita, tendo por base a distribuição dos *pioneses* pelos lembretes. Através da utilização desta estratégia foram capazes de generalizar para um valor distante.

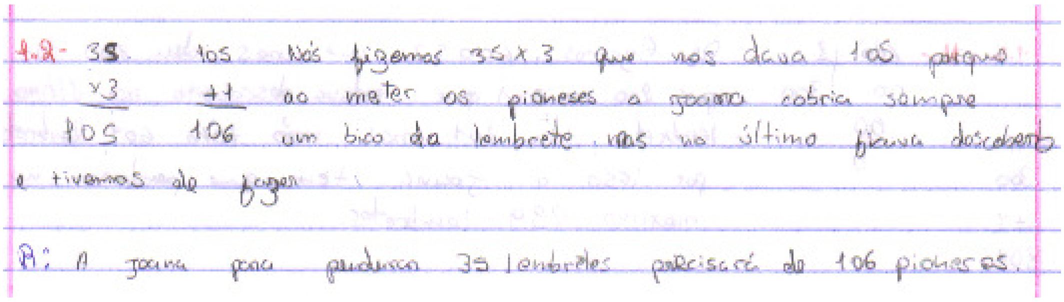


Figura 2. Resolução da questão 2 da Tarefa 1 - Carla e Margarida

Na resolução da última questão este grupo usou a estratégia D_3. Apesar de se tratar de uma generalização distante, recorreram a uma estratégia diferente da anterior. Esta mudança de abordagem poderá estar associada ao facto de nesta questão se promover a reversibilidade do pensamento, procurando-se estabelecer a relação inversa da que tinha sido considerada previamente. Recorreram à diferença entre termos consecutivos procedendo a um ajuste do resultado com base no contexto do problema.

> *Investigadora:* Agora têm 600 *pioneses* e querem saber quantos lembretes vão poder pendurar. Expliquem-me como pensaram.
>
> *Margarida e Carla:* 600 a dividir por 3…
>
> *Investigadora:* Fizeram grupinhos de 3?
>
> *Carla:* Porque cada um (lembrete) tem 3 *pioneses* e depois 1 no fim.
>
> *Investigadora:* Então conseguiram fazer 200 grupinhos de 3. Podem pendurar 200 lembretes, é isso?
>
> *Carla:* Mas um coisinho (refere-se a um *pionés*) ficou de fora.
>
> *Investigadora:* E onde o vamos buscar?
>
> *Margarida e Carla:* Não temos!
>
> *Carla:* Temos que tirar um cartaz! Ficamos com 199.

Conclui-se dos comentários das alunas que o contexto do problema foi crucial no seu raciocínio. Reconheceram o significado dos números que manipularam e a sua representatividade na situação proposta, tendo assim verificado a necessidade de proceder a um ajuste no cálculo efectuado previamente.

	Estratégias de generalização			
Questões	C	D_3	E	
1	X			Generalização Próxima
2			X	Generalização Distante
3		X		

Figura 3. Síntese das estratégias usadas pela Carla e pela Margarida na Tarefa 1.

A Figura 3 sintetiza o trabalho desenvolvido pelas alunas na exploração da tarefa *Os lembretes da Joana*. Não recorrem ao mesmo tipo de estratégias em questões de *generalização próxima* e *distante*. Há uma mudança de abordagem quando o nível de generalização se altera, recorrendo a estratégias como contagem, diferença e explícita. É de salientar a importância atribuída pelas alunas à apresentação de cálculos que, na sua opinião, constituem o método de validação das suas respostas. Mas, apesar da relevância atribuída ao contexto numérico é indubitável o papel fundamental da visualização em quase todas as suas estratégias: no caso da contagem, a acção é executada sobre a figura; nas estratégias explícita e diferença com ajuste, apresentam os cálculos tendo por base o contexto do problema. Destaca-se ainda que as generalizações formuladas pelas alunas ao longo da exploração da tarefa foram sempre de natureza construtiva.

Tarefa 2 – A Pizzaria Sole Mio

A tarefa *A Pizzaria Sole Mio* (Anexo 2) tem subjacente um padrão do mesmo tipo da Tarefa 1, sendo apresentadas as representações do 3.º e 4.º termos da sequência. Tal como a tarefa anterior contempla questões de generalização próxima e distante e foi implementada quatro meses depois.

Após a leitura da tarefa em grande grupo, a Carla e a Margarida estiveram algum tempo sem efectuar registos na sua folha de resposta. Em tarefas anteriores, iniciaram de imediato o seu trabalho, utilizando normalmente representações de natureza visual. Neste caso começaram por centrar a sua atenção no enunciado, enquanto discutiam entre si. A resposta à primeira questão explica este comportamento. Utilizaram uma estratégia explícita, mesmo perante uma questão de generalização próxima. Apresentaram o cálculo 2×10+2 e referiram que estavam "10 pessoas de cada lado da mesa e 2 na ponta". Apesar de não terem construído um modelo visual do 10.º termo da sequência, descobriram a regra, aplicada na resolução da questão *1*, através da observação das figuras apresentadas no enunciado da tarefa.

Na questão *2*, pedia-se o 31.º termo da sequência, promovendo deste modo a generalização distante. As alunas voltaram a recorrer a uma estratégia explícita, utilizando a regra identificada anteriormente, ajustada a um conjunto de 31 pizzas.

As maiores dificuldades sentidas por este par reflectiram-se na terceira questão da tarefa. Aqui pedia-se a ordem ocupada por um determinado termo, promovendo o raciocínio inverso do utilizado nas questões anteriores. As alunas mudaram de estratégia, tendo aplicado D_2. Como se tratava de um padrão linear impunha-se um ajuste do resultado, após o recurso a um múltiplo da diferença, condição que não cumpriram. Depois de efectuarem o cálculo 58÷2 e concluírem que teriam 29 pizzas, fizeram uma representação visual da situação, acompanhada dos valores encontrados. No entanto, o desenho não serviu para verificarem a validade do seu raciocínio, caso contrário teriam concluído que não estava correcto. Durante a entrevista, tentou-se compreender a forma como as alunas pensaram, mas também que reflectissem nos erros cometidos.

> *Carla:* Fizemos 58 a dividir por 2 para sabermos quantas pizzas eram.
>
> *Investigadora:* E porque é que fizeram esse cálculo?
>
> *Margarida:* Fizemos as pessoas todas a dividir por 2 filas e deu 29.
>
> *Investigadora:* E depois fizeram aqui um esquema ao lado. Porquê?
>
> *Margarida:* Era como as pizzas e as pessoas estavam na mesa.
>
> *Investigadora:* Então vamos pensar ao contrário. Usando estes valores que colocaram no esquema, quantas pessoas têm na mesa?
>
> *Carla:* Acho que dá 60 [depois de fazer os cálculos num papel].
>
> *Investigadora:* Mas não eram 58 pessoas?
>
> *Carla:* Temos mal.
>
> *Investigadora:* Têm mal?
>
> *Margarida:* É por causa das que estão nas pontas. Essas não contam para as pizzas.

Investigadora: Não contam?

Margarida: Não! As pizzas são iguais às que estão de lado.

Carla: Tínhamos que fazer menos 2 que era 56 e dividir por 2.

	Estratégias de generalização		
Questões	D_2	E	
1		X	Generalização Próxima
2		X	Generalização Distante
3	X		

Figura 4. Síntese das estratégias usadas pela Carla e pela Margarida na Tarefa 2.

A Carla e Margarida usaram predominantemente a estratégia explícita, quer em questões de generalização próxima quer distante. As expressões obtidas da aplicação desta estratégia representam generalizações de natureza construtiva, já que *vêem* o padrão decomposto em partes disjuntas, observando dois conjuntos iguais nas laterais e dois elementos em cada ponta da mesa. Salienta-se o recurso a uma estratégia desadequada na questão *3*, na qual se pretendia promover a reversibilidade do pensamento. Neste caso, as alunas deram maior relevância ao contexto numérico uma vez que não reflectiram se a solução encontrada fazia sentido no contexto apresentado. Apesar de terem representado visualmente a solução, através de um desenho, não utilizaram esse modelo como forma de validar o resultado obtido.

O caso António e Daniel

No início do estudo o António tinha 10 anos. Concluiu o 5.º ano de escolaridade com nível 4. Este aluno apresenta-se quase sempre com uma postura calma e ponderada, pensando cuidadosamente naquilo que vai dizer ou questionar. O Daniel iniciou o 6º ano de escolaridade com 10 anos de idade. Concluiu o 5º ano de escolaridade com nível 3. Tem uma personalidade completamente diferente da do colega. É bastante extrovertido, gosta de fazer notar a sua presença e é bastante divertido. Em contrapartida é também muito distraído e desconcentra-se facilmente. Toma quase sempre a iniciativa nas aulas, adora participar. Enquanto par, embora com personalidades diferentes, o António e o Daniel complementam-se. Nas sessões de exploração das tarefas, foi quase sempre o António que ficou responsável pelos registos do grupo, no entanto, houve uma interacção constante entre os dois alunos, discutindo e decidindo juntos o que iriam registar.

Tarefa 1 - Os lembretes da Joana

A análise do trabalho desenvolvido pelo António e o Daniel nesta tarefa permitiu observar algumas dificuldades reflectidas na utilização de estratégias de generalização desadequadas. Na resolução da questão *1*, este par não recorreu à representação visual dos 6 lembretes. Uma vez conhecido o 3.º termo da sequência, duplicaram o número de *pioneses*, utilizando deste modo a proporcionalidade directa.

> *Investigadora:* Como concluíram que eram necessários 20 *pioneses* para pendurar 6 lembretes?
>
> *Daniel:* Pensamos assim … se tivéssemos 3 lembretes… em 3 lembretes tinha 10, então acrescentamos mais… mais 3 cartões e dava 20.
>
> *Investigadora:* Portanto, pensaram que acrescentando 3 lembretes iam ter mais 10 *pioneses*. Foi isso?
>
> *António e Daniel:* Sim!

Na resolução desta primeira questão recorreram à estratégia termo unidade sem ajuste (TU_1), tendo assim utilizado uma abordagem que os conduziu a uma resposta incorrecta já que se trata de um padrão linear. Na entrevista tentou-se que analisassem a validade do seu raciocínio, através de um desenho representativo dos 6 lembretes e aí puderam observar que havia sempre um pionés a ligar lembretes consecutivos.

A proporcionalidade directa continuou a surgir no trabalho deste grupo. Para determinar o número de *pioneses* necessários para pendurar 35 lembretes (questão *2*) usaram a estratégia termo unidade com ajuste numérico (TU_2), como se pode observar na Figura 5.

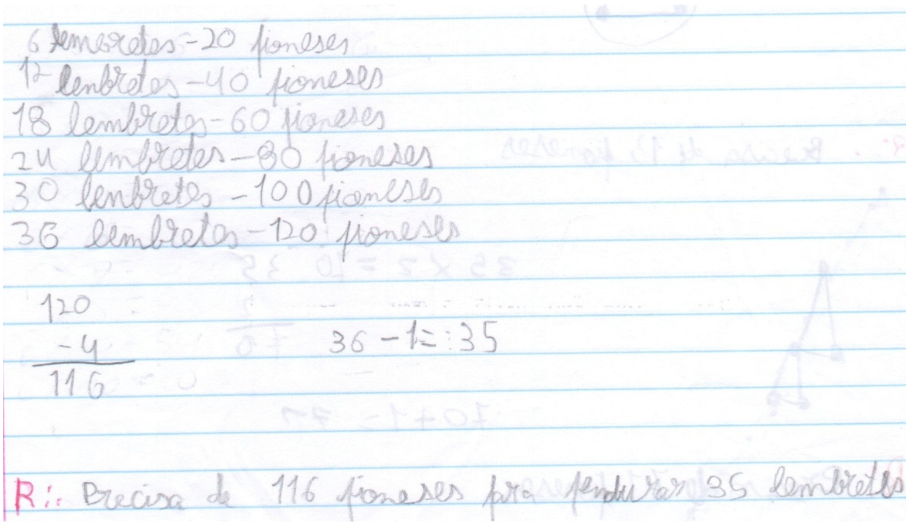


Figura 5. Resolução da questão 2 da Tarefa 1 - António e Daniel.

Tendo já determinado o 6.º termo da sequência (questão *1*), os alunos procuraram o múltiplo de 6 mais próximo de 35, utilizando um raciocínio proporcional. Após terem descoberto o número de *pioneses* necessários para pendurar 36 lembretes, fizeram um ajuste para chegar ao valor pretendido. Este ajuste não teve por base as condições do problema apresentado, centrou-se apenas na utilização de propriedades numéricas.

Na questão *3* este par voltou a usar a proporcionalidade directa. Ao fazerem 30×6=180 lembretes, consideraram que 30 lembretes correspondiam a 100 *pioneses*, logo 180 lembretes corresponderiam a 600 *pioneses*, tendo assim aplicado a estratégia termo unidade sem ajuste (TU_1). Ao longo da entrevista aperceberam-se da incorrecção deste método verificando que havia *pioneses* comuns a cada 2 lembretes consecutivos e portanto estariam a repetir a sua contagem.

	Estratégias de generalização		
Questões	TU_1	TU_2	
1	X		Generalização Próxima
2		X	Generalização Distante
3	X		

Figura 6. Síntese das estratégias usadas pelo António e pelo Daniel na Tarefa 1.

Analisando os dados da Figura 6, conclui-se que este par não foi capaz de utilizar estratégias de generalização adequadas ao problema. Os alunos optaram por transformar a informação apresentada visualmente em dados numéricos. Ao negligenciar o contexto do problema, basearam o seu raciocínio na utilização da proporcionalidade directa, quer na generalização próxima quer distante, aplicando as estratégias termo unidade sem ajuste e com ajuste numérico.

Tarefa 2 – A Pizzaria Sole Mio

O António e o Daniel começaram por desenhar uma mesa com 10 pizzas e dispuseram as pessoas num arranjo similar ao dos exemplos apresentados no enunciado. Nesta primeira questão, recorreram à contagem para determinar o número de pessoas que estariam sentadas numa mesa com 10 pizzas.

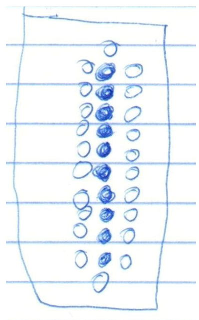


Figura 7. Resolução da questão 1 da Tarefa 2 - António e Daniel.

Na segunda questão da tarefa, perante a generalização distante, mudaram de abordagem, optando por recorrer a uma estratégia explícita. Referiram na folha de resposta que "se há 31 pizzas tem que haver 31 pessoas de cada lado e uma em cada ponta". Verificaram, neste caso, que a contagem seria um processo demorado e, em alternativa, identificaram uma regra de natureza construtiva que lhes permitiu determinar de forma imediata o número de pessoas. Esta regra serviu ainda de base à resolução da questão *3*. Revelaram assim reversibilidade do pensamento, no entanto apresentaram uma linguagem pouco clara na sua argumentação referindo que "56 são as pessoas dos lados a dividir por dois dá 28".

	Estratégias de generalização		
Questões	C	E	
1	X		Generalização Próxima
2		X	Generalização Distante
3		X	

Figura 8. Síntese das estratégias usadas pelo António e pelo Daniel na Tarefa 2.

Nesta tarefa, os alunos recorreram a estratégias diferentes na generalização próxima e distante. No primeiro caso recorreram a uma generalização aritmética, através da contagem, já na generalização distante optaram por uma estratégia explícita, identificando uma regra com base no contexto do problema. Esta regra enquadra-se no âmbito da generalização de natureza construtiva, tanto na questão *2* como na *3*.

Discussão

A análise do trabalho dos alunos-caso, nas tarefas apresentadas permite verificar a utilização de diversas estratégias de generalização, em particular: *contagem*, *termo unidade*, *diferença* e *explícita*. Em algumas destas categorias foram identificadas subcategorias mais refinadas, nomeadamente no âmbito das estratégias termo unidade e diferença. Apesar da diversidade de estratégias, algumas foram utilizadas de forma mais frequente do que outras: a contagem, na resolução de questões de generalização próxima; e a explícita, maioritariamente na generalização distante.

É pertinente salientar factores relacionados com a estrutura das tarefas que poderão ter influenciado a escolha de determinadas estratégias: (1) a ordem de grandeza dos valores atribuídos às variáveis implicou normalmente uma mudança na abordagem utilizada, ao passar da generalização próxima para a distante; (2) questões que incidiam na descoberta da ordem de um dado termo (reversibilidade do pensamento) levaram a que um dos pares mudasse de estratégia comparativamente à que tinham usado na questão inversa; (3) para além da ordem de grandeza dos valores envolvidos, as características dos números atribuídos às variáveis poderão ser também um factor relevante, considerando por exemplo que na primeira tarefa o termo solicitado aos alunos (6º) era múltiplo do termo representado no enunciado (3º) pode ter sido determinante na utilização da proporcionalidade directa por parte de um dos pares.

Reflectindo sobre a adequação das estratégias usadas e dificuldades identificadas no trabalho destes alunos salienta-se a utilização indevida de um raciocínio de tipo proporcional em contextos lineares, através da utilização de TU_1, TU_2 e D_2. Estes erros estão relacionados com o facto de os alunos não terem formado uma imagem mental do problema, tendo recorrido apenas a propriedades numéricas sem qualquer ligação ao contexto. Como seria expectável, revelaram maiores dificuldades na generalização distante do que na generalização próxima principalmente quando estava subjacente a reversibilidade do pensamento. Warren (2008) associa a complexidade desta situação: (1) à necessidade de relacionar a ordem com o termo; e (2) à mobilização de conhecimentos relacionados com as propriedades das operações aritméticas.

As tarefas utilizadas neste estudo têm uma forte componente visual. Esta opção teve por base a ideia de que a inclusão de um suporte visual em problemas que envolvem a exploração de padrões, conduz à utilização de múltiplas abordagens para chegar à generalização e, dependendo do modo como os alunos *vêem* um determinado padrão, podem potenciar a descoberta de expressões equivalentes (Stacey, 1999; Swafford e Langrall, 2000). Assim, perante este tipo de tarefas, os alunos podem aplicar estratégias de natureza visual ou optar por estratégias não visuais, fazendo a transferência para o contexto numérico. De facto, há evidências da utilização de diversas estratégias por parte dos alunos, quer visuais quer não visuais, no âmbito da categorização adoptada nesta investigação. Como já se referiu as estratégias mais utilizadas foram a contagem e a explícita, ambas de natureza visual. Analisando estas estratégias em particular: (1) a contagem revelou-se eficaz em situações de generalização próxima, no entanto foi óbvio para os alunos que seria um processo exaustivo para valores mais distantes; (2) a explícita foi particularmente útil e eficaz na generalização distante, principalmente quando os alunos conseguem apreender de forma imediata a relação entre as variáveis. Ao observar a forma como os alunos *viram* os padrões propostos e a natureza da generalização estabelecida, verifica-se que, nas situações em que foram bem sucedidos, optaram por generalizações de tipo construtivo, tendência que se justifica por uma maior complexidade em termos visuais ao nível da generalização desconstrutiva (Rivera & Becker, 2008).

Este estudo evidencia a pertinência da proposta de tarefas que possibilitem a utilização de estratégias de natureza diferente, encorajando os alunos a compreender o potencial das estratégias visuais e estabelecer a relação entre contextos visuais e numéricos. A conexão entre abordagens distintas, recorrendo a representações diversas, pode contribuir para o desenvolvimento de um raciocínio mais flexível, fundamental na resolução de problemas.

Referências

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* Tese de Doutoramento em Estudos da Criança: Universidade do Minho.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática.* Lisboa: Gradiva.

Departamento do Ensino Básico (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões.* Porto: Porto Editora.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gardner, H. (1993). *Multiple Intelligences: The theory in Practice.* New York: Basic Books.

Goldenberg, E. P. (1996). Habits of Mind as an organizer for the curriculum. *Journal of Education,* 178(1), 13-34.

Healy, L., & Hoyles, C. (1996). Seeing, doing and expressing: An evaluation of task sequences for supporting algebraic thinking. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.). *Proceedings of the 20th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 3, pp. 67-74, Valencia, Spain: PME.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3-28.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65 – 86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* USA: NCTM.

Orton, A. (1999). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205–235). Dordrecht: Sense Publishers.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children' cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, 40, 65-82.

Sasman, M., Olivier, A., & Linchevski, L. (1999). Factors influencing students' generalization thinking processes. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th International Conference for Psychology of Mathematics Education,* 4, (pp. 161-168), Haifa, Israel: PME.

Shama, G., & Dreyfus, T. (1994). Visual, algebraic and mixed strategies in visually presented linear programming problems. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 45-70.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Steen, L. A. (1988) The Science of Patterns. *Science, 240,* 611-616.

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89–112.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vale, I., & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática, 85,* 14-20.

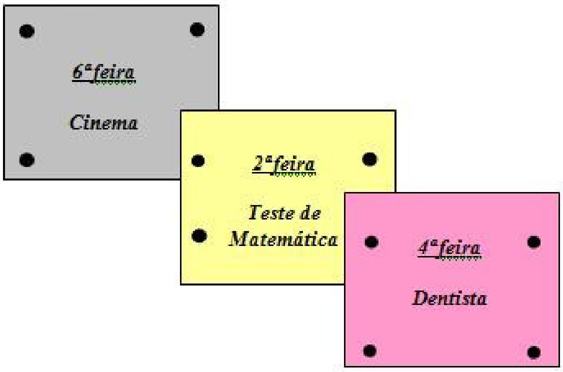
Warren, E. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 171-185.

Anexo 1

Os lembretes da Joana

Em cada questão desta tarefa deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Para não se esquecer dos seus compromissos, a Joana pendura lembretes no placar do quarto, colocando *pioneses* como mostra a figura.



Se a Joana continuar a pendurar os seus lembretes desta forma:

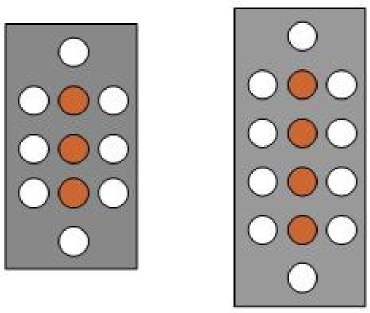
1. De quantos *pioneses* precisará para colocar no seu placar 6 lembretes?
2. E se quiser pendurar 35 lembretes, de quantos *pioneses* precisará?
3. Sabendo que a Joana comprou uma caixa de 600 *pioneses*, quantos lembretes poderá pendurar, no máximo, no seu placar?

Anexo 2

A Pizzaria Sole Mio

Em cada questão deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

As figuras mostram duas mesas da Pizzaria *Sole Mio*, uma com 8 pessoas e 3 pizzas e outra com 10 pessoas e 4 pizzas.



1. Sabendo que numa das mesas foram colocadas 10 pizzas quantas pessoas estariam sentadas?
2. E se fossem 31 pizzas? Quantas pessoas estariam, sentadas nessa mesa?
3. O João decidiu comemorar o seu aniversário neste restaurante e convidou 57 pessoas. Quantas pizzas terá de encomendar para a sua mesa?

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM CONTEXTO ALGÉBRICO UMA ANÁLISE COM ALUNOS DE 9.º ANO[1]

Joana Mata Pereira
Escola Básica 2,3 Francisco de Arruda, Lisboa
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
joanamatapereira@gmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação analisa os processos de raciocínio de dois alunos do 9.º ano na resolução de problemas algébricos. Fazemos uma análise qualitativa e interpretativa da resolução de duas tarefas envolvendo múltiplos por estes alunos, procurando compreender os tipos e os processos de raciocínio matemático. Os resultados comprovam que os alunos, apesar de terem alguma facilidade em formular conjecturas, não sentem necessidade de as testar e justificar. Além disso, para os alunos, o uso da Álgebra na resolução de problemas é por vezes pouco natural e evidenciam dificuldades nas traduções entre as linguagens natural e a algébrica. Por outro lado, não mostram flexibilidade para usar diferentes tipos de raciocínio.

Palavras-chave: Raciocínio, Representações, Álgebra, Pensamento algébrico.

Introdução

No ensino da Matemática, o grande objectivo é o desenvolvimento da capacidade dos alunos pensarem matematicamente. Trata-se, no entanto, de um objectivo ambicioso. A simples aprendizagem de conceitos, algoritmos e procedimentos rotineiros é insuficiente para levar os alunos a perceber a Matemática como uma disciplina lógica e coerente (ME, 2007). Para que exista compreensão efectiva dos procedimentos pelo aluno, é necessário o desenvolvimento do raciocínio. Esta compreensão dos procedimentos passa não só pela sua aplicação, mas também por compreender porque funcionam, como podem ser utilizados e como os seus resultados podem ser interpretados (NCTM, 2009). Ou seja, como refere o NCTM (2007), "ser capaz de raciocinar é essencial para a com-

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projecto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

preensão da Matemática" (p. 61). Por isso, é fundamental conhecer os processos de raciocínio dos alunos.

Esta comunicação analisa os processos de raciocínio de alunos do 9.º ano na resolução de problemas algébricos, com o objectivo de compreender o raciocínio matemático dos alunos, bem como diagnosticar eventuais lacunas no desenvolvimento do raciocínio ao longo do ensino básico. Pela sua importância especial, centramos a nossa atenção na indução e dedução enquanto tipos de raciocínio e na representação, justificação e demonstração, enquanto processos do raciocínio matemático.

Raciocínio matemático

O raciocínio matemático é reconhecido como fundamental por numerosos autores, que sublinham uma variedade de aspectos. Por exemplo, Oliveira (2008) usa a expressão *raciocínio matemático* para referir "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p. 3). Numa perspectiva lógica, Aliseda (2003) identifica raciocínio matemático com inferência dedutiva, caracterizada pela certeza e pela monotonicidade, ou seja, pela existência de uma relação necessária entre premissas e conclusão e pela irrefutabilidade das conclusões. Para Russel (1999), na aprendizagem da Matemática, o raciocínio é "o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objecto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objectos" (p. 1) e é "a ferramenta para compreender a abstracção" (p. 1). Deste modo, enquanto alguns autores salientam sobretudo os aspectos lógicos outros valorizam mais o processo intuitivo, como se formula novas ideias e se chega a conclusões.

Representação

Aceder directamente ao raciocínio matemático dos alunos é, naturalmente, impossível. Para conhecer minimamente este raciocínio é necessário que os alunos o comuniquem, o que só é possível através de diferentes representações. Deste modo, como refere o NCTM (2007), somente "ao observar as suas representações (dos alunos), os professores poderão conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos" (p. 76). Contudo, para além do papel que assumem na comunicação de raciocínios, as representações assumem também um papel decisivo na aprendizagem. Como salienta o NCTM (2007), "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (p. 75). Em Portugal, um dos objectivos gerais do programa de Matemática do ensino básico foca também a necessidade dos alunos compreenderem e saberem usar diferentes tipos de representações (ME, 2007, p. 5). Este programa destaca igualmente que "as representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina (Matemática), e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação" (p. 9).

Outros autores defendem também a necessidade do estudo das representações. Por exemplo, Vergnaud (1998) apresenta duas razões distintas: (i) "todos experimentamos representações como um conjuntos de imagens internas, gestos e palavras" (ii) "as palavras e símbolos que usamos para comunicar não se referem directamente à realidade, mas a representações de objectos, propriedades, relações, processos, acções e construções sobre as quais não existe um acordo automático entre duas pessoas" (p. 167). Pelo seu lado, Duval (2004) defende ainda que "não é possível estudar os fenómenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação (…) pois não há conhecimento que um sujeito possa mobilizar sem uma actividade de representação" (p. 25). Similarmente Goldin (2008) apresenta os construtos de representação, sistemas de representação e o desenvolvimento de estruturas de representação como componentes essenciais para a aprendizagem da Matemática. Por outro lado, Greeno e Hall (1997) sublinham a relevância das representações na sua relação com o raciocínio ao referirem que "aprender a construir e interpretar representações envolve aprender a participar nas práticas complexas de comunicar e raciocinar, nas quais as representações são utilizadas" (p. 361).

Deste modo, as representações constituem um elemento central no ensino-aprendizagem da Matemática e, consequentemente, no desenvolvimento e compreensão dos processos de raciocínio matemático dos alunos. No entanto, o conceito de representação é um conceito complexo que pode ser encarado de diversas formas. Assim, segundo Goldin (2008) uma representação é uma configuração que poderá, de alguma forma, "actuar no lugar de, ser interpretado como, corresponder a, denotar, descrever, encarnar, codificar, invocar, categorizar, ligar com, mediar, produzir, referir a, assemelhar, servir como metáfora para, significar, substituir por, sugerir ou simbolizar o que está a ser representado" (p. 181). Pelo seu lado, Duval (2006) salienta ainda que os objectos matemáticos nunca devem ser confundidos com a sua representação e refere que este é um dos problemas cruciais da compreensão matemática, na medida em que, não é possível aceder a um objecto matemático sem as representações, o que torna ambígua a distinção entre o objecto representado e a representação usada. Duval (2004) caracteriza também registos semióticos de representação como constituindo "a margem de liberdade de um sujeito para objectivar ele mesmo uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar as informações ou, simplesmente, para as comunicar a um interlocutor" (p. 30).

Duval (2004) encara as representações semióticas como representações externas, e as representações mentais como internas. Também Goldin (2008) distingue representações externas e internas, sendo estas últimas as relacionadas com os sistemas de representações psicológicas dos indivíduos que não podem, em circunstancias habituais, ser observadas por terceiros. Organiza as representações internas em cinco tipos de sistemas inter-relacionados: (i) verbal e semântico; (ii) imagético; (iii) notação formal; (iv) planeamento, monitorização e controlo de execução; (v) afectivo. Cada um destes sistemas permite ao indivíduo produzir um vasto leque de representações externas complexas e específicas que podem ser interpretadas por terceiros: (i) linguagem oral e escrita; (ii) gestos icónicos, desenhos, representações pictóricas, produções musicais ou rítmicas; (iii) fórmulas matemáticas e equações; (iv) expressões de objectivos, intenções, planeamento, estruturas de decisão; (v) contacto visual, expressões faciais, linguagem corporal, contacto físico, lágrimas, gargalhadas e exclamações que transmitem emoções.

Duval (2004, 2006) apresenta duas transformações de representações semióticas que considera radicalmente distintas: tratamentos e conversões. Tratamentos são transformações de representação que ocorrem dentro de um mesmo registo e que revelam o papel intrínseco dos registos semióticos de representação na actividade matemática. São exemplos de tratamentos resolver equações ou sistemas de equações, utilizar um cálculo mantendo-se estritamente na mesma notação ou ainda completar uma figura utilizando critérios de conectividade ou simetria. Por outro lado, conversões são transformações de representação que consistem em transformar a representação de um objecto, de uma situação ou de uma informação de um dado registo semiótico numa outra representação do mesmo objecto, situação ou informação de um outro registo semiótico. As conversões consistem assim em mudanças de registo semiótico de representação. São exemplos de conversões a passagem de uma equação algébrica para a sua representação gráfica ou a passagem de uma constatação sobre uma relação em linguagem natural para a sua notação utilizando letras. A passagem de um registo para outro nem sempre é simples, mas é muitas vezes necessária para uma melhor compreensão do objecto em questão. O NCTM (2007) refere esta ideia ao indicar que "representações distintas focam, geralmente, aspectos diferentes de relações e conceitos complexos" pelo que, para se tornarem conhecedores de conceitos matemáticos, "os alunos necessitam de uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão" (p. 77). Complementarmente, do ponto de vista cognitivo, as aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio requerem, segundo Duval (2004), a diversificação dos registos semióticos de representação, a diferenciação entre representante e representado e ainda a coordenação entre os diferentes registos.

Raciocínio indutivo e dedutivo, justificação e demonstração

O raciocínio matemático surge como capacidade transversal no *Programa de Matemática do ensino básico* (ME, 2007). Oliveira (2002), ao estudar o raciocínio do ponto de vista epistemológico, identifica quatro grandes tipos de raciocínio: (i) indução; (ii) dedução; (iii) abdução; e (iv) transformação. Dada a incidência na indução e na dedução apresentada no programa, o conhecimento de semelhanças e diferenças entre os raciocínios indutivo e dedutivo constitui um ponto de partida para a compreensão do que caracteriza o raciocínio matemático e dos seus processos.

Segundo Pólya (1954), os processos de indução iniciam-se muitas vezes através da observação, sendo a partir desta que se desenvolvem conjecturas que devem necessariamente ser testadas. Este autor refere ainda outros processos relevantes no raciocínio indutivo e que ocorrem frequentemente durante a resolução de problemas matemáticos, nomeadamente a generalização, a especialização e a analogia. Oliveira (2002) sublinha igualmente a estreita relação entre analogia e indução salientando que "quem induz fá-lo por analogia, i.e., a pessoa infere a semelhança das conclusões a partir da diferença dos factos" (p. 174). Por outro lado, é através do raciocínio indutivo que se desenvolvem conjecturas que podem ser posteriormente verificadas. Neste sentido, o raciocínio indutivo é heurístico, desenvolvendo-se do particular para o geral, sem uma conclusão necessária e com um papel de criação de conhecimento (Oliveira, 2002).

Por outro lado, o raciocínio dedutivo é característico da Matemática, onde ocupa um lugar fundamental. É um raciocínio formal, relacionado com as demonstrações e a lógica. Tal como Ponte, Branco e Matos (2008) referem, "raciocinar envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento" (p. 89). Como indica Oliveira (2008), desde que a cadeia de deduções esteja isenta de erros "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas" (p. 7). O raciocínio dedutivo constitui, assim, "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (Oliveira, 2002, p. 178), sendo um raciocínio lógico, desenvolvido do geral para o particular, com uma conclusão necessária e com um papel de validação de conhecimento.

No 3.º ciclo do ensino básico espera-se que a justificação englobe uma argumentação apoiada em procedimentos, propriedades e conceitos matemáticos, fundamentando matematicamente as afirmações em todas as actividades realizadas (ME, 2007). É também espectável que os alunos sejam capazes de distinguir uma argumentação informal de uma argumentação formal. Ainda que sem alcançar o rigor associado à demonstração matemática, as justificações devem apresentar algumas das suas características, sendo mais formais do que em ciclos anteriores. A explicação e justificação de conclusões permitem aos alunos esclarecer o seu raciocínio, desenvolvendo normas para um raciocínio matemático de grande qualidade (Collins et al., citado em NCTM, 2007).

O incentivo à justificação desde os primeiros anos promove a progressão entre as justificações simples e informais e as justificações formais, muitas vezes próximas ou mesmo equivalentes a demonstrações. A formalização de justificações pode, assim, conduzir à realização implícita de demonstrações. Contudo, não é expectável que os processos de demonstração sejam desenvolvidos desde os primeiros anos de escolaridade logo de um modo rigorosamente formal. No 3.º ciclo do ensino básico, tal como na justificação se espera uma maior formalidade, também na capacidade de demonstração é espectável um progresso significativo. Neste ciclo os alunos devem ser capazes de: (i) formular, testar e demonstrar conjecturas; (ii) distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjectura e fazer demonstrações simples; (iii) identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo; (iv) compreender o papel das definições em Matemática; (v) distinguir uma argumentação informal de uma demonstração; e (vi) seleccionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração (ME, 2007, p. 64). Para que os alunos se tornem competentes na utilização adequada do raciocínio indutivo e dedutivo, é necessário que haja espaço para a discussão de conjecturas e afirmações matemáticas com o professor e os colegas (NCTM, 2007). Algumas características dos processos de demonstração como a formulação de uma conjectura plausível, a verificação desta conjectura e a apresentação do raciocínio utilizado, são espectáveis nestes níveis de ensino, ainda que sem o formalismo associado à demonstração matemática (NCTM, 2007). Tal como a justificação, pretende-se que a demonstração seja desenvolvida progressivamente ao longo do percurso escolar, devendo os alunos ser capazes de identificar e usar os processos inerentes à demonstração como a conjectura e o teste, bem como ser capazes de distinguir e utilizar raciocínios indutivos e dedutivos.

Metodologia

Este estudo é de natureza qualitativa, inserindo-se no paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994) e recorrendo a dois estudos de caso (Stake, 2009). Os dois casos, Maria e Duarte (nomes fictícios), são alunos do 9.º ano do ensino básico inseridos numa turma que trabalha o programa de Matemática anterior (ME, 1992), cuja professora, com cerca de cinco anos de experiência, não teve ainda qualquer envolvimento profissional com o actual programa (ME, 2007). Os alunos foram seleccionados apenas de acordo com o seu desempenho escolar em Matemática, sendo os dois alunos com melhor desempenho da turma. Note-se, porém, que se trata de uma turma com desempenho pouco satisfatório.

Para a recolha de dados foram utilizadas duas entrevistas individuais videogravadas, uma com cada um dos alunos seleccionados. As entrevistas, realizadas pela primeira autora, tiveram a duração de cerca de 20 minutos e foram realizadas na escola, fora da sala de aula. Em cada entrevista foram propostas duas tarefas, que foram resolvidas por cada aluno. Quando estes mostraram dificuldades, a entrevistadora questionou-os com o intuito de os orientar nas suas resoluções, tendo o cuidado de não impor estratégias de resolução. Colocou também algumas questões de aprofundamento quando os alunos davam por terminada a resolução e esta se mostrava insuficiente. Além dos vídeos provenientes das entrevistas, também foram recolhidas as resoluções escritas das tarefas realizadas pelos alunos.

Atendendo ao objectivo do estudo, a análise dos dados recolhidos é realizada de acordo com as seguintes categorias: (i) representações; (ii) tipos de raciocínio; e (iii) justificação e demonstração. Em *representações* pretende-se essencialmente analisar os tipos de transformações usadas, procurando analisar tratamentos e conversões. Em *tipos de raciocínio* pretende-se analisar a incidência em raciocínios indutivos ou dedutivos durante a realização de cada tarefa por parte de cada aluno. Em *justificação e demonstração*, os processos como a formulação de conjecturas, e o seu teste e verificação, bem como a argumentação utilizada são analisados face aos dados recolhidos.

As duas tarefas usadas na recolha de dados têm a mesma estrutura que as usadas por Arzarello (2002) para analisar o pensamento algébrico de alunos, consistindo em problemas que podem ser resolvidos através de procedimentos algébricos. Na análise do raciocínio matemático, a resolução de problemas surge como um meio privilegiado pois os processos de raciocínio utilizados incluem a formulação de uma estratégia geral para resolução do problema, a realização de um passo, transformação ou cálculo e a sua justificação (Ponte & Sousa, 2010). A necessidade do uso da demonstração enquanto estratégia para a resolução de problemas pode também levar ao uso de outros processos de raciocínio como a formulação de uma estratégia geral de demonstração e a formulação de passos justificados que levam a uma conclusão (idem). O quadro conceptual para a análise do raciocínio encontra-se no esquema abaixo (Figura 1). O raciocínio indutivo tem lugar sobretudo na formulação de conjecturas gerais a partir de casos específicos e o dedutivo nos processos de justificação. Note-se que o raciocínio apoia-se nas representações e articula-se com os processos de significação (*sense making*) que consistem em desenvolver a compreensão de uma situação, contexto ou conceito conectando-o com conhecimento existente (NCTM, 2009).

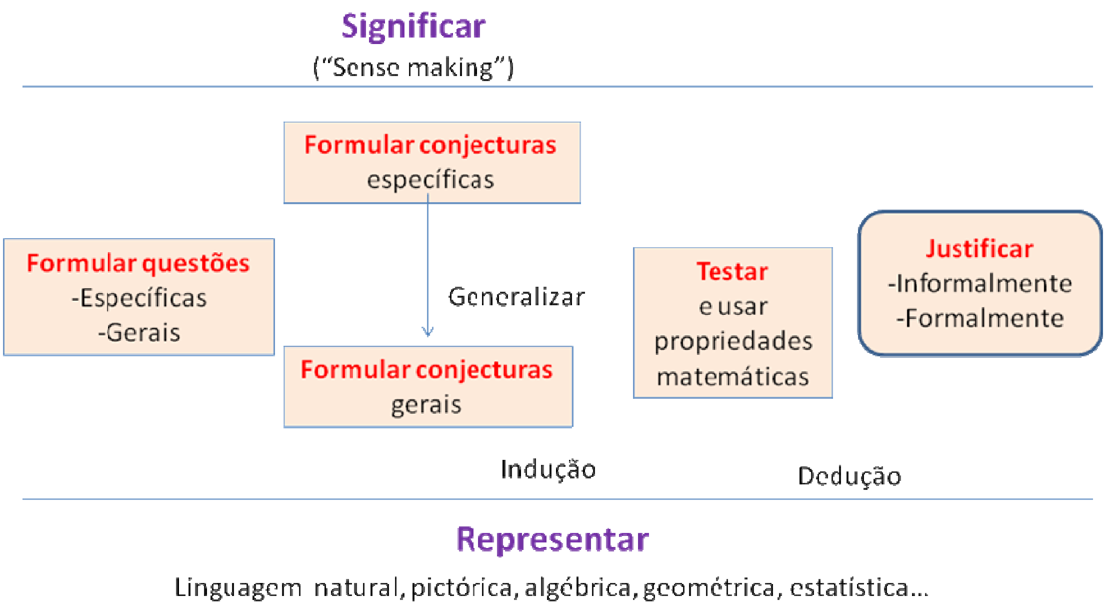


Figura 1. Quadro conceptual para a análise do raciocínio.

Tarefa 1 – Múltiplos de cinco

Tarefa 1: *Que valores pode ter* ***k*** *para que* ***k + 5*** *seja um múltiplo de 5?*

Com esta tarefa espera-se que os alunos conjecturem sobre os valores que *k* pode tomar e que testem e verifiquem a sua conjectura. Para a sua resolução é necessário ter presente a noção de múltiplo de um número e também um modo de o representar.

Resolução de Maria

A aluna apresenta de imediato uma resposta ao problema, sem explicitar o seu raciocínio, levando menos de 10 segundos entre a leitura da tarefa e a sua resposta:

K pode acabar em 0 ou em 5 para ser multiplo de 5

A partir desta resposta, e quando solicitada a explicar o seu raciocínio, apresenta o seguinte:

ex: 0 + 5 = 5, logo é multiplo de 5

Como a aluna usa apenas um exemplo para explicar o seu raciocínio, surge a necessidade de a levar a explorar um pouco mais a tarefa:

Entrevistadora: Isto é para um número, conseguimos fazer para mais números? (apontando para o exemplo dado)

Maria: Sim.

E.: Sim? Então diz-me lá.

M.: (hesita) não sei… Com números muito grandes… Sei lá…

E.: E não podemos representar esses números por qualquer coisa? O que é que eu sei que o *k* é?

M.: *k* é… Ah, sim! (escreve “5*x* + 5”)

$5x+5$

E.: O que é que me garante que isso é um múltiplo de cinco?

M.: Porque se… Este de certeza que vai dar um múltiplo de cinco (aponta para 5x) e se somar mais cinco vai dar cinco de certeza (corrige), vai dar múltiplo de cinco.

Resolução de Duarte

Perante o mesmo problema, o aluno apresenta em primeiro lugar um caso particular.

$K+5=5+5=10$

A sua interpretação do problema leva-o a terminar por aqui, contudo, quando estimulado, apresenta um valor geral para *k*:

Entrevistadora: E cinco é o único valor que *k* pode tomar?

Duarte: Não.

E.: Não.

D.: Pode ser qualquer número, múltiplo de cinco.

E.: Ah, então que valores é que *k* pode tomar para *k* mais cinco ser um múltiplo de cinco?

D.: Cinco *n* (e escreve)

$K=5n$

E.: Ok. E consegues garantir-me que, se o *k* for cinco *n*, isso (apontando para *k+5* no enunciado da tarefa) é um múltiplo de cinco?

D.: Cinco vezes um, cinco, mais cinco, dá… com dois, dá… Sim, sempre mais cinco fica sempre.

E.: Se eu tiver um múltiplo de cinco e lhe somar…

D.: Cinco vai sempre dar um múltiplo de cinco.

Apesar de encontrar uma resposta geral para o problema proposto, quando confrontado com a necessidade de justificação do resultado encontrado, Duarte volta a recorrer a casos particulares para justificar a sua conclusão.

Representações usadas

Na sua resolução desta primeira tarefa tanto Maria como Duarte usam transformações de representações, Maria apenas conversões, Duarte tanto tratamentos como conversões. Os tratamentos que Duarte utiliza são simples cálculos. As conversões que Maria e Duarte utilizam são mais notórias e dão-se entre a linguagem natural e as expressões algébricas. Nesta tarefa, ambos traduzem *múltiplo de cinco* para *5n* ou *5x*, em particular Maria, que na sua resposta inicial usa a expressão "acabar em 0 ou em 5" e na sua justificação *5x*.

Raciocínio indutivo e dedutivo, justificação e demonstração

Nesta primeira tarefa, o tipo de raciocínio utilizado por Maria é pouco claro, dado que apresenta a sua resposta ao problema antes de explicar o seu raciocínio. Contudo, atendendo ao tempo que Maria demora a responder ao problema e à apresentação imediata de uma generalização para o valor de k, é plausível supor o recurso ao raciocínio dedutivo. Por outro lado, na justificação dada posteriormente, Maria usa um exemplo para iniciar a sua explicação, tenta justificar a sua resolução de modo indutivo. Apenas a hesitação em usar mais casos particulares para justificar a sua resposta e a facilidade com que representa o valor geral de k sugere que Maria utiliza efectivamente o raciocínio dedutivo desde o início da sua resolução.

Duarte é bastante explícito relativamente ao tipo de raciocínio usado. Partindo de um caso particular para a generalização dos valores de k, o seu processo de resolução é indutivo. Mesmo após concluir a sua resolução, Duarte volta a explicitar o seu raciocínio utilizando vários casos particulares e generalizando apenas no final, clarificando a utilização do raciocínio indutivo para a resolução desta tarefa.

Maria conjectura de imediato que *k* é múltiplo de cinco, não sentindo necessidade de testar ou justificar a sua conjectura. As questões colocadas pela entrevistadora, levam-na a justificar a sua conjectura argumentando que a soma entre um múltiplo de cinco e cinco é ainda um múltiplo de cinco. Encontra-se aqui implícita a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou a ideia de múltiplos consecutivos, mas Maria argumenta a sua conclusão apoiada apenas no conceito de múltiplo.

Para Duarte a resolução do problema pode resumir-se a um exemplo, não conjecturando inicialmente. Contudo, quando questionado, chega facilmente à mesma conjectura que Maria. Ao tentar justificar a sua conjectura, Duarte testa-a para dois casos particulares e argumenta a veracidade da conjectura apenas com recurso a esses casos particulares.

Tarefa 2 – Naturais consecutivos

Tarefa 2: *Considera um número natural. Determina a sua soma com os dois números naturais consecutivos seguintes. O que observas? Consegues provar o que afirmas?*

Na sua realização é expectável que os alunos conjecturem sobre as características da soma de quaisquer três números naturais consecutivos e que testem e verifiquem a sua conjectura. Para a resolver é necessário saber representar naturais consecutivos e simplificar expressões algébricas. É também, e mais uma vez, necessário que os alunos tenham presente a noção de múltiplo de um número e o modo de o representar. Esta tarefa surge na sequência da anterior exactamente por ambas se basearem no facto de $kn + k$ ser um múltiplo de k, para k e n naturais.

Resolução de Maria

A aluna começa por escrever o seguinte:

$$2 + 3 + 4 = 9$$

Contudo, não conseguindo observar nada com este exemplo, tenta de imediato passar para uma expressão algébrica que represente a situação pretendida. No entanto, demora algum tempo a escrever uma expressão algébrica para a soma de números consecutivos, o que só consegue com dificuldade e após alguma ajuda:

$$\cancel{x+2x+3x}$$
$$x+(x+1)+(x+2)=3x+3$$

Após escrever e simplificar a expressão algébrica, chega rapidamente a uma conclusão:

> *Entrevistadora:* Então e agora o que é que observas?
>
> *Maria:* Que vai ser um número… Pois… Então… Se tiver um número e multiplicar por três vai dar um múltiplo de três, mais três vai dar outro múltiplo de três.
>
> *E.:* Então se eu somar três números consecutivos o que é que vai acontecer?
>
> *M.:* Vai ser um múltiplo de três.

Resolução de Duarte

O aluno utiliza uma outra estratégia de resolução da mesma tarefa, apresentando logo de início três casos particulares:

$$2+3+4=9$$
$$1+2+3=6$$
$$4+5+6=15$$

> *Duarte:* Dá sempre múltiplos de três!
>
> *Entrevistadora:* E podes-me provar isso?
>
> *D.:* (escreve *51 + 52 + 53 = 156*)
>
> *E.:* E agora vamos descobrir se este é um múltiplo de três? É um múltiplo de três, eu posso-te dizer que esse é. E se eu te disser que esse é, tu acreditas que todos são?
>
> *D.:* Provavelmente.
>
> *E.:* Provavelmente. E consegues provar que todos são?
>
> *D.:* Não.

É notório que, apesar do início da resolução remeter para uma estratégia que permitiria dar resposta ao problema, Duarte não consegue concluir essa estratégia.

Após ser proposto a Duarte que tente utilizar linguagem algébrica para realizar a sua prova, este chega com mais facilidade do que Maria a uma expressão representante da situação e à sua simplificação:

$$a+a+1+a+2 = \underline{3a+3}$$

Contudo, para assumir a conclusão como verdadeira, Duarte volta a sentir necessidade de particularizar, tentando validar a sua conclusão usando um caso particular:

> *E.:* E agora, podes-me dizer que é um múltiplo de três?
>
> *D.:* Sim.
>
> *E.:* Porquê?
>
> *D.:* Porque… Se for dois (apontando para *a*) dois vezes três dá seis mais três dá nove, está certo.

Representações usadas

Nesta segunda tarefa Maria tem uma dificuldade clara na conversão da linguagem natural para a algébrica. Esta dificuldade, que não tinha sido observada na realização da primeira tarefa, leva a supor que Maria tem ainda uma compreensão pouco consistente da linguagem algébrica. Contudo, efectua os tratamentos associados às representações externas de fórmulas matemáticas com facilidade, sendo disso exemplo as simplificações das expressões algébricas.

Na resolução desta tarefa, Duarte usa maioritariamente tratamentos dentro do mesmo sistema de representação. Mas, quando confrontado com a necessidade de utilizar linguagem algébrica, não mostra qualquer dificuldade na conversão da linguagem natural para a algébrica. Por outro lado, na conversão da linguagem algébrica para a natural, mostra mais dificuldade do que Maria. Esta situação pode dever-se ao conceito de múltiplo estar mais presente ou ter sido melhor compreendido pela sua colega.

Raciocínio indutivo e dedutivo, justificação e demonstração

Nesta tarefa, Maria parece utilizar um processo de raciocínio próximo da dedução. Apesar de ter iniciado a sua estratégia de resolução com um caso particular, rapidamente o abandona. Adopta uma nova estratégia utilizando um caso geral, o que leva a uma conclusão válida. Duarte inicia esta tarefa tal como a anterior, usando casos particulares. Apesar de não conseguir concluir a sua estratégia, esta tem um carácter eminentemente indutivo.

Ainda que por processos diferentes, ambos os alunos conjecturam que a soma de três números consecutivos é um múltiplo de três. Maria, após abandonar a primeira estratégia, descobre com alguma facilidade uma conjectura que justifica por meio da expressão algébrica simplificada que encontra. Quanto a Duarte, que por si se cinge à conjectura, após a generalização realizada por sugestão, sente a necessidade de testar essa generalização para justificar que efectivamente representa um múltiplo de três. Este teste não é um teste da conjectura inicial de Duarte, mas um teste de uma generalização que o aluno tem dificuldade em validar sem particularizar.

Conclusão

Maria e Duarte têm muito bom desempenho no contexto da turma, mas ambos sentiram dificuldades assinaláveis na resolução das tarefas propostas e, em particular, na sua justificação. Nem um nem outro sentem à partida necessidade de justificar as suas conjecturas, tal como, de resto, se verificou em trabalhos anteriores (Ponte, 2007). Não parecem dominar ainda a linguagem algébrica de modo natural para resolverem os problemas propostos. Assim, Duarte, ao sentir necessidade de concretizar as expressões algébricas obtidas, mostra notória dificuldade em compreender o papel da linguagem algébrica na justificação. Esta dificuldade reflecte-se também no uso do raciocínio indutivo em ambas as tarefas. Se não consegue recorrer à Álgebra para as suas justificações, dificilmente conseguirá raciocinar dedutivamente. Por outro lado, e ainda que não recorra à linguagem algébrica para as suas justificações, realiza de forma imediata tratamentos dentro da linguagem algébrica, como a simplificação de expressões algébricas, o que é de alguma forma surpreendente. Isto vai de encontro à ideia de que as aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio requerem a diversificação dos registos semióticos de representação e a coordenação entre esses registos (Duval, 2004). Dentro de um mesmo registo de representação, o aluno facilmente efectua as transformações necessárias, mas não consegue realizar a conversão da linguagem algébrica para a natural, o que limita os seus processos de raciocínio e o seu desempenho nestas tarefas.

Maria, ainda que mostre algumas dificuldades na conversão da linguagem natural para a algébrica na tarefa 2, aparenta ter desenvolvido estruturas de representação mais consistentes do que o colega. Sendo estas estruturas de representação essenciais para a aprendizagem da Matemática (Goldin, 2008), é natural que revele um melhor desempenho na resolução destas tarefas. Contudo, este bom desempenho é mais notório na tarefa 2, em que a aluna justifica por si a sua conjectura – enquanto na tarefa anterior apenas justifica quando lhe é solicitado. Aparenta, assim, não estar familiarizada com este tipo de tarefas pois, compreendendo o pretendido na tarefa 1, na tarefa 2 já justifica a sua conjectura sem lho ser solicitado. Estas justificações da aluna são consequência da utilização do raciocínio dedutivo, sendo dadas em linguagem natural, com recurso à linguagem algébrica. Assim, ainda que sem muita formalização, Maria utiliza o raciocínio dedutivo e justifica as suas conjecturas, demonstrando as suas conclusões. Atendendo a que raciocinar matematicamente envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento (Ponte, Branco, & Matos, 2008), o seu desempenho tarefa 2 revela já processos de raciocínio interessantes.

O programa de Matemática anterior (ME, 1992) não dá grande destaque ao raciocínio matemático, o que se pode traduzir num desenvolvimento pouco consistente da capacidade dos alunos raciocinarem matematicamente. Foi este programa que enquadrou o ensino experimentado por Maria e Duarte e, na verdade, o seu desempenho na resolução das tarefas propostas está dentro das expectativas iniciais para este estudo, tendo mesmo algumas das resoluções de Maria excedido estas expectativas. Atendendo ao ensino que experimentaram, não seria de esperar que os alunos tivessem desenvolvido a sua capacidade de raciocinar matematicamente de acordo com os parâmetros do actual programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007). Será interessante verificar no futuro se a generalização do novo programa irá promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos do 9.º ano, habilitando-os a usar tanto o raciocínio indutivo como o dedutivo e levando os processos de raciocínio como a justificação e a demonstração a estarem cada vez mais enraizados. Será também importante verificar se os alunos serão capazes de recorrer a várias representações, para que as conversões entre estas se tornem mais simples, de modo a desenvolver uma maior compreensão dos objectos e conceitos matemáticos.

Para que isso possa acontecer, não basta que exista um novo programa de Matemática, valorizando o raciocínio. Será necessário que os professores conheçam os processos de raciocínio dos seus alunos e reflictam sobre eles. Se esta análise revelar lacunas no desenvolvimento do raciocínio dos alunos, mesmo de aqueles que mostram bom desempenho, será necessário colmatar essas lacunas para que estes sejam mais críticos e desenvolvam uma Matemática com compreensão. Tudo isto requer, certamente, um trabalho muito significativo no âmbito do desenvolvimento curricular e das práticas profissionais na sala de aula.

Referências

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. *Synthese , 134*, 25-44.

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiapinni, G. (2002). A model for analysing processes of thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins, *Perspectives on school algebra* (pp. 61-81). Dordrecht: Kluwer.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehensionin a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Merlín.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematicallearning and problem solving. In L. D. English, *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176-201). Routledge, NY: Taylor & Francis.

Greeno, J., & Hall, R. (1997). Practicing representation. *Phi Delta Kappan, 78*, 361-367.

ME (1992). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem - ensino básico 3º ciclo.* Lisboa: DES-ME.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Obtido em 16 Jan 2008, de DGIDC-ME: http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMa- tematica.pdf

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making.* Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM.

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática , 100*, 3-9.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics.* New Jersey: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM, 39*(5-6), 419-430.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática no ensino básico. In APM, *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Educação e Matemática , 100*, 89-96.

Russel, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM.

Stake, R. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vernaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167-181.

PADRÕES EM CONTEXTOS FIGURATIVOS NO 2.º ANO DA LICENCIATURA EM EDUCAÇÃO BÁSICA

António Guerreiro
Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve
aguerrei@ualg.pt

Resumo

Nesta comunicação apresento uma sistematização das dificuldades manifestadas na unidade curricular de Álgebra e Funções pelos alunos do 2.º ano da licenciatura em Educação Básica da Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve a propósito do estudo de padrões em contextos figurativos. Tentarei descrever os dados, com indicações quantitativas, resultantes das actividades dos alunos em sala de aula. Este estudo decorre de um trabalho de sistematização da análise das produções dos alunos em relação às tarefas matemáticas referentes ao tópico dos padrões em contextos figurativos. Destina-se à valorização do conhecimento profissional, em primeiro lugar do próprio autor, tendo em vista a reestruturação e adequação da formação para a docência em álgebra no contexto do ensino superior. Neste estudo destaco a insuficiente *visualização* dos padrões pictóricos e a importância da definição de novas estratégias de ensino com vista a uma maior compreensão dos processos de generalização das relações entre os termos de um padrão em contexto figurativo.

Palavras-chave: Álgebra, Padrões, Formação para a docência, Ensino superior.

Introdução

Com a publicação do Decreto-Lei n.º 43/2007 de 22 de Fevereiro relativo às condições necessárias à obtenção de habilitação profissional para a docência, as instituições de ensino superior com formação de docentes reestruturaram os planos curriculares dos cursos existentes originando a criação de novos cursos, em acordo com a legislação em vigor. Particularmente, os cursos de educação de infância ou educação pré-escolar, professores do 1.º ciclo do ensino básico e professores do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico (nas respectivas variantes) foram substituídos por uma única licenciatura em Educação Básica, complementada com mestrados na especialidade de pré-escolar e 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.

A Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve desenhou um plano curricular de licenciatura em Educação Básica em que se incluiu uma unidade curricular de formação para a docência em matemática em cada um dos primeiros cinco semestres do curso. A unidade curricular correspondente ao primeiro semestre do segundo ano da licenciatura em Educação Básica denomina-se Álgebra e Funções, com 6 ECTS, num tempo de trabalho total de 168 horas, com a tipologia 45 horas teórico-práticas, 5 horas de orientação tutorial e 2 horas outras.

A unidade curricular Álgebra e Funções propõe-se explorar as ideias algébricas que são desenvolvidas desde a educação pré-escolar até ao 2.º ciclo do ensino básico, tendo por conteúdos programáticos essencialmente os grandes temas algébricos como padrões, relações e funções. O programa desta unidade curricular foi desenhado por mim, aquando da criação do curso, e leccionado pela primeira vez no ano lectivo de 2008/2009. No ano lectivo transacto, por questões de distribuição de serviço docente, não leccionei a referida unidade curricular, tendo sido contudo leccionada em acordo com os planos e materiais anteriores construídos por mim. No primeiro semestre do actual ano lectivo, voltei a leccionar a unidade curricular Álgebra e Funções aos alunos do 2.º ano da licenciatura em Educação Básica.

O retomar desta unidade curricular originou um refazer dos planos e materiais e um repensar de toda a sua estrutura com vista à monitorização dos conhecimentos dos alunos, no âmbito deste campo de conhecimento da matemática, tendo por princípio a utilização do raciocínio algébrico na resolução de problemas. Alguns dos alunos desta licenciatura apresentam um percurso escolar, com matemática até ao 9.º ano, com insucessos e significativas lacunas nos conteúdos matemáticos relativos ao ensino básico. Estes alunos apresentam capacidades de resolução numérica das tarefas matemáticas associadas aos conteúdos escolares referentes aos primeiros seis anos de escolaridades, mas revelam dificuldades acrescidas quando se pretende generalizar ou criar modelos matemáticos dessas resoluções, portanto quando se trabalha o pensamento e raciocínio algébrico.

Neste sentido, parece estar em causa um pensar matemático que extravasa o cálculo numérico e exige um conhecimento profundo dos conceitos de modo a possibilitar a generalização das relações e propriedades em matemática (Branco & Ponte, 2010). A análise dos desempenhos e das dificuldades manifestadas por estes alunos do 2.º ano da licenciatura em Educação Básica, à luz do confronto entre resoluções numéricas contextualizadas e abordagens algébricas dos conteúdos, pode produzir conhecimento, desde logo importante para a reestruturação desta unidade curricular, tendo em vista o aprofundar da discussão sobre o ensino-aprendizagem da álgebra e funções no ensino básico e a formação para a docência neste campo de conhecimento.

Nesta comunicação, pretendo apresentar alguns dados sobre os desempenhos e dificuldades dos meus alunos do 2.º ano da licenciatura em Educação Básica, particularmente nas actividades desenvolvidas em torno dos padrões, salientando as dificuldades manifestadas na generalização das situações apresentadas em contextos figurativos. Decorrente desta análise, pretendo apontar algumas orientações, com vista ao reforço do conhecimento algébrico dos futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade, incidindo na exploração de padrões em contextos figurativos.

Álgebra para ensinar no ensino básico

As perspectivas teóricas no âmbito do ensino-aprendizagem da álgebra decorrem de um posicionamento global sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, particularizado em visões simultaneamente divergentes e complementares que advogam a álgebra como um corpo de conhecimentos, baseado num longo percurso histórico, e como uma actividade humana baseada no pensamento algébrico (Kaput, 2008). Nesta perspectiva, o ensino da álgebra pode estruturar-se em torno dos objectos de estudo, como equações, inequações, funções, estruturas algébricas, etc., ou extravasar a manipulação de símbolos e o estudo destes objectos, visando desenvolver o pensamento algébrico dos alunos (Ponte, 2005).

O desenvolvimento do pensamento algébrico inclui assim os objectos, mas decorre do estudo das relações existentes entre estes, de forma geral e abstracta. Para Ponte, Branco e Matos (2009), o pensamento algébrico inclui as vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas. A vertente representar diz respeito à capacidade do aluno no uso de sistemas de representação. A vertente raciocinar conjuga o relacionamento dos objectos com a generalização das relações. A vertente resolver problemas inclui a modelação matemática a par de outros problemas matemáticos e de outros domínios de conhecimento.

O pensamento algébrico, segundo NCTM (2007), respeita ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação. Nesta óptica, o ensino da álgebra deve habilitar os alunos para: (i) compreender padrões, relações e funções (estudo das estruturas); (ii) representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos (simbolização); (iii) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (modelação); e (iv) analisar a variação em diversos contextos (estudo da variação).

De modo geral, as vertentes do pensamento algébrico podem ser estruturadas segundo três eixos: a generalização da aritmética, o estudo de funções e a modelação matemática. A generalização da aritmética inclui a generalização das operações e relações numéricas, o estudo de funções inclui a variação e generalização de padrões, e a modelação matemática inclui o estudo da regularidade de situações ou fenómenos (Canavarro, 2007; Kaput, 2008). Esta visão sobre o ensino da álgebra não dispensa a utilização dos símbolos algébricos (tradicionais ou construídos) na descrição das situações e na resolução dos problemas, tendo por princípio o raciocínio matemático e a generalização das relações numéricas (Branco & Ponte, 2010; Ponte, 2005).

Paralelamente, as Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (ME, 2002) e o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), nomeadamente no que respeita ao 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, têm assumido de modo crescente o papel da álgebra nos primeiros anos de escolaridade, através do estudo dos padrões como um tópico verticalmente assumido desde a educação pré-escolar até ao ensino secundário.

No contexto da unidade curricular Álgebra e Funções da licenciatura em Educação Básica, optei por estruturar os seus conteúdos em torno do estudo de padrões, relações e funções, através da resolução de problemas, tentando proporcionar aos alunos um conjunto diversificado de experiências de aprendizagem sobre álgebra e funções, com o intuito de promover o reforço do conhecimento em álgebra para ensinar. Este percurso iniciou-se pelo estudo dos padrões, em especial incidência nos padrões em contextos figurativos, através de processos de contagem e de generalização de padrões de repetição e de crescimento.

Padrões e pensamento algébrico

A matemática é apresentada como a ciência dos padrões, por autores como Devlin (2002), realçando o papel dos símbolos algébricos no reconhecimento de conceitos abstractos como *entidades* e no desenvolvimento de uma linguagem adequada à ciência matemática. Neste contexto, a observação de padrões, a sua descrição e generalização, assume-se como um dos eixos fundamentais no desenvolvimento do pensamento algébrico, através do reconhecimento e da criação de padrões, segundo uma lei de formação.

Esta generalização pode ser entendida a dois níveis: *generalização próxima* (ou *local*) e *generalização distante* (ou *global*) (Mason, 1996; Stacey, 1989). A *generalização próxima* ou *local* decorre da identificação dos termos próximos dos conhecidos numa sequência de termos numéricos ou geométricos. A *generalização distante* ou *global* decorre da identificação de termos de uma sequência, suficientemente afastados dos conhecidos, portanto do reconhecimento da sua lei de formação. A *generalização distante* ou *global* requer assim uma maior capacidade de generalizar e fundamentar generalizações, exigindo o desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio matemático.

A generalização decorre de um processo de reconhecimento das variações entre os termos de uma sequência, a partir da visualização da representação pictórica de um conjunto de elementos (Vale & Pimentel, 2009) ou da exploração numérica das variações entre os seus elementos. Alguns padrões podem assim ser reconhecidos e generalizados a partir de um conjunto de tarefas matemáticas de contagem que proporcionem aos alunos a tradução numérica da visualização de padrões de repetição e de crescimento, tendo em vista a sua generalização. Deste modo, parece ser possível afirmar que o reconhecimento de conjuntos de objectos numa disposição padrão facilita a percepção do número numa sequência de representações em contextos figurativos, pela observação e verbalização das generalizações.

Os padrões de repetição – "*motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente*" (Vale & Pimentel, 2009, p. 14) – podem incluir processos de generalização através da transformação *dos motivos concretos* numa abstracção algébrica da realidade. Os padrões de crescimento – "*cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior*" (Vale & Pimentel, 2009, p. 16) – constituem uma oportunidade única de generalização com ligação às sequências numéricas, às progressões aritméticas e geométricas, às sucessões e às séries, constituindo assim uma temática verticalmente transversal do ensino pré-escolar até ao ensino universitário.

Em ambos os casos, a percepção visual de um padrão ou relação não dispensa o reconhecimento da existência de uma representação figurativa e de uma outra analítica ou verbal e a importância da transposição entre as duas por apropriação da existência de uma única lei de formação – geométrica e numérica – na generalização dos padrões em contextos figurativos (Silvestre, Faria, Sousa, Cristo, Santos, Molarinho & Veladas, 2010). Esta compreensão da generalização de padrões constitui a base do sucesso em álgebra (Alvarenga & Vale, 2007) e origina um olhar matemático para além do numérico entendido de modo restrito.

Vale e Pimentel (2005) referem que, da sua experiência, a maioria dos alunos (dos primeiros anos) que utilizam uma abordagem numérica, manifestam insuficiências na generalização dos padrões e, consequentemente, na obtenção de uma lei de formação. Contudo, num estudo desenvolvido com padrões no 1.º e 2.º ciclos do ensino básico por Ana Silvestre et al. (2010), os alunos apresentaram diferentes formas de visualização correspondente a diferentes formas de contagem, nos casos menos complexos, traduzindo-se em leis de formação em linguagem natural, manifestando contudo dificuldade na transposição algébrica.

Opções metodológicas

Esta comunicação resulta da análise sistemática do desempenho dos alunos do 2.º ano da licenciatura em Educação Básica, no âmbito da unidade curricular de Álgebra e Funções, da Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve, no ano lectivo 2010/2011, tendo por docente o seu autor, e pretende descrever as dificuldades de aprendizagem manifestadas pelos alunos no tópico matemático dos padrões em contexto figurativos. Neste estudo, a turma é considerada globalmente e constitui ela própria *o universo* de recolha de dados, assumindo-se uma metodologia que combina a quantificação e descrição do conjunto dos dados recolhidos em sala de aula. Neste ponto apresentarei a constituição da turma, descreverei sucintamente a metodologia de ensino utilizada nas aulas, incluindo uma breve nota sobre as tarefas matemáticas propostas no âmbito deste tópico, e os princípios norteadores da recolha e análise de dados.

Constituição da turma

A turma estava constituída por 43 alunos – 3 homens e 40 mulheres – e funcionava em dois turnos. Um primeiro turno essencialmente constituído pelos alunos que foram colocados na licenciatura em Educação Básica na 1.ª fase de acesso ao ensino superior e um segundo turno constituído pelos alunos da 2.ª fase de colocações ou com reprovações anteriores na unidade curricular. O número de alunos presentes na globalidade dos dois turnos oscilou entre 28 alunos e 38 alunos, originando diferentes *universos* de recolha de dados de aula para aula.

As aulas

As aulas teórico-práticas ocorreram às terças e quintas de manhã. No decorrer das aulas utilizei como metodologia de trabalho a apresentação de alguns apontamentos teóricos sobre a temática em estudo com propostas de tarefas matemáticas em suporte informático – powerpoint – ou em papel, seguido de resolução das tarefas propostas em grupos de 4 a 5 alunos, a pares ou individualmente. As resoluções dos grupos de alunos foram realizadas em folhas de acetato ou em folhas de desenho e posteriormente apresentadas e discutidas em grupo turma ou realizadas individualmente e apresentadas no quadro.

As tarefas matemáticas propostas aos alunos categorizam-se com especial incidência em exercícios e problemas. No tópico dos padrões, optei por propor um conjunto de tarefas matemáticas conducentes à compreensão da contagem em diversas situações e da regularidade e variação numa sequência numérica apoiada por contextos figurativos. Especificamente, optei por trabalhar: contagens em diversos contextos figurativos; padrões de repetição, dando especial importância à generalização das localizações dos elementos constituintes do motivo de repetição; e padrões de crescimento, com incidência na variação entre os termos da sequência numérica representada por elementos pictóricos.

Para avaliação contínua dos alunos na unidade curricular, defini, com eles, seis momentos avaliativos: quatro frequências realizadas durante as segundas horas de quatro das aulas, uma apresentação oral de uma tarefa matemática, no horário das orientações tutoriais, e a apresentação escrita de duas tarefas escolhidas num conjunto de seis tarefas matemáticas propostas. Na plataforma electrónica, os alunos tiveram acesso a todos os materiais e tarefas matemáticas realizadas nas aulas, bem como aos sumários e outra documentação bibliográfica sobre o ensino da álgebra e funções e aos resultados das avaliações.

A recolha de dados

No âmbito desta investigação sobre o desempenho dos meus alunos e, consequentemente, sobre o meu próprio desempenho enquanto professor, elaborei um inquérito, na primeira aula, aplicado a pares de alunos, que incluía um problema sobre padrões de crescimento. No decorrer das aulas recolhi as resoluções de todas as tarefas matemáticas resolvidas em grupos ou a pares e apresentadas ao grupo turma. Todos os testes e trabalhos referentes à avaliação foram naturalmente recolhidos, bem como alguns outros trabalhos com tarefas matemáticas realizados ao longo das aulas. O motivo da recolha dos dados foi comunicado aos alunos, desde a primeira aula, tendo sido realçado a importância de uma análise sistemática das suas produções matemáticas escritas com vista à definição de estratégias de ensino promotoras de sucesso educativo. Os dados recolhidos assentam exclusivamente nas produções escritas dos alunos, as quais constituem um arquivo documental sobre as realizações pessoais e em grupo, dos dois turnos considerados colectivamente. Nesta comunicação utilizarei apenas parte dos dados referidos, resultantes do tópico dos padrões em contextos figurativos.

A análise dos dados

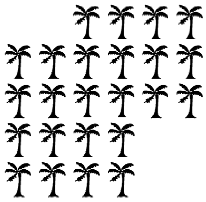
Numa primeira fase seleccionei e organizei os dados referentes à temática dos padrões em contextos figurativos e analisei-os quantitativamente por contagem de frequências atendendo às características do desempenho dos alunos, nomeadamente atendendo às resoluções correctas e às incorrectas. Na fase seguinte, analisei a referida selecção com o intuito de produzir um texto descritivo sobre os desempenhos e as dificuldades manifestadas pelos alunos no tópico de padrões em contextos figurativos. Os dados recolhidos foram sistematicamente analisados tendo por princípio a inclusão, no texto descritivo que corporiza a análise de dados, das produções matemáticas dos alunos que ilustram as suas resoluções correctas e incorrectas. O texto produzido de análise de dados referentes ao tópico de padrões em contextos figurativos inclui os subtópicos das contagens visuais, dos padrões de repetição e dos padrões de crescimento. O texto descritivo adiante apresentado tenta ilustrar as dificuldades manifestadas pelos alunos do 2.º ano da licenciatura em Educação Básica na aprendizagem de padrões em contextos figurativos e sugerir algumas estratégias de ensino tendo em vista o aprofundamento do conhecimento em álgebra dos futuros professores dos primeiros anos de escolaridade.

Padrões em contextos figurativos

Contagens Visuais

A abordagem dos padrões em contextos figurativos iniciou-se pelas contagens visuais, tendo por base a percepção global de um conjunto de elementos pictóricos. Optei por partir de diferentes tipos de composições figurativas, realçando a valorização das disposições rectangulares e triangulares. A visualização de conjuntos de elementos parece ser uma das estratégias promotoras da identificação de relações numéricas entre eles, apesar da imediata tradução das representações visuais em expressões numéricas. A tradução numérica resultou, num dos grupos de alunos, de uma organização visual da disposição de palmeiras[1], numa conjugação de relações numéricas com a respectiva representação figurativa:

[1]



Quantas palmeiras tem o xeque Al-Said no seu jardim?
Apresenta diferentes modos de as contar.
(Vale & Pimentel, 2009, p. 34)

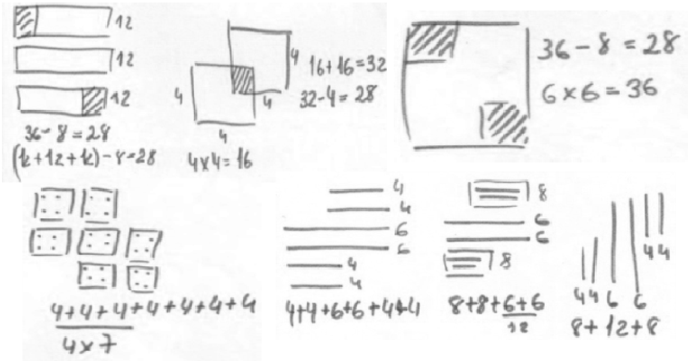


Figura 1. Resolução de um grupo de alunos da tarefa das palmeiras (Vale & Pimentel, 2009)

Os alunos identificaram essencialmente três tipos de estratégias de contagem por associação com diferentes representações visuais: retirar do todo, os elementos em falta; compor o todo, a partir de grandes partes; e contagens unitárias ou em pequenos grupos. No problema de «As luzes» (Vale & Pimentel, 2009, p. 32), os alunos foram confrontados com o pedido de duas expressões numéricas diferentes que traduzissem a contagem das luzes acesas:

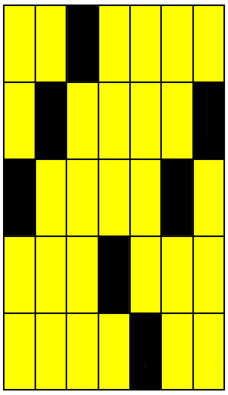


Figura 2. Problema «As luzes» (Vale & Pimentel, 2009)

Num total de 38 alunos, 30 alunos apresentaram a solução de retirar 7 luzes num total de 35 (7×5-7) [4 alunos não apresentaram qualquer expressão numérica], como resultado de uma visualização rectangular do todo, retirando os elementos em falta. Contudo, uma segunda expressão numérica representativa do número de luzes acesas foi substancialmente menos respondida, existindo apenas 13 alunos que apresentaram expressões numéricas traduzindo uma possível contagem das luzes, com base em contagens por linha ou por coluna. A percepção visual dos alunos em padrões figurativos parece condicionada por estruturas rectangulares, como neste caso da moldura das janelas, associadas à operação multiplicativa, ao invés de outro tipo de organização. Deste modo, parece de toda a pertinência o trabalho com contagens visuais a partir de disposições organizadas em diversas formas e segundo diversas orientações, como modo de promover uma maior diversidade na visualização de regularidades nos padrões em contextos figurativos.

Padrões de repetição

A visualização destes conjuntos pictóricos parece contudo menos presente quando estamos perante um padrão de repetição em friso ou um padrão de crescimento em sequência. Os padrões de repetição foram trabalhos em grupo e discutidos em turma, a partir de diferentes exemplos que podem ser caracterizados pelos *motivos* de repetição como A, AB, ABC e AAB, não existindo dificuldades relevantes. Apenas um dos grupos de alunos seguiu um raciocínio errado de localização dos elementos num friso ao utilizar desadequadamente uma relação directamente proporcional, como forma de encontrar a localização dos elementos de um friso, tipo ABC, por duplicação das posições.

Perante um padrão de repetição com o *motivo* ABAC, os alunos não apresentaram significativas dificuldades na identificação dos elementos localizados em ordens pequenas nem nas posições pares ou ímpares. Contudo, na generalização das posições dos elementos C e B apresentaram diferentes alternativas, manifestando alguma dificuldade na definição da posição do elemento B. O padrão de repetição usado, foi retirado de Vale e Pimentel (2009), ilustrando uma sequência de tipo ABAC com castanhas, avelãs e folhas:

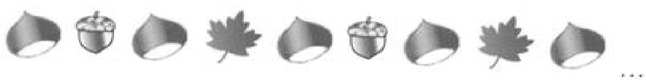


Figura 3. Padrão de repetição (Vale & Pimentel, 2009)

Em relação à posição das folhas (C), 28 (em 37) alunos responderam que a folha está posicionada nos múltiplos de 4 (utilizando também a notação 4*n*, com *n* número de *motivos* repetidos) e 3 alunos responderam na 4.ª posição, ignorando a continuidade da sequência. Os restantes 6 alunos, apesar de alguns referirem a ideia de 4 em 4, não responderam adequadamente à questão. A identificação de uma posição múltipla (neste caso de 4) não parece apresentar significativas dificuldades, por associação com os múltiplos de um número e as respectivas tabuadas da multiplicação.

Em relação à posição das avelãs (B), os números pares não múltiplos de 4 ou simbolicamente na posição $4n - 2$, com n número de *motivos* repetidos, os alunos já apresentaram significativas dificuldades na explicitação desta situação. Dos 37 alunos, apenas 6 apresentaram a solução «pares não múltiplos de 4 (ou $4n - 2$)». Dos restantes, 3 alunos referem 2.ª posição, ignorando a sequência, e 5 alunos referem de 4 em 4 a partir do segundo termo. Mais de um quarto dos alunos (10) respondem na posição par ou múltipla de 2, integrando desadequadamente os múltiplos de 4. Os restantes alunos, apesar da ideia de 4 em 4, não apresentaram respostas adequadas ao problema.

Destes dois exemplos parece ser possível inferir que os alunos apresentam maiores dificuldades na caracterização de números que decorrem de um padrão que não são múltiplos de um número natural. Provavelmente este é um dos aspectos que é menos trabalhado ao longo da escolaridade no ensino básico e secundário e que carece de um maior conhecimento sobre as relações numéricas existentes para além dos múltiplos dos números associados, nos primeiros anos de escolaridade, às tabuadas de multiplicação. O reforço da generalização das relações numéricas entre números não múltiplos parece ser assim um dos objectivos a prosseguir em futuras abordagens de padrões de repetição em contextos figurativos com a estrutura de friso.

Padrões de crescimento

Os padrões de crescimento apresentam outro tipo de generalizações e outro tipo de complexidades. No inquérito realizado na primeira aula, uma das questões requeria a determinação da relação existente entre o tamanho da árvore de natal e o número de luzes para qualquer árvore, em acordo com a sequência das árvores de natal (primeiros três termos):

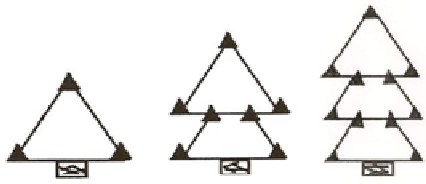
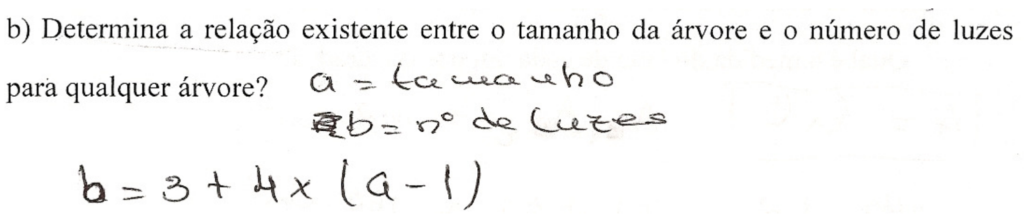


Figura 4. Tarefa das luzes de Natal

Dos 14 inquéritos, correspondendo a 28 alunos, 11 grupos de alunos definiram o número de luzes por recorrência indicado que a próxima árvore levaria mais 4 luzes do que a anterior, através da transposição verbal da regularidade recursiva visualizada. Estes grupos de alunos não tentaram ir além da constatação do acréscimo de 4 luzes em relação ao tamanho das árvores, denotando uma reduzida abordagem algébrica na resolução de problemas com padrões de crescimento, a par da inexistente utilização de simbologia algébrica. Dos restantes três casos, um não respondeu, o segundo escreveu que "*Quanto maior for a árvore mais luzes precisará*" e o terceiro utilizou a álgebra na resolução da tarefa. No caso deste último par de alunos, a notação simbólica utilizada parece ser demonstrativa do conhecimento algébrico das relações entre os objectos:



b) Determina a relação existente entre o tamanho da árvore e o número de luzes para qualquer árvore? a = tamanho
b = nº de luzes

$b = 3 + 4 \times (a - 1)$

Figura 5. Resolução de um par de alunos à tarefa das luzes de Natal

No início da leccionação da unidade curricular apenas um grupo de dois alunos apresentou uma solução generalizável desta situação, através de uma expressão algébrica, o que pode supor que em situações problemáticas apenas um reduzido número de alunos recorreria ao *pensamento algébrico* na resolução de problemas de padrões de crescimento, não fazendo uso dos seus conhecimentos matemáticos no âmbito da álgebra.

O trabalho com regularidades conducentes a expressões do tipo $u_n = an + b$, não apresentou muitas dificuldades, dado que os alunos concentravam-se na regularidade das diferenças entre os termos e facilmente identificavam a expressão geral. O sucesso desta estratégia utilizada pelos alunos é igualmente referido em Alvarenga e Vale (2007). O problema dos morangos em v (Vale & Pimentel, 2009, p. 16), esquematicamente representados os primeiros três termos, foi proposto aos alunos tendo em vista a sua generalização:

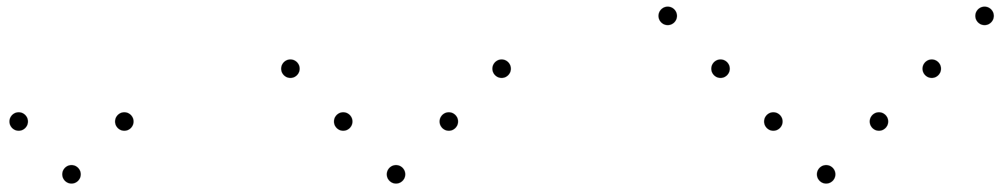


Figura 6. Problema dos morangos em v (Vale & Pimentel, 2009)

A maioria dos alunos (30 em 37) não apresentou dificuldade na representação do termo de ordem n como sendo $u_n = 2n + 1$, por utilização do método das diferenças entre termos consecutivos. De entre os erradamente resolvidos surgiu uma relação verdadeiramente interessante, apesar de incorrectamente solucionada. Uma das alunas associou esta regularidade aos primeiros números primos ímpares, propondo para quarto termo o v com 11 morangos, originando uma sequência diferente não generalizável.

Apesar do reconhecimento do termo geral, os alunos não assumiram o facto de que todos os termos desta sequência são necessariamente ímpares. Perante a questão «Qual o termo que tem 102 morangos?», só dois alunos afirmaram que não existia nenhum termo com 102 morangos por este ser par, sem efectuar cálculos. Dos restantes, a esmagadora maioria dos alunos efectuou os cálculos através da equação $2n + 1 = 102$, obtendo $n = 50{,}5$, tendo concluído que: não existe nenhum termo com 102 morangos (7 alunos); que o termo é o de ordem 50 (8 alunos); que o termo é o de ordem 51 (3 alunos) e que o termo é o de ordem 50,5 (3 alunos).

Estes dados parecem indicar que, apesar de *n* representar um número natural, é legitimo transformar 50,5 em 50 ou 51 numa situação problemática, sem atender às características do conjunto dos números naturais. Este caso pode ilustrar a utilização sem sentido do símbolo *n* ou resultar de uma inadequada apropriação do conceito de padrão de crescimento e da sua relação com as regularidades numéricas, particularmente, neste caso, com os números ímpares superiores a um.

Um outro aspecto a realçar decorre da transformação imediata das representações pictóricas em representações numéricas pelos alunos, sem se apropriarem da *visão* do contexto figurativo do padrão, o que pode transformar a identificação da lei de formação num processo de tentativa e erro entre a expressão algébrica e os valores numéricos. Num estudo com futuros professores, referido em Alvarenga e Vale (2007), envolvendo exploração de padrões em contextos numéricos e figurativos, os investigadores Rivera e

Becker, concluíram que a maioria dos participantes no estudo apresentou soluções numéricas, desvalorizando as informações fornecidas pelas figuras.

No problema das sequências dos Zs, a partir da representação pictórica representada, foi, proposto aos alunos do 2.º ano da licenciatura em Educação Básica, a determinação do termo geral da regularidade numérica:

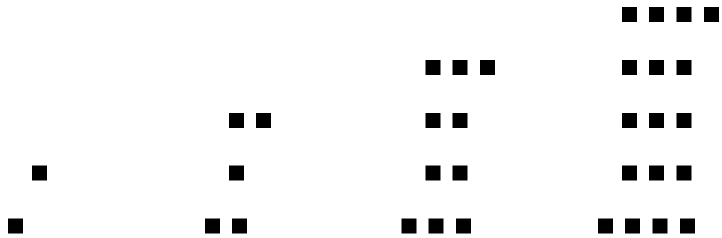


Figura 7. Problema das sequências dos Zs.

A maioria dos grupos de alunos resolveram o problema transformando os Zs numa sequência numérica e tentando, a partir dela, construir o termo geral:

2 quadrados	$= 1 + 1$	$= 1^2 + 1$	
5 "	$= 4 + 1$	$= 2^2 + 1$	
10 "	$= 9 + 1$	$= 3^2 + 1$	
17 "	$= 16 + 1$	$= 4^2 + 1$	
26 "	$= 25 + 1$	$= 5^2 + 1$	

Figura 8. Exemplo de resolução dos alunos à tarefa dos Zs.

Dois dos grupos, de quatro alunos cada, não foram além da concretização dos termos seguintes, revelando uma reduzida capacidade de *generalização distante* nas situações mais complexas. Decorrente desta tarefa matemática, apenas um dos grupos utilizou uma estratégia visual de determinação do termo de ordem n, como resultado da combinação de um quadrado de lado *n – 1* com duas linhas de dimensão n:

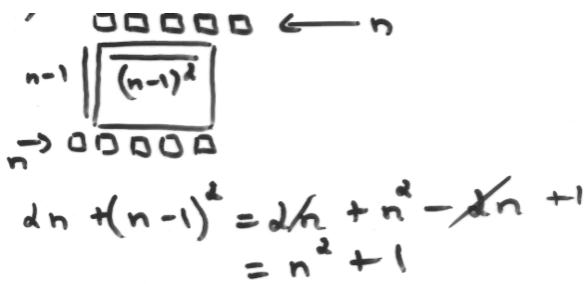


Figura 9. Resolução de um grupo à tarefa dos Zs recorrendo a uma estratégia visual

Nas situações em que a análise dos dados através da existência de regularidades, nas diferenças ou nos quocientes inteiros entre termos consecutivos, auxilia a determinação do termo geral parece existir um número significativo de alunos que recorre a essas relações sem tentar olhar o padrão segundo uma leitura figurativa, para além dos que não apresentam qualquer percepção visual da relação entre as quantidades numéricas. Num problema inspirado no triângulo de Sierpinski, os grupos de alunos transformaram os dados em relações numéricas, utilizando a representação pictórica apenas para ilustrar a contagem:

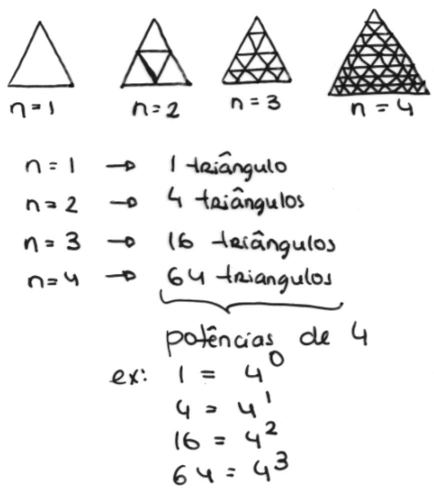


Figura 10. Exemplo de resolução dos alunos do problema inspirado no triângulo de Sierspinski

A leitura algébrica dos padrões em contextos figurativos surge de modo muito incipiente entre os alunos, devido à rápida transformação numérica dos padrões visuais e à ausência de uma visão transformadora dos elementos da sequência para além da identificação do número de elementos constituintes de cada termo. Deste modo, parece relevante apostar numa maior incidência na contagem visual dos elementos de um termo e na identificação visual da variação dos termos de um padrão em contexto figurativo.

Considerações finais e sugestões para a formação para a docência

O *pensamento algébrico* não parece surgir entre um número significativo de alunos, mesmo após a escolaridade básica e secundária, o que nos remete para a necessidade de reconstrução do conhecimento algébrico, através de tarefas isomorfas às indicadas para o ensino e a aprendizagem da matemática nos primeiros anos, dos alunos que frequentam uma licenciatura conducente à profissão docente.

Um certo sentido de *pensar matematicamente* como o definir de uma regularidade numérica para além dos múltiplos de um número, o sentido crítico em relação aos dados e aos resultados e o generalizar visualmente e analiticamente um padrão pictórico, parecem ser algumas das dificuldades manifestadas pelos alunos neste estudo no tema de padrões em contextos figurativos.

A contagem visual em diferentes contextos e formas deve surgir como uma actividade auxiliadora da identificação de regularidades e variações em padrões de repetição e de crescimento. Nesta óptica, devemos promover diversos modos de contagem, com o auxílio de modelos rectangulares e triangulares, a par de outras formas não normalizadas.

A identificação de localizações, num padrão de repetição, para além dos múltiplos de um número, parece ser uma estratégia apropriada para expandir os conhecimentos dos alunos na caracterização algébrica dos números e das suas relações. Assim, devemos associar a localização de cada elemento do padrão às propriedades numéricas relacionadas com a estrutura multiplicativa do *motivo* de repetição.

A visualização das partes constituintes dos termos de um padrão de crescimento pode favorecer uma leitura de generalização para além da identificação e manipulação numérica dos termos de uma sequência numérica crescente. Deste modo, parece oportuno valorizar a constituição figurativa de cada termo e a visualização da alteração entre termos consecutivos.

Em contexto de formação de professores, a análise e discussão sobre a generalização dos padrões deve ser acompanhada por um trabalho sistemático de valorização da visualização e discussão sobre as partes constituintes dos elementos de um padrão, bem como da manutenção ou alteração dos elementos constituintes dos padrões de repetição e de crescimento.

Referências

Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante 16*(1), 27-55.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante 16*(2), 81-118.

Devlin, K. (2002). *Matemática. A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning?. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mason, J. (1996). Expressing Generality & Roots of Algebra, in Bednarz, N. Kieran, C. & Lee, L. (Eds.) *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

ME (2002). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar.* Lisboa: ME/DEB.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (Edição original em inglês, 2000).

Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática*, 85, 36-42.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Ponte, J. P., & Branco, N. (2010). A Álgebra na Formação Inicial de Professores dos Primeiros Anos: Uma experiência de formação. In *Desafios teóricos e metodológicos – IENJIE Encontro nacional de jovens investigadores em educação*. Aveiro: UA.

Silvestre, A., Faria, A., Sousa, H., Cristo, I. Santos, I., Molarinho, M., & Veladas, M. (2010). Sequências Pictóricas: Estratégias de generalização dos alunos de 2.º, 3.º e 5.º anos in *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: APM - GTI

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Vale, I., & Pimentel, T. (2005). Padrões: Um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática*, 85, 14-20.

Vale, I., & Pimentel, T. (2009) (Coords). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática. Propostas curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: ESE/IPVC.

SITUAÇÕES DE MODELAÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES[1]

Neusa Branco
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

A presente comunicação aborda o pensamento algébrico de futuros professores dos primeiros anos e de educadores em situações de modelação e o desenvolvimento do seu conhecimento sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra no contexto de uma experiência de formação na formação inicial, em particular do conhecimento da aprendizagem dos alunos. O estudo segue uma metodologia qualitativa, com design de estudo de caso. A comunicação foca o trabalho desenvolvido em situações de modelação por Alice, uma aluna que frequentou a disciplina de Matemática até ao 9.º ano e pretende ser Educadora de Infância. Os dados são recolhidos por dois questionários, entrevistas, observação e documentos produzidos pela aluna. Antes da experiência de formação, Alice revela dificuldades na interpretação e na resolução de situações de modelação. Durante a experiência e no seu final, resolve todas as situações e procura generalizá-las, recorrendo a linguagem natural. A análise e discussão de situações de sala de aula contribuem para o desenvolvimento do seu conhecimento do trabalho dos alunos e ao modo de promover a sua aprendizagem envolvendo a modelação.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, Álgebra, Formação inicial, Modelação, Conhecimento profissional.

Introdução

A formação inicial de futuros professores do ensino básico e de educadores constitui um suporte fundamental para o modo como desenvolvem mais tarde a sua actividade profissional. Na sua formação inicial os futuros professores devem desenvolver um conhecimento profundo da Matemática que vão ensinar e do modo como se processa o seu ensino, em articulação com o desenvolvimento da sua identidade profissional. No domínio da Álgebra, devem ter oportunidade de conhecer os aspectos fundamentais

[1]Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projecto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

respeitantes ao ensino deste tema para os mobilizar na sua prática futura com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos seus alunos.

O ensino-aprendizagem da Álgebra visa o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade (ME, 2007) com ênfase na generalização e na sua representação. A investigação realizada neste domínio, nos últimos anos, tem ajudado a clarificar o que está envolvido no desenvolvimento do pensamento algébrico e o trabalho a desenvolver na sala de aula (Kaput, 2008). Esta abordagem possibilita o surgimento de situações que contribuem para uma compreensão mais aprofundada da Matemática (Canavarro, 2007), promovendo a articulação entre os vários temas.

A formação inicial deve atender aos desafios que se colocam no ensino da Álgebra, sendo importante discutir o desenvolvimento do conhecimento do professor com respeito ao ensino-aprendizagem da Álgebra (Doerr, 2004). Esta comunicação analisa o desenvolvimento da identidade profissional e o conhecimento da Álgebra e do ensino da Álgebra, em situações de modelação, no contexto de uma experiência de formação frequentada por uma formanda que pretende ser educadora de infância, identificando a sua compreensão de situações de modelação, bem como a sua capacidade de analisar o trabalho realizado por alunos.

Pensamento algébrico e situações de modelação

A perspectiva assumida por investigadores como Carraher e Schliemann (2007) e expressa nas orientações curriculares para o ensino da Álgebra nos primeiros anos, coloca a ênfase no desenvolvimento do pensamento algébrico. O seu objectivo é proporcionar experiências pessoais que contribuam para uma aprendizagem com compreensão no estudo posterior formal da Álgebra. Kaput (2008) apresenta a Álgebra com base em dois aspectos centrais: (A) generalização simbólica de regularidades; (B) raciocínio sintacticamente guiado e acções em generalizações expressas no sistema de símbolos convencional. Estes aspectos são integrados em três vertentes: (i) o estudo de estruturas e sistemas abstractos a partir de cálculos e relações, decorrentes da Aritmética e de raciocínio quantitativo; (ii) o estudo de funções, relações e variação; e (iii) a aplicação de linguagens de modelação, tanto dentro como fora da Matemática. Cada um dos aspectos centrais surge de algum modo nas três vertentes. Este autor enfatiza ainda a importância do estabelecimento de conexões da Álgebra com toda a Matemática.

No âmbito da modelação, vertente analisada nesta comunicação, Kaput (2008) apresenta três tipos de situação algébrica, sistematizados na tabela 1:

Tabela 1. Tipos de situações que promovem a modelação

Situação	Interpretação algébrica	Variável
Problemas aritméticos que requerem o uso de aspectos sintácticos da Álgebra	Equação ou sistema de equações do 1.º grau	Incógnita
Sequências e regularidades em situações ou fenómenos	Função	Uma ou mais variáveis
Situações de modelação de resposta única ou problemas de palavras aritméticos puros	Expressão algébrica para exploração geral de relações	Parâmetro

Nos primeiros anos, antes da abordagem formal à linguagem algébrica, os alunos devem ter oportunidade de generalizar situações usando a linguagem natural ou estratégias informais que envolvem desenhos ou símbolos, por exemplo em situações de modelação. As estratégias podem, inicialmente, ter por base a realização de tentativas de verificação de soluções que podem, progressivamente, ser informadas pela identificação de relações lineares e ser representadas por meio do uso de uma notação criada pelos alunos (Sutherland, 2004). Estas situações promovem a compreensão da utilização de símbolos para representar quantidades desconhecidas e a realização de acções sobre as generalizações estabelecidas. Driscoll (1999) sugere, também, a realização de problemas de modelação de modo a explorar as relações entre os valores desconhecidos. Estes problemas podem constituir uma primeira abordagem aos conceitos algébricos nos primeiros anos de escolaridade que mais tarde são tratados de modo mais formal. O objectivo é que os alunos elaborem as suas próprias estratégias de resolução.

A formação inicial de professores dos primeiros anos no âmbito da Álgebra

A formação inicial constitui uma base fundamental para o desenvolvimento profissional do futuro professor (NCTM, 2000), englobando diversas vertentes que contribuem para o desenvolvimento articulado do conhecimento do futuro professor de Matemática, visando o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico. Ponte e Chapman (2008) focam três vertentes a considerar na formação inicial de professores: (i) o conhecimento da Matemática para ensinar; (ii) o conhecimento do ensino da

Matemática; e (iii) a identidade profissional. Segundo estes autores, a formação inicial tem ganho nos últimos anos uma melhor compreensão dos processos pelos quais se aprende a ensinar Matemática e se desenvolve a identidade profissional como professor. Atendendo à especificidade do ensino, a formação de professores deve "proporcionar aos futuros professores oportunidade que lhes permitam compreender, apreciar e abraçar a complexidade da sua prática como uma base para o estudo em curso" (p. 256). A formação inicial deve promover nos futuros professores a capacidade de integrar o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos, a especificidade dos alunos a ensinar, de acordo com a sua escolaridade, e as orientações curriculares. Os formandos devem depois usar este conhecimento integrado para perspectivar a sua prática futura, nomeadamente identificando e integrando diversos recursos e construindo tarefas adequadas ao desenvolvimento de objectivos específicos de aprendizagem.

No âmbito da Álgebra, Doerr (2004) salienta a importância da formação inicial simultaneamente, construir a partir das experiências dos formandos e quebrar o modelo que acompanha essa experiência. Os formandos têm uma longa experiência de observação do que faz o professor de Matemática na sala de aula. Na formação inicial, devem reflectir sobre as suas próprias experiências e observações de ensino. No que se refere ao pensamento algébrico, os formandos que frequentam agora a formação inicial têm experiências prévias muito diversificadas e quando forem leccionar, serão colocados perante desafios e exigências que, na sua maioria, não experimentaram enquanto alunos. Stump e Bishop (2001) sugerem que a formação inicial em Álgebra contemple a aprendizagem sobre generalização, resolução de problemas, modelação e funções. Os formandos devem, ainda, discutir o que envolve o ensino da Álgebra em cada nível de ensino e observar, analisar e reflectir sobre situações particulares de ensino-aprendizagem protagonizadas por professores nas suas salas de aula.

Experiência de formação

A experiência de formação (EF) que está na base da presente investigação decorre no âmbito da unidade curricular Álgebra e Funções, do 1.º semestre, do 3.º ano, do curso de Licenciatura em Educação Básica. A experiência de formação tem em conta um conjunto de orientações relativas à formação inicial de professores, bem como as orientações curriculares para a educação pré-escolar e o ensino básico (1.º e 2.º ciclos). Esta proposta tem duas vertentes que se interligam, o desenvolvimento do pensamento algébrico dos formandos e o seu conhecimento sobre como promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos futuros alunos. A experiência assume uma perspectiva exploratória dadas as tarefas que a constituem e a dinâmica da sala de aula, visando um forte envolvimento dos formandos na discussão dos conceitos algébricos e na análise de situações de ensino-aprendizagem. Além disso, atendem a indicações para a formação de professores e educadores, procurando integrar o conhecimento do conteúdo e o conhecimento didáctico de modo a proporcionar aos formandos experiências de aprendizagem que revelem aspectos didácticos que devem atender no ensino da Matemática aos seus alunos, ou seja, mostrando-lhes o modo como devem ensinar (Albuquerque et al., 2006; Ponte & Chapman, 2008). São realizadas sete tarefas que se distribuem por vários tópicos: Relações, Sequências repetitivas e regularidades, Sucessões, Funções e Modelação matemática. Esta comunicação apresenta algumas questões da Tarefa 2 (em anexo) que envolvem o estudo de relações entre quantidades desconhecidas que podem ser modeladas por equações. Algumas situações remetem para a análise de resoluções de alunos de tarefas de carácter algébrico, como questão A da tarefa 2, e episódios de aula dos primeiros anos de escolaridade.

Metodologia de investigação

A presente investigação segue uma metodologia qualitativa de cunho interpretativo, recorrendo a estudos de caso. Assume uma perspectiva interpretativa que visa reconstituir a experiência vivida pelos participantes, apresentando os significados que estes desenvolvem dos aspectos abordados durante essa experiência e foca questões de conteúdo, mais do que questões de procedimento (Erikson, 1985). A primeira autora assume os papéis de docente e de investigadora,

A realização de estudos de caso procura conhecer a realidade tal como ela é vista pelos participantes (Ponte, 2006) e, atendendo à diversidade de percursos académicos, analisar casos individuais (Stake, 1994). Esta comunicação foca o trabalho desenvolvido por uma formanda, Alice, que frequenta a experiência de formação, e frequentou a disciplina de Matemática apenas até ao 9.º ano, pretendendo ingressar no Curso de Mestrado em Educação Pré-escolar. Os dados são recolhidos entre Junho de 2009 e Março de 2010, tendo origem em entrevistas, observação e documentos produzidos pela formanda. Os documentos surgem em resposta às tarefas matemáticas propostas nos questionários inicial e final (respondidos antes e após a experiência de formação) e às sete tarefas propostas na experiência de formação. São realizadas três entrevistas, procurando as primeira e terceira esclarecer as respostas de Alice aos questionários, inicial e final, respectivamente; a segunda entrevista é realizada durante a experiência de formação e dela faz também parte uma tarefa matemática e um conjunto de questões que visam conhecer pormenorizadamente a perspectiva da formanda relativamente ao trabalho desenvolvido no âmbito da experiência de formação e os conhecimentos que manifesta nesse momento. As entrevistas são gravadas em áudio e vídeo e posteriormente transcritas. A observação é realizada pela em sala de aula durante o decorrer das aulas e registada em notas de campo. As aulas em que decorrem as sete tarefas são gravadas em vídeo e áudio, de modo a apoiar os registos.

A análise dos dados procura evidenciar aspectos relativos a três vertentes fundamentais da formação inicial, o desenvolvimento da identidade profissional, o conhecimento da Álgebra, com enfoque no pensamento algébrico manifestado por Alice em situações de modelação e o conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem. Assim, foram seleccionados e analisados dados relativos às respostas escritas e das entrevistas nas tarefas Qi-2b, Qi-8a e Qi-8b (questionário inicial) e Qf-2b, Qf-8.1 e Qf-8.2 (questionário final) e nas situações (A) e (C) da tarefa 2, reflectindo a interpretação de Alice das situações de modelação e das suas respostas escritas nos questionários. Foram, ainda objecto de análise dados das três entrevistas que revelam a identidade profissional de Alice e a sua perspectiva sobre o trabalho desenvolvido na experiência de formação.

Alice

Apresentação

Alice tem 23 anos de idade. O seu percurso antes da entrada no ensino superior revela dificuldades em Matemática desde o 1.º ciclo. Nos 2.º e 3.º ciclos teve apoio pedagógico nesta disciplina, o que contribuiu para o seu sucesso, terminando o 9.º ano com nível 3. No ensino secundário frequentou um curso profissional de Técnico de Auxiliar de Infância do qual não fazia parte a disciplina de Matemática. Mais tarde, trabalhou durante dois anos em creches e jardins-de-infância. As unidades curriculares Seminário de Iniciação à Prática Profissional constituem uma importante vertente do curso. No 2.º ano, frequentou creches e esteve na comissão de protecção de crianças, fazendo um balaço positivo das suas experiências. No 3.º ano, no 1.º semestre, frequenta escolas de 1.º ciclo e no 2.º semestre jardins-de-infância, tendo expectativas elevadas relativamente a esta última experiência.

Na unidade curricular Álgebra e Funções, Alice é bastante assídua e colabora prontamente no trabalho proposto. Durante a experiência de formação revela sentir algumas dificuldades por estar a tratar assuntos que estão muito distantes no seu percurso anterior ou que desconhecia até ao momento. Quanto ao modo de trabalho na aula, refere gostar particularmente dos momentos de trabalho em grupo por estes envolverem a partilha de ideias e conhecimentos matemáticos com outros formandos, ideia que reforça na terceira entrevista, destacando os momentos de discussão e sistematização de ideias.

Alice valoriza todas as situações de aprendizagem referindo que "tudo o que aprendi, para mim, aqui já foi um bónus, porque eu ia mesmo às escuras" (E2). Após a conclusão da experiência de formação, faz um balanço das aprendizagens que considera ter realizado no âmbito da Álgebra e valoriza o conhecimento do conteúdo em função do trabalho que pode desenvolver enquanto futura educadora: "Algumas coisas dá para transportar para o pré-escolar, mesmo que não tenhamos estado a falar especificamente mas já dá para ver algumas situações em que dá para aplicar, no pré-escolar, que é mais o meu objectivo" (E3).

Desenvolvimento da identidade profissional

Alice apresenta de um modo claro o seu intuito de ser educadora de infância. Ao longo da sua formação inicial, vive diferentes experiências que lidam com o seu conhecimento e também com o seu modo de ser, a perspectiva pessoal da educação e a sua identificação com a profissão. Os Seminários de Iniciação à Prática Profissional proporcionam experiências de observação em diferentes contextos que contribuem para o desenvolvimento da sua identidade profissional. Neste âmbito diz gostar de todas as fases de jardim-de-infância mas não tanto de 1.º e 2.º ciclos. No presente semestre frequenta o Seminário de 1.º ciclo e, no início do ano lectivo, revela algum receio por não se identificar tanto com este ciclo e por pretender trabalhar com crianças mais pequenas:

> Eu gosto das crianças na mesma, mas a maneira da estrutura e a maneira de lidar com as crianças e mesmo o currículo… É tudo diferente, é diferente. Não é bem isso que eu quero, gosto mais de estar a lidar com os pequeninos assim de maneira mais informal, não quer dizer que seja que não seja importante, mas pelo menos é mais informal. Eu gosto de coisas assim mais informais. (E1)

Quando Alice pensa na possibilidade de intervir no 1.º ciclo mostra-se muito receosa e diz preferir que tal não se proporcione, por este não ser o contexto em que pretende trabalhar e não se sentir segura para o fazer. Contudo, após a frequência do seminário, faz um balanço positivo. O último contexto é jardim-de-infância e a sua expectativa é grande, por ser o contexto onde se sente melhor e por pretender ser educadora de infância. Quanto ao ensino nesse nível de escolaridade, nomeadamente da Matemática, salienta o carácter mais informal que atribui ao trabalho com as crianças, não deixando de o considerar importante:

> O meu objectivo é… De uma forma muito, não é ligeira de ser pouco importante, mas pelo menos ter algumas actividades que dêem a conhecer à criança desde cedo o que é a Matemática e de maneira a que eles possam, como é que hei-de dizer, chegar a um primeiro ciclo já com algumas noções. Não como uma noção muito rígida, mas pelo menos não chegarem ao 1.º ciclo e nunca terem, por exemplo, contacto com as formas, ou qualquer coisa assim desse género. Mas também ainda não aprofundei muito isso, porque ainda não falámos muito. (E1)

Refere que deve proporcionar às crianças o contacto com situações que envolvem a Matemática para terem já algum conhecimento quando ingressam no 1.º ciclo. Contudo, não consegue indicar muitas dessas situações e considera que este aspecto não foi ainda muito aprofundado no curso.

Situações de modelação matemática

Antes da EF.

Pensei num número. Multipliquei esse número por 3 e depois adicionei 7. Por fim subtraí 10. Obtive o número 12. Em que número pensei?

Figura 1. Tarefa Qi-8a.

Em resposta ao questionário inicial, Alice não apresenta qualquer resolução para o problema que envolve um valor desconhecido e pode ser modelado por uma equação equivalente a $3x+7-10=12$ (Figura 1). Questionada novamente sobre este problema na primeira entrevista, relê o enunciado e após algum tempo de silêncio identifica que está a fazer por tentativas, testando o número 1, e a interpretar incorrectamente o enunciado, lê "somei" onde indica "subtraí":

> 1 vezes 3 é 3, para depois somar 7, dava 10. Depois estava a ver que somava 10 e já dava 20, nunca dava 12. Nem 1 dava e eu não estava a perceber, pois era o [valor] mais pequenino que eu conseguia. Afinal é "subtraí". (E1)

Alice considera que o valor em que pensa é 1 e realiza uma adição no lugar de uma subtracção. Começa por considerar não existir solução para este problema. Apenas faz tentativas com números maiores que zero, assumindo que a solução terá de ser um número positivo. Após rever a sua interpretação do problema tenta novamente encontrar a solução para o número desconhecido. Agora utiliza, em parte da resolução, a estratégia em que considera que parte do problema que pode ser representada pela expressão $3x+7$ deve assumir o valor 22 de modo a satisfazer a condição inicial. Estabelece, assim, uma equação equivalente à inicial, $3x+7=22$, para a qual procura solução por meio de tentativas:

> *A.* - O raciocínio já percebi, agora encontrar o número é que é difícil. Se eu encontrasse um número que desse 22, subtraía 10 e chegava ao 12. (…)
>
> *I.* - Que números é que está a tentar?
>
> *A.* - Estava a tentar o 5, mas ainda não cheguei lá. [Olha para o enunciado mais algum tempo e depois escreve] (E1)

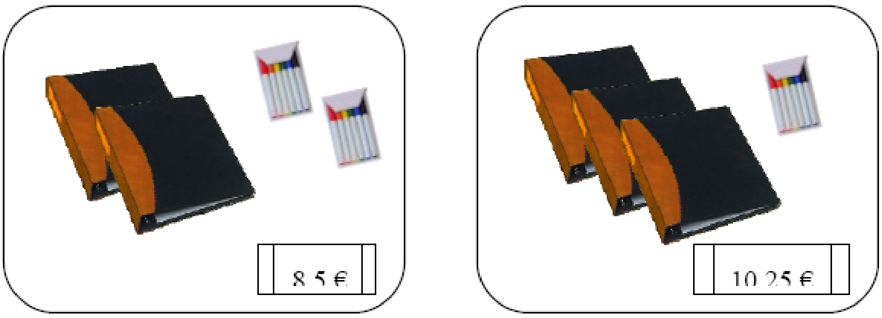
$$5 \times 3 = 15 + 7 = 22 - 10 = 12$$

Alice realiza as operações indicadas no enunciado considerando que o valor desconhecido é 5. Verifica que este valor é a solução que procura pois confirma que este satisfaz a condição indicada, com base no seu conhecimento dos números e do efeito das operações. Contudo revela alguma dificuldade em explicar o seu raciocínio:

> Porque eu tentei, tentei ver mais ou menos… O 5 por 3, toda a gente vê logo que é 15, e o 15 está próximo do 22. Ainda tinha que acrescentar sete, ainda era uns números a acrescentar e então ainda dava margem para acrescentar, mas não sei… Foi logo esse que me ocorreu, não sei porquê. (E1)

O modo como Alice apresenta as operações não é correcto e revela uma utilização operacional do sinal de igual, com uma leitura das expressões numéricas da esquerda para a direita, indicando depois do sinal de igual o resultado da operação que o antecede. Deste modo, não mostra uma compreensão da relação de equivalência que o símbolo "=" representa.

Dois amigos foram comprar material de escritório de que precisavam. Um dos amigos comprou duas pastas e dois conjuntos de marcadores, tendo gasto 8,5 euros. O outro comprou o mesmo material mas em quantidade diferente. Comprou três pastas e um conjunto de marcadores, tendo gasto 10,25 euros. A situação está apresentada na figura abaixo:



Determine o preço de uma pasta e de um conjunto de marcadores. Explique como fez.

Figura 2. Tarefa Qi-8b.

Na resposta a este problema (Figura 2), Alice indica os valores correctos do preço de cada pasta e do preço de cada conjunto de marcadores mas não explica como os determinou, dando apenas a seguinte resposta:

3€ cada pasta e 1,25 cada conjunto de marcadores

Na entrevista, Alice esclarece que determina os valores por tentativas, procurando satisfazer as duas condições dadas e iniciando a sua análise pela situação que envolve três pastas e um conjunto de marcadores (pelo valor de 10,25 euros), como mostra o excerto:

> Então fui fazendo experiências. Se é dez e se cada um [cada pasta] for a três… Mas isto não foi o meu primeiro raciocínio fiz muitos só que depois é que esqueci. Se for 3, 3 vezes 3 dá 9. Está perto de 10 e 25. Isto nunca pode ser mais do que qualquer um destes, Então 9 para 10 e 25 dá um euro e 25, então era o preço daquilo [de um conjunto de marcadores]. (E1)

Alice refere ter obtido este valor para o preço de uma pasta após ter testado os valores de 1€ e 2€, verificando que não satisfazem a condição. Na entrevista verifica ainda a validade dos valores referidos, 3€ e 1,25€, na outra condição, mostrando não estar muito segura de que eles respeitam à solução final do problema. Confirma que com estes valores obtém um custo total de 8,5€, comprando duas pastas e dois conjuntos de marcadores e valida a resposta dada no questionário. Reconhece que descobre os dois valores por tentativas apenas com base numa das condições.

Durante a EF. Na tarefa 2, Alice determina a solução do problema antes de analisar as respostas de alunos. Numera as figuras dadas de 1 a 4, de cima para baixo e da esquerda para a direita. A resolução tem por base a análise das figuras onde identifica relações entre as quantidades desconhecidas e os dados que conhece:

(1+2) 10,6 + 6,1 = 16,7 → peso de 1G+2M+1P

(1+2−3) 16,7 − 8,5 = 8,2 → peso de 2M

8,2 : 2 = 4,1 → peso de 1M

8,5 + 4,1 = 12,6 → peso de 1G+1M+1P

Alice realiza algumas operações com base nos valores dados e identifica o significado do valor obtido, neste contexto, usando uma expressão algébrica. Verifica assim que $G + 2M + P = 16{,}7$ e que ao fazer $G + 2M + P - (G + P)$ obtém $2M = 8{,}2$. Após determinar o valor da incógnita M, calcula o peso do conjunto das três galinhas. Alice estabelece estas relações de modo a satisfazer as condições dadas e, apesar de usar uma estratégia com base a realização de operações aritméticas elementares, associa aos valores que obtém expressões algébricas em que as três letras representam as quantidades desconhecidas, o peso de cada uma das galinhas.

Após a EF.

Pense num número. Multiplique esse número por 2 e depois adicione 2. De seguida divida o resultado por 2. Por fim subtraia o número em que pensou.

a) Que resultado obteve no final?

b) O que acontece se pensar num outro número.

Figura 3. Tarefa Qf-8.1.

O questionário final apresenta um problema que ilustra propriedades das operações e que pode ser representada por uma expressão algébrica em que a letra assume o significado de parâmetro, equivalente à expressão $\frac{2a+2}{2} - a = 1$. Alice identifica a regularidade e faz algumas experiências com números concretos. Indica que o número pensado é 7 e realiza, na alínea a), as operações indicadas e, na alínea b), faz o mesmo processo com o número 3:

Numero pensado - 7

$(7 \times 2) + 2 \Leftrightarrow$
$14 + 2 = 16$

$\frac{16}{2} = 8$

$8 - 7 = 1$ → resultado final

Numero escolhido - 3

$(3 \times 2) + 2 \Leftrightarrow$
$6 + 2 = 8$

$\frac{8}{2} = 4$

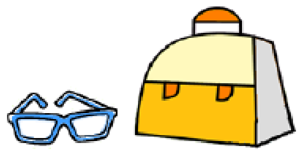
$4 - 3 = 1$

Alice procura, ainda, representar de um modo geral a regularidade que identifica, que escreve a seguir a estas operações. Consegue generalizar a situação e representa-a usando palavras e símbolos e mantém a referência às diferentes indicações dadas no enunciado:

1º passo - dobro + 2
2º passo - fica o valor inicial + 1
3º passo - fica sempre 1

Alice estabelece a generalização e representa-a mas não usa a linguagem simbólica própria da Álgebra. No momento da entrevista, retrata os vários resultados cuja validade não questiona por ter verificado com diferentes números e não destaca a relação existente entre os números e as operações realizadas.

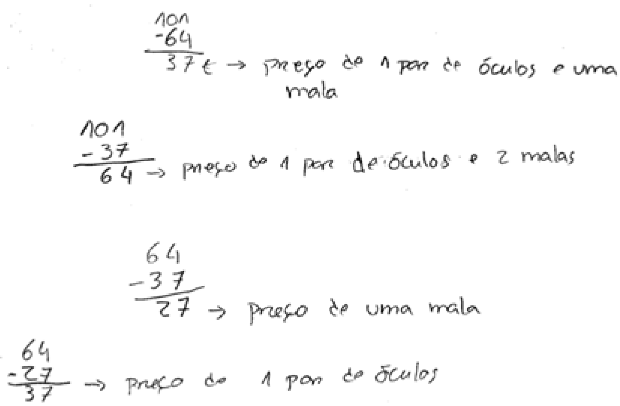
A Maria e a Raquel foram às compras. A Maria comprou um par de óculos e duas malas iguais por 64 euros. A Raquel gastou 101 euros na compra de produtos iguais aos da Maria mas em quantidade diferente, comprou dois pares de óculos e três malas iguais.



Determine o preço de um par de óculos e de uma mala. Explique como fez.

Figura 4. Tarefa Qf-8.2.

Na tarefa Qf-8.2, Alice determina correctamente um dos valores desconhecidos e apresenta o modo como procedeu para determinar os dois valores solicitados. Realiza diversas operações de acordo com as relações que estabelece entre os dados do problema, indicando o significado dos valores que vai obtendo:



Alice verifica que a diferença entre as quantidades de produtos que Maria e Raquel compram é de apenas um produto de cada um dos dois tipos. As operações que realiza podem representar-se como se segue:

x representa o preço de um par de óculos e y representa o preço de uma mala

$$\begin{array}{rl} & 2x+3y=101 \\ - & x+2y=64 \\ \hline & x+y=37 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 2x+3y=101 \\ - & x+y=37 \\ \hline & x+2y=64 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & x+2y=64 \\ - & x+y=37 \\ \hline & y=27 \end{array}$$

Contudo, no final, não determina correctamente o preço de um par de óculos. Na entrevista revê as operações e refere que na última operação não faz uma interpretação correcta do resultado:

> Depois fui pegar no preço outra vez de um par de óculos e de duas malas e tirei o preço de uma mala então fiquei a saber… Ah, isto está mal, não? Ah, professora eu já estou baralhada… Depois fui buscar o preço de um par de óculos e duas malas e tirei o preço de uma mala. Então fiquei a saber o valor de um par de óculos e uma mala. (E3)

Depois de verificar que não conclui de um modo correcto, Alice revê a informação que tem e identifica correctamente o modo como pode determinar o preço de um par de óculos: "Então ia… Ia a este [aponta para o primeiro valor obtido, 37] e tirava este [aponta para o preço de uma mala, que já conhece, 27]" (E3).

Alice estabelece relações entre as quantidades desconhecidas e o que é dado. Contudo não expressa essas relações usando a linguagem algébrica, apresentando apenas uma perspectiva aritmética, o que não acontece na experiência de formação onde articula operações e a expressões algébricas.

Conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem

O conhecimento dos alunos envolve uma compreensão, por parte do professor, de como os alunos desenvolvem o modo como aprendem, pensam e fazem Matemática. Esta compreensão permite que o professor apoie e potencie as capacidades dos alunos, e esclareça estratégias, conjecturas e dificuldades manifestadas pelos alunos.

Antes da EF.

Um aluno formulou a conjectura seguinte:
"Multiplico dois números naturais. Se multiplicar metade do primeiro pelo dobro do segundo o produto é igual ao obtido na primeira situação"

Estará a conjectura formulada pelo aluno correcta? Será que a afirmação é válida para todos os números naturais? E para todos os números racionais?

Figura 5. Tarefa Qi-2b.

Na tarefa Qi-2b, Alice aponta, apenas, para a validade da conjectura apenas no conjunto dos números naturais pares:

Esta conjectura formulada pelo aluno parece-me correcta para os números naturais pares, contudo parece-me que o mesmo não se passa com os números impares

Na primeira entrevista, Alice indica ter realizado a operação 2×4 e revela dificuldades na interpretação do enunciado quando é referido que "o produto é igual ao obtido na primeira situação". Em seguida, realiza algumas tentativas para se recordar do que fez mas revela uma interpretação ainda incompleta do problema. Procura obter o dobro de um número quando realiza o produto em várias situações (2×3, 2×7 e 3×7). Solicitada a reler o enunciado da conjectura, reconhece como deve proceder usando os números 3 e 7: "Metade do primeiro. Ah! Metade do primeiro pelo dobro do segundo… Ah, então três é um e meio, certo? Ai, agora as contas, vezes tem de ser o dobro do segundo, catorze..." (E1).

$3\times7=21$

$1{,}5\times14=$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\, 1{,}5 \\ \hline 70 \\ 14 \\ \hline 21{,}0 \end{array}$$

Após realizar estas operações e obter resultados iguais, Alice não consegue concluir logo acerca da validade da conjectura. Relendo o enunciado da conjectura, confirma que obtém o mesmo valor quando pensa em números naturais. Pensando na possibilidade de um aluno fazer esta afirmação e outros não concordarem sugere que realizem experiências, tal como ela faz, e procura generalizar a situação: "Eu vou dizer isto de uma forma muito elementar. Porque o que se tira no dobro [3 é o dobro de 1,5] acrescenta-se no dobro [o dobro de 7 é 14], ora acaba por dar sempre a mesma coisa" (E1).

Alice testa a conjectura com diversos números e identifica a relação existente, na multiplicação. Expressa essa generalização apenas verbalmente. No âmbito da exploração das ideias e dos conhecimentos dos alunos, não revela muita segurança sobre o modo de abordar as situações em sala de aula. Reconhece, tal como foi para si nesta situação, a importância do teste de conjecturas usando diferentes números.

Durante a EF. A tarefa 2 promove a análise de respostas de alunos do 6.º ano que envolvem diferentes estratégias e representações e do modo como o professor promove a aprendizagem. Alice fica surpreendida com os diferentes modos com os alunos abordam a situação e determinam a solução do problema:

> Eu aqui nesta tive muitas dificuldades, eu achei engraçado como é que alunos, que acho eram de sexto ano, tinham arranjado mil e uma maneiras de resolver isto. E eu fiquei a pensar… Eles têm mesmo, têm mesmo capacidade e depois resolvem de várias maneiras e explicam de várias maneiras, também achei engraçado. (E2)

Alice reconhece que a análise das estratégias dos alunos contribuiu para a sua própria aprendizagem. O foco no raciocínio subjacente, mais que nos resultados, e a análise global das estratégias contribuem para que Alice se aproprie de estratégias que em algumas situações de modelação se revelam mais eficientes:

> Eu lembro-me que depois de ver esta ficha e a forma como um dos alunos tinha resolvido uma situação, numa ficha seguinte, já não sei qual foi, sei que resolvi um problema tendo em conta o raciocínio do aluno, e foi através do raciocínio desta ficha. (E2)

Alice salienta a importância deste trabalho no desenvolvimento da capacidade dos alunos estabelecerem relações entre diferentes quantidades de modo a conseguir determinar os valores desconhecidos. Nestas situações indica que o professor deve ter um conhecimento que lhe permita responder às dúvidas dos alunos e "poder responder de várias formas, e explicar de várias formas para ver a melhor forma que o aluno, o aluno entende" (E2).

Após a EF.

> Um aluno formulou a conjectura seguinte:
> "Adiciono três números naturais consecutivos. Se dividir o resultado por três obtenho sempre o segundo número."
>
> Estará a conjectura formulada pelo aluno correcta? Será que a afirmação é válida para todos os números naturais?

Figura 6. Tarefa Qf-2b.

Esta tarefa apresenta uma conjectura formulada por um aluno que Alice valida após a testar para diferentes números naturais:

$1+2+3=6$ $6 \div 3 = 2$, resto 0

$4+5+6=15$ $15 \div 3 = 5$, resto 0

$7+8+9=24$ $24 \div 3 = 8$, resto 0

$10+11+12=33$ $33 \div 3 = 11$, resto 0

$20+21+22=63$ $63 \div 3 = 21$, resto 0

$100+101+102=303$ $303 \div 3 = 101$, resto 0

De seguida, Alice indica que esta conjectura é válida para todos os números naturais. Na terceira entrevista peço-lhe que justifique esta relação: "Todos estes números [os resultados] são divisíveis por 3, ou múltiplos de 3. Então ao dividir por 3, o que é que vai acontecer!? Não tem muita lógica mas pronto" (E3). Alice verifica que o resultado obtido na adição de três números naturais consecutivos é um múltiplo de três, contudo, não justifica porque tal acontece nem porque ao dividir por três o resultado é igual ao segundo número natural.

No trabalho a realizar na sala de aula, Alice salienta a importância de o professor atender às várias estratégias que podem surgir e à sua discussão:

> Depois tem de ter em conta todas aquelas estratégias que temos vindo a falar da aula, deixar discutir os resultados e depois estar atento às várias, às várias respostas. Não dizer logo à partida que está mal sem, sem haver indicação se pode estar certo, porque havendo muitas respostas para uma pergunta, a criança pode ter tido um raciocínio que o próprio professor não teve, então tem que ter também em atenção. (E3)

Alice verifica que os alunos podem apresentar estratégias próprias que o professor, na sua prática lectiva, deve procurar compreender.

Conclusão

Alice define de um modo claro o seu desejo em frequentar o Mestrado em Educação Pré-escolar e, na experiência que vive em diferentes contextos, revela a sua perspectiva sobre o ensino neste nível, em particular na Matemática. Considera importante o trabalho neste tema a que atribui um carácter informal.

No âmbito do trabalho realizado nas situações de modelação, antes de frequentar a experiência de formação, Alice revela dificuldades na interpretação e resolução de situações e, quando responde, fá-lo por tentativas. A experiência de formação proporciona-lhe oportunidades de trabalhar com situações de modelação e de analisar diferentes resoluções e representações como a utilização de linguagem algébrica. Os formandos discutem e partilham diferentes modos de resolução, o que Alice valoriza, dadas as dificuldades que reconhece ter nesta área. Na experiência de formação e após a sua concretização resolve situações de modelação e estabelece generalizações, como sugerem Stump e Bishop (2001), contudo com um reduzido uso da linguagem algébrica. Utiliza estratégias de cunho aritmético que se baseiam no estabelecimento de relações (Sutherland, 2004) e no uso de notações próprias e esquemas.

Alice não concretiza a possibilidade de promover situações de modelação no ensino pré-escolar, mas valoriza as aprendizagens que realizou no âmbito da experiência de formação, quer no que se refere ao conhecimento matemático, quer em relação ao conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem. Destaca, ainda a importância do conhecimento de diferentes estratégias e da capacidade que o professor deve ter para analisar as resoluções dos alunos e para conduzir as situações de ensino-aprendizagem de modo a fomentar a discussão e partilha de ideias.

A abordagem seguida na experiência de formação, contemplando e articulando o desenvolvimento do conhecimento matemático dos formandos, com ênfase no pensamento algébrico, e do conhecimento sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra contribui para que Alice melhore a sua capacidade de analisar e resolver situações de modelação e perspective aspectos importantes relativos à sua futura prática enquanto educadora (Ponte & Chapman, 2008). Este conhecimento de situações de modelação abrange apenas uma vertente do pensamento algébrico pelo que o trabalho deve ser desenvolvido nas várias vertentes na formação inicial, contribuído para que os formandos desenvolvam um conhecimento aprofundado do trabalho a realizar para promover o pensamento algébrico dos seus futuros alunos.

Referências

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores. Lisboa*: APM e SPCE.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Charlotte, USA: NCTM e IAP.

Doerr, H. (2004). Teachers' knowledge and the teaching of algebra. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 265-290). Norwell: Klumer.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grade 6-10.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Erickson, F. (1985). *Qualitative methods in research on teaching*. Acedido em 26 Outubro, 2010, de http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED263203.pdf

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. Acedido em 2 de Dezembro, 2009, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06 -Ponte%20(Estudo%20 caso.pdf

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Reeves, C.A. (2000). The chicken problem. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*(6), 398-402.

Stake, R. (1994). Case studies. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). London: Sage.

Sutherland, R. (2004). A toolkit for analysing approaches to algebra. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 73-96). Norwell: Klumer.

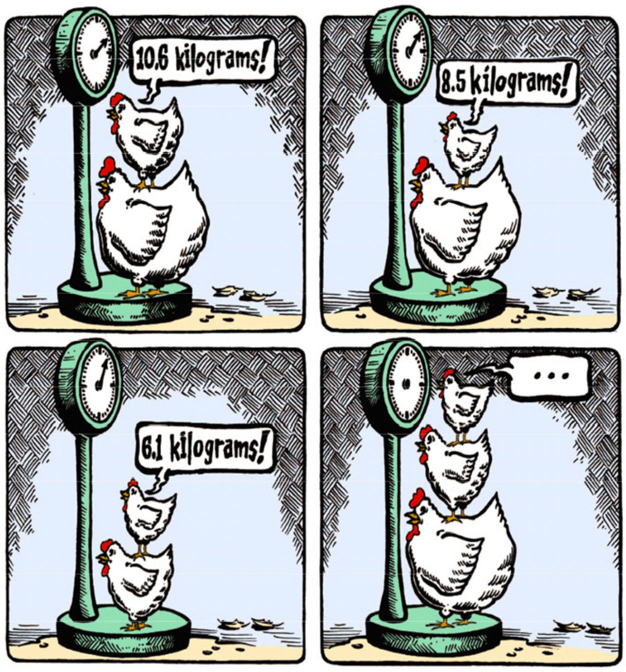
Stump, S., & Bishop, J. (2011). Framing the future: Inventing an algebra course for pre- service elementary and middle school teachers. In H. ChicK, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 564-570). Melbourne: University of Melbourne.

Anexo: Tarefa 2 – Quantidades desconhecidas

Observe a trajectória de aprendizagem dos 44 alunos de uma turma do 6.º ano descrita pela professora (ver Reeves, 2000):

A professora da turma apresentou o problema das galinhas da figura 1 com o intuito de os alunos o resolverem usando abordagens intuitivas antes de iniciarem o estudo formal da Álgebra.

A resolução do problema foi feita em casa e a apresentação das respostas encontradas foi feita na aula. Apenas 22 alunos da turma (50%) tentaram resolver o problema. Destes, 12 encontraram a resposta correcta mas apenas 4 fizeram uma solução fácil de seguir, organizada.



Quanto pesam as três galinhas? Quanto pesa cada galinha?

Fig. 1 – Chicken Problem

(A) Analise estas duas respostas e explique que estratégias seguiram estes dois alunos.

Nome: MATT

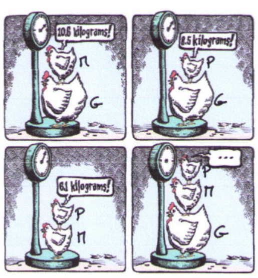
O peso da galinha grande é 6.5 kg.

O peso da galinha média é 4.1 kg.

O peso da galinha pequena é 2 kg.

ui está como eu descobri: Eu coloquei
números 1,2,3 e 4 em cada caixa. Depois
icionei a caixa 2 e a caixa 1. Obtive a soma
16.7. Depois subtrai a caixa 3 a 16.7.
tive o resultado de 8.2. Depois dividi
2 por 2. Obtive 4.1 para o peso da
linha média. Depois subtrai 4.1 à
ixa 1 que tem a galinha grande e a
dia. Obtive 6.5 para a galinha grande.
ois subtrai 4.1 à caixa 2 e obtive 2
ra a galinha pequena.

2 – Resolução de Matt



Nome: JOANNA

O peso da galinha grande é 6.5

O peso da galinha média é 4.1

O peso da galinha pequena é 2.0

Aqui está como eu descobei:

$G + M = 10.6$ kg

$G + P = 8.5$ kg

$M - P = 2.1$ $10.6 - 8.5 = 2.1$

$M + P = 6.1$

$M - P = 2.1$

$2M = 8.2$

$M = 4.1$ $G = 6.5$

$G + M = 10.6$

$G + 4.1 = 10.6$ $10.6 - 4.1 = 6.5$

$G = 6.5$

$G + P = 8.5$

$8.5 - 6.5 = 2.0$

$P = 2.0$

Fig. 3 – Resolução de Joanna

“PARA PASSAR DE DM^2 PARA CM^2 TENHO DE ANDAR DUAS CASAS!” CONHECIMENTO DO PROFESSOR E POSSÍVEIS IMPLICAÇÕES NAS APRENDIZAGENS ACTUAIS E FUTURAS DOS ALUNOS

C. Miguel Ribeiro
Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações (CIEO)
Universidade do Algarve
cmribeiro@ualg.pt

Resumo

A maioria das investigações que têm sido reportadas nos Encontros e Seminários de Investigação em Educação Matemática abordando o tema da Álgebra – e/ou alguns aspectos relacionados (e.g. pensamento/raciocínio algébrico, generalização, tensão entre comportamento aritmético e algébrico) centram-se essencialmente nos alunos (ou nos futuros professores), no que estes fazem, como o fazem e porque o fazem. Considero uma outra perspectiva, focando o conhecimento do professor envolvido na prática. Esta opção prende-se, com um questionamento contínuo sobre a minha própria prática, e a formação facultada aos professores (actuais ou futuros) mas também com a aceção de que o fundamentar a formação numa base de evidências emergente da prática possibilitará a que os professores se sintam mais preparados para uma mais ampla multiplicidade de situações. Nesta investigação o conhecimento do professor é encarado na perspectiva do *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT). Após uma breve referência a distintas conceptualizações sobre o conhecimento do professor de matemática apresento e discuto o MKT revelado (ou ausente) num episódio de uma aula do quarto ano de escolaridade envolvendo conversões entre subunidades padrão de área. Esta discussão permitiu analisar distintos aspectos do MKT envolvidos (não apenas algébricos), mas também equacionar outros que se lhe encontram associados (mesmo que indirectamente). Termino com algumas potencialidades do tipo de discussão efectuado para a formação de professores e para o desenvolvimento de um conhecimento relacional por parte dos alunos.

Palavras-chave: Prática lectiva, Conhecimento matemático para o ensino, Conexões algébricas e geométricas, 1.º ciclo.

Introdução

A revisão dos trabalhos apresentados nos últimos Encontros e Seminários de Investigação em Educação Matemática na Península Ibérica (EIEM, SIEM e SEIEM) revela que o tema de Álgebra se encontra presente em todos[1] (e.g. Castro & Godino, 2008; Matos, Silvestre, Branco & Ponte, 2008; Vale, Palhares, Cabrita & Borralho,

[1] Esta presença ocorre, naturalmente, com maior incidência no EIEM subordinado ao tema: Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores.

EIEM 2011 - *Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (eds), 7-8 Maio, 2011, pp. 405–419

2006). Todas as investigações, que se supõe serem ilustrativas do tipo/foco privilegiado pelos investigadores deste meio, incidem, essencialmente, nos alunos (e.g. Azevedo & Migueis, 2006; Matos et al., 2008). Fazem-no tanto em termos do raciocínio/compreensão como relacionando-o com outros tópicos ou com o que se denomina actualmente de capacidades transversais (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007). Raras são as que se debruçam sobre o conhecimento dos professores, e as que existem interessam-se pela formação inicial (e.g. Vale et al., 2006).[2]

O protagonismo dado às (possíveis) aprendizagens dos alunos, e factores que as possam promover, tem marginalizado o papel do professor e do seu conhecimento no processo de ensino-aprendizagem e no que toca à preparação e implementação das tarefas a propor aos alunos. A incidência no conhecimento matemático do professor envolvido no ensino dos distintos temas matemáticos (Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Rowan, & Ball, 2005), na preparação e implementação de tarefas matematicamente ricas e desafiadoras (Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000) bem como nas tarefas de ensinar matemática (Thames, 2009) e nas formas/processos de os inter-relacionar, permitirá, por um lado, discutir o tipo/natureza do conhecimento necessário e suficiente para a exploração das tarefas com os alunos, no sentido de permitir, aos professores, uma efectiva e profícua compreensão do que fazem, porque o fazem e como o fazem. Por outro lado, permitirá iluminar de forma mais proveitosa a formação actual e futura dos professores, focando alguns aspectos efectivamente centrais e matematicamente críticos na prática.

Para uma ampliação do entendimento sobre o conhecimento do Professor, e também para melhorar a formação e a prática docente, é essencial saber quais as áreas do conhecimento matemático em que estes se encontram mais deficitários. Conhecer mais profundamente essas áreas, e as situações em que podem ocorrer na sala de aula poderá conduzir (Ribeiro & Carrillo, 2011b) a uma reestruturação dos programas de formação, na sua essência mas também no seu foco. Permitirá também uma maior tomada de consciência por parte dos professores do seu próprio conhecimento e do seu papel na

[2] Na mesma linha vão também os trabalhos apresentados, por exemplo, no último CERME (CERME 7), abarcando aqui a totalidade dos "níveis de escolaridade", incluindo o Pré-Escolar (e.g. Barbosa (2011), Mellone (2011) e Pytlak (2011)).

prática e nas oportunidades de aprender (Hiebert & Grouws, 2007) facultadas aos alunos.

Uma das questões/inquietações que se me tem levantado prende-se com o tipo, forma e natureza do conhecimento matemático dos professores revelado no exercício da sua actuação, expresso no decurso de uma entrevista e/ou envolvido na abordagem a determinado(s) conteúdo(s). Adopto, aqui, a perspectiva de Ball et al. (2008) e Hill, Rowan e Ball (2005) e do que denominam de *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT).

Com este texto, parte de uma investigação mais ampla, pretende-se contribuir para a obtenção de uma mais abrangente compreensão sobre o papel do MKT na prática do professor do 1.º Ciclo, de como a influencia em cada momento e que implicações dai podem advir na perspectivação de abordagens futuras de um mesmo tópico e/ou de distintos tópicos ao longo da escolaridade. Tendo como ponto de partida um episódio de apresentação de um conteúdo que, à primeira vista parece estar associado apenas à Geometria e Medida (relações/equivalência entre dm^2 e cm^2) mas que, na conceptualização do conhecimento do professor adoptada se encontra, obviamente, imbricado com o tema da Álgebra, analiso e discuto o papel desempenhado pelo MKT na prática, como poderá potenciar, reduzir ou condicionar as hipotéticas oportunidades de aprender e determinadas formas de encarar os tópicos matemáticos por parte dos alunos, expandindo/limitando as suas aprendizagens tanto actuais como futuras.

Algumas notas teóricas

O conhecimento do professor pode ser encarado sob distintas perspectivas, assumindo os trabalhos desenvolvidos pelo grupo liderado por Lee Shulman (e.g. Shulman (1986)) um relevo preponderante na definição dessas perspectivas e no modo de conceptualizar esse conhecimento. Também os Educadores Matemáticos se debruçaram sobre o tema, dando origem a distintas conceptualizações relativamente ao conhecimento matemático dos professores de matemática. De entre as conceptualizações emergentes, três têm-se demarcado[3]: *Mathematics for Teaching* (Davis & Simmt, 2006) foca-se no professor numa perspectiva teórica, considerando uma interpretação sistemática da complexidade

[3] Existem outras conceptualizações mas que se focam, concretamente, no conhecimento didáctico do conteúdo (e.g. Krauss, Brunner, Kunter, Baumert, Blum, Neubrand & Jordan (2008)).

da prática com o intuito de compreender como estes aprendem; *Knowledge Quartet*[4] (Rowland, Huckstep, & Thwaites, 2005) fundamenta-se na prática e as suas dimensões emergem de uma análise que recorre à *Grounded Theory* (Glaser, 1978), conjuga conhecimentos e crenças, focando-se, assim, no que os professores efectivamente sabem, no que acreditam e como as oportunidades para aumentar o conhecimento podem ser identificadas. Por fim, *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball et al., 2008; Hill et al., 2005) incide sobre o conhecimento profissional que os professores devem possuir para desenvolver o que denominam de tarefas de ensinar matemática (Thames, 2009).

Optei pela conceptualização do MKT pois pretendo identificar, a partir da prática, que conhecimento o professor emprega e quais as oportunidades desperdiçadas a cada momento. Esta opção tem também em conta o facto de esta conceptualização atribuir uma orientação muito específica ao conhecimento matemático do professor, salientando o raciocínio matemático implícito nas tarefas de ensinar.

Como parte do desenvolvimento desta conceptualização, o grupo liderado por Ball considera os domínios do conhecimento do conteúdo e conhecimento didáctico do conteúdo subdivididos, cada um deles, em três subdomínios (cf. Figura 1, abaixo). Por agora, Ball et al. (2008) incluem o conhecimento curricular no conhecimento didáctico do conteúdo.

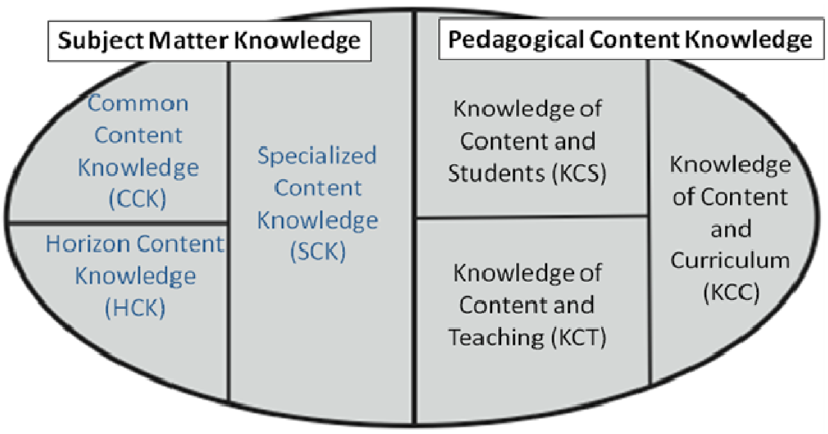


Figura 1: Subdomínios do conhecimento matemático para o ensino (MKT) (Ball et al., 2008, p. 403)

[4] É composto por quatro dimensões: *foundation*, *transformation*, *connection* e *contingency*.

Assim, para além de um conhecimento do conteúdo que permita *saber fazer* para nós próprios (CCK)[5], cumpre também ao professor *saber para ensinar a fazer* (SCK), que envolve, entre outros, o saber que possibilita dizer se algo está correcto ou incorrecto mas conhecer também o porquê dessa (in)correcção e conhecer distintas representações para um mesmo conteúdo[6]. No HCK incluem o conhecimento de como os diversos conteúdos evoluem ao longo da escolaridade, ao qual eu associo também o conhecimento relativo às conexões e possíveis conteúdos que podem assumir esse papel[7].

Incluído no conhecimento que se relaciona mais com a exploração/abordagem dos conteúdos, embora intrinsecamente relacionado com o conhecimento do conteúdo, concebem o KCT como o conhecimento envolvido, por exemplo, para decidir a sequência das tarefas, o exemplo com que iniciar, bem como a utilização de distintas estratégias e representações para abordar os conteúdos. Relativamente ao KCS, associam-no ao conhecimento que permite antecipar os pensamentos, dificuldades/facilidades dos alunos e ouvir e interpretar os seus comentários. Seguindo também Shulman (1986, p. 10) relativamente ao KCC, defendem que os professores devem ter uma visão completa da diversidade de programas concebidos para o ensino de determinados temas e tópicos em determinado nível/ano de escolaridade e da variedade de materiais didácticos disponíveis.

Apenas sendo detentores de um sólido, amplo e completo MKT poderão os professores desenvolver tarefas promotoras do desenvolvimento nos alunos de um pensamento algébrico nas suas múltiplas formas imbricadas (Kaput, 1999), desde a exploração de situações aritméticas conduzindo a uma generalização, até ao trabalho com regularidades, envolvendo situações numéricas, pictóricas, ou outras, a sua combinação e/ou navegação entre essas representações, que permita generalizar relações funcionais.

---

[5] Um exemplo será o de saber determinar o resultado de uma multiplicação recorrendo ao algoritmo, ou saber como se escreve um decímetro quadrado em linguagem matemática.

[6] Um exemplo do conhecimento aqui incluído prende-se com o saber que as unidades padrão de área não se encontram associadas à forma em que estas se representam ou que a sua representação escrita não se pode associar à leitura de potências.

[7] Por exemplo, saber que a multiplicação de números decimais (tanto na representação pictórica como através *do* algoritmo) se encontra em estrita relação com a noção/conceito de (sub)unidade padrão de área.

Metodologia e contexto

A Álgebra é um dos temas que surgiu de forma explícita no Programa do Ensino Básico (Ponte, et al., 2007), não sendo também por isso até então reconhecido pelos professores como tema em si. Porém, ao abordar o conhecimento profissional do professor, o assumir como um dos focos o conhecimento algébrico (e/ou associado), surgiu como algo natural e desafiante, também por este ser um dos temas que quando questionados sobre o trabalho que efectuam e objectivos que perseguem associados a este tema, os professores do 1.º Ciclo com quem tenho vindo a trabalhar salientarem que este "é *fácil de abordar pois apenas têm de ensinar os alunos a efectuar correctamente as operações*", reduzindo-o, assim, à manipulação de símbolos.

Este trabalho é parte integrante de uma investigação envolvendo duas professoras do 1.º Ciclo (Maria e Ana), que aborda o conhecimento profissional do professor com o desígnio de obter informações que esclareçam a compreensão das interacções entre as dimensões consideradas centrais do conhecimento profissional e de como essas dimensões (e suas relações) evoluem ao longo do tempo[8]. Por pretender alcançar esse mais amplo entendimento, o interesse não está centrado nos próprios casos, mas sim nas informações que destes podem advir e que permitam aumentar o nível e profundidade de compreensão em relação a esses fenómenos. Com esse intuito, e considerando as características referidas por Stake (2000, 2005), estes dois estudos de caso são considerados na perspectiva de estudos de *caso instrumental*, uma vez que têm por intuito obter, a partir dos mesmos, uma melhor compreensão sobre os fenómenos em estudo e efectuar algum tipo de teorização. A natureza do objecto de estudo e dos objectivos da investigação ditou a escolha da metodologia (de cariz interpretativo, combinada com o estudo de caso) bem como dos instrumentos de recolha (gravações áudio e vídeo, entrevistas, artefactos) e análise de informação. Foram gravadas aulas em três momentos distintos de introdução de novos conteúdos, focando a actuação docente na prática, complementarmente à observação *in situ* e às conversas informais antes e após cada aula com o intuito de obter a imagem da lição (Schoenfeld, 1998) – antevisão sobre o que iria e como iria decorrer a aula – e complementar as primeiras análises efectuadas. A partir das gravações áudio, obtiveram-se as transcrições das aulas,

[8] Nesse estudo amplo as professoras participavam num trabalho colaborativo realizado a três e simultaneamente, no Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º e 2.º Ciclos. As discussões e reflexões ocorridas no grupo colaborativo serão foco de análise noutro local (e.g. Ribeiro, em preparação).

complementadas com a visualização do vídeo, permitindo registar as interacções entre professora e alunos (e.g. Sherin, 2004), o que serviu de base para a divisão das aulas em episódios – associados a um objectivo (matemático) específico (e.g. Schoenfeld, 1998). Em cada um desses episódios identificou-se o MKT revelado na prática, discutindo e equacionando o demais conhecimento associado a cada situação mas que, por algum motivo (e.g. associado à professora, ao contexto) não surgiu, correspondendo a *(hipotéticas) oportunidades perdidas*.

O MKT é encarado como um todo encontrando-se os seus subdomínios intrinsecamente imbricados, sendo, portanto, indissociáveis e com fronteiras ténues e articuladas. Pela perspectiva adoptada, aqui foco-me essencialmente no domínio do conhecimento do conteúdo, efectuando um esforço por reconhecer situações matematicamente críticas reveladas na prática, encarando-as como uma oportunidade para aprender (Hiebert & Grouws, 2007). Exploro causas possíveis para essas ocorrências, discutindo o possível impacto dessas situações críticas em termos de prováveis condicionantes da acção docente e do possível impacto nas futuras aprendizagens dos alunos. Com essa discussão almejo contribuir para com algumas questões e conceptualizações que permitam melhorar a formação – focando, entre outros, aspectos com os quais os professores se identificam (Tichá & Hošpesová, 2006), promovendo uma mais profícua reflexão e consciencialização da prática e dos factores que a influem.

Análise e discussão do conhecimento do professor na e para prática

No episódio que se ilustra abaixo, o objectivo é o de apresentar relações/equivalência entre dm^2 e cm^2. Na análise e discussão, abordo o impacto que do MKT (fundamentalmente no domínio do conhecimento do conteúdo) parece ter na exploração da situação, no tipo de relações efectuadas (ou possíveis de efectuar, mas não efectivadas) bem como nas hipotéticas aprendizagens dos alunos em temas futuros (directa ou indirectamente relacionados). Consideremos então a seguinte situação:

> Ana distribui pelos alunos um quadrado com 1*dm* de lado e pede-lhes para medirem os comprimentos dos lados, referindo que "*isto [mostrando o quadrado] é 1dm*^{2} *pois é um quadrado com 1dm de lado*" – ao mesmo tempo escreve no quadro 1dm^2. Posteriormente os alunos representam "*num dos cantos do quadrado, um outro quadrado com 1cm de lado*" e exploram (por contagem por linhas ou colunas) o número de quadrados com 1*cm* de lado necessários para cobrir a superfície do

> quadrado maior (1dm^2), concluindo que "*são necessários 100cm² para cobrir o quadrado com 1dm de lado*". A exploração termina com Ana a escrever no quadro a expressão 1dm^2=100cm^2 e concluindo: "*sempre que quero passar de dm² para cm² tenho de andar duas casas*".[9]

Este tipo de situação levou-me a equacionar o conhecimento matemático para ensinar que proporcionasse aos alunos uma efectiva e correcta compreensão da matemática envolvida, considerando a situação na perspectiva dupla da Geometria e Medida e da Álgebra. Esse conhecimento influencia a natureza das tarefas preparadas e como são implementadas na sala de aula, particularmente no que concerne à regulação da exigência matemática (Charalambous, 2008). Pertence, assim, ao núcleo central do conhecimento envolvido na efectivação da preparação e implementação de tais tarefas matematicamente ricas e desafiadoras com o fito de permitir aos alunos relacionar ideias matemáticas, fornecendo-lhes a oportunidade de efectuarem aprendizagens matematicamente significativas, fundamentadas em pressupostos matemáticos universais, que lhes permita dar sentido, também, às aprendizagens futuras, isto é, à evolução dos tópicos ao longo da escolaridade, aqui também no sentido de aprendizagem ao longo da vida.

Em termos do MKT, este episódio torna evidentes alguns dos subdomínios considerados por Ball et al. (2008), pertencendo, também, ao grupo de situações consideradas matematicamente críticas, e a partir das quais poderemos aprender. Ilustra a presença de um conhecimento relativo a saber escrever decímetro e centímetro quadrado (dm^2 e cm^2) e conhecer as equivalências entre estas duas subunidades padrão de área, em termos das quantidades necessárias para, por sobreposição, cobrir a maior[10].

Por outro lado, as subunidades de área são associadas à figura geométrica quadrado e à forma como a leitura é efectuada (como se de uma potência se tratasse). Sob esta perspectiva, o "*quadrado*" é encarado, portanto, simultaneamente, e numa mesma situação, como figura geométrica, como unidade padrão de medida de área e como resultado do produto de uma variável por si própria. Esta simultaneidade de interpretações para uma mesma palavra ("*quadrado*"), e a não utilização de definições matematicamente válidas/adequadas[11] poderá condicionar, um pleno entendimento por

[9] O mesmo tipo de situação foi utilizado para explorar "a relação entre cm^2 e mm^2".

[10] Num outro episódio explora esta equivalência em termos de que porção da maior corresponde à menor.

[11] O que se entende por uma definição matematicamente válida/adequada poderá variar ao longo da escolaridade, devendo, no entanto, estas irem sendo construídas por aglutinação e não por sobreposição.

parte dos alunos do que é e a que corresponde efectivamente $1dm^2$. Tal "confusão" poderá potenciar concepções erróneas aquando, por exemplo, do recurso à álgebra como forma de determinar áreas de polígonos ao serem fornecidas as medidas dos seus lados[12], associando-o à instrumentalização/manipulação de símbolos, sem se questionar sobre motivos matemáticos subjacentes à origem da explicação matemática.

Estas interpretações múltiplas, por serem geradoras de "confusão", ao influenciarem a regulação (manutenção) de um elevado nível e exigência cognitiva das tarefas que prepara e implementa (Charalambous, 2008), encontram-se, expectavelmente, associadas a uma limitação das oportunidades para que, de forma matematicamente válida, os alunos alcancem uma efectiva compreensão de regularidades e relações; representem e analisem situações matemáticas e estruturas, recorrendo a simbologia algébrica (tal como é referido pelo NCTM (2000) como alguns dos aspectos que a abordagem ao tema da Álgebra deverá possibilitar). Um não questionamento sobre a origem dos conteúdos nem dos fundamentos matemáticos em que estes se baseiam (apenas saber fazer) conduz ao perder a oportunidade de explicar aos alunos o(s*) porquê(s)* de terem de ser consideradas duas casas decimais[13] sempre que se pretendem exprimir áreas utilizando subunidades padrão distintas.

A análise ao MKT associado a esta situação leva também ao equacionar sobre distintas implicações que podem advir do facto de estas "confusões" persistirem no conhecimento da professora e consequentemente dos alunos. Uma sua manutenção irá condicionar a(s) formas de entender alguns dos temas futuros que neste se fundamentam, ou que com ele se poderiam (deveriam) relacionar. Por exemplo, a representação pictórica e algébrica de padrões e generalizações (e.g. Barbosa, 2011) e a resolução de problemas envolvendo a determinação da área de polígonos ou o volume de sólidos com verdadeira compreensão por parte dos alunos não apenas da resolução de problemas em si, mas também na perspectiva do seu pensamento e raciocínio algébrico. E, ainda, o entendimento do motivo pelo qual ao multiplicarem duas

[12] Esta confusão, associada a uma dificuldade em explicar o papel do 2 na escrita das (sub)unidades padrão de área (Ribeiro & Carrillo, 2011b), não sendo colmatada, poderá impedir a apresentação e exploração de explicações apropriadas e matematicamente ricas e significativas de modo a tornar os conteúdos compreensíveis para os alunos. Associando a Álgebra exclusivamente à manipulação de símbolos, encaram a determinação da área (Ribeiro, em preparação) como mais uma regra onde, sabendo operar os processos algébricos envolvidos, facilmente, se determina a área de um qualquer rectângulo, sendo, portanto, suficiente multiplicar duas medidas de comprimento.

[13] A que correspondem e que significado têm do ponto de vista da construção matemática do conceito de área.

determinadas quantidade expressas em décimas obtêm uma determinada quantidade expressa em centésimas (Ribeiro, 2009).

Estes conhecimentos do conteúdo (tipo e natureza) influem, obviamente, nas estratégias que utiliza e considera adequadas na sua exploração, bem como no tipo de questões e dificuldades dos alunos que antecipa. A utilização de uma representação única e de exemplos *pouco potentes* limitam a compreensão dos alunos sobre os motivos de se considerarem duas casas decimais sempre que se converte uma determinada subunidade de medida padrão de área na anterior/seguinte, associando a conversão apenas à contagem de casas decimais que têm de ser percorridas (por memorização) – álgebra pela álgebra e sem ligação com a situação concreta.

Estas formas de abordar o conteúdo condicionam o conhecimento dos alunos sobre o tema e limitam o seu pensamento/raciocínio algébrico pois as aproximações a efectuarem centrar-se-ão na manipulação de símbolos per si, mesmo em situações que as tarefas propostas sejam consideradas "*didacticamente emocionantes*". Contudo, pelas evidências de MKT, tais propostas serão, expectavelmente, "*matematicamente pouco exigentes*" (e.g. Ribeiro & Carrillo, 2011a), desafiadoras e promotoras de um tal raciocínio algébrico e relacional – tanto numa perspectiva de aritmética generalizada como de um pensamento funcional (Kaput, 1999).

Algumas notas finais e potencialidades implicações para a formação

Centrando-se nas aprendizagens dos alunos, Mason, Stephens e Watson (2009) referem que estes manifestam *consciência de*, ou *atenção à estrutura* quando se começam a focar nos aspectos invariantes e variantes, ou seja, quando *se habituam a considerar a invariância no seio da mudança* (p.13). Este hábito advém, também, das experiências com que são confrontados e lhes permitem integrar no seu saber novos conhecimentos. Daí, também, a importância de se estudar o conhecimento do professor relativamente a essa consciência e atenção à estrutura, que torne posteriormente possível este tipo de perspectiva e a aquisição/desenvolvimento de *hábitos mentais* (Corno, 1988) nos alunos. Apenas se os professores estiverem habilitados a, por exemplo, responder a questões de "porquê" e a encontrar e gerar exemplos que permitam discutir temas matemáticos concretos e explorar as situações de forma matematicamente eficiente e promotora de uma consciência e chamada de atenção para a estrutura, poderão facultar aos alunos oportunidades para que também eles o possam fazer. A aquisição e/ou desenvolvimento destes *hábitos de mente* associa-se também ao à-vontade que cada professor possui, ou julga possuir, em cada uma das dimensões do conhecimento (e em todas de forma interligada, pois as suas fronteiras são de difícil delimitação – e.g. Ball et al., 2008) pois estas moldam a forma como actua em cada uma das situações com que é confrontado, o tipo e natureza das tarefas que prepara (matematicamente ricas ou não), e o modo como as implementa, mantendo, ou não, a sua riqueza cognitiva – no sentido do referido por Stein et al. (2000). Este conhecimento, e a sua natureza, entra assim em jogo, e influi directamente na persecução de cada um dos objectivos na forma como isso ocorre e nas oportunidades de aprender (Hiebert & Grouws, 2007) facultadas ou não.

A análise e evidências apresentadas pretendem identificar alguns aspectos que, à primeira vista, poderiam parecer afastados dos conteúdos/explorações/tarefas promotoras de pensamentos/raciocínios algébricos, mas que se encontram efectivamente associadas. Este tipo de análise não pretende, de forma alguma, avaliar a prática desta professora, nem tampouco identificar as carências de conhecimento ou as oportunidades perdidas em si. Procura, sim, entender a sua lógica e os seus fundamentos, promovendo a reflexão sobre alguns elementos constituintes do conjunto de aspectos chave na formação de professores, daí também a opção de efectuar na investigação mais ampla, um estudo de casos instrumental. A apresentação e discussão desta situação matematicamente crítica, em termos de MKT, visou contribuir com alguns aspectos para um mais amplo entendimento de algumas componentes do MKT emergentes da prática, como contributo para uma melhoria da prática e da formação – também pela elaboração de uma "base de evidências" a serem utilizadas em ambos os contextos.

Estas evidências, e reflexões, pretendem contribuir, também, para a chamada de atenção do papel do MKT na preparação de tarefas que estimulem uma tensão entre um comportamento aritmético e algébrico o que, como refere, por exemplo, Radford (2010), no caso dos alunos, é algo bastante complexo. Daí que seja de suprema importância que os professores se sintam conscientes dessa necessidade e capacitados para a suprir. Uma incapacidade dessa ordem enviesaria quaisquer dados que se recolhessem a partir da observação dos alunos e do seu raciocínio, que permitisse elaborar uma ponte entre estas duas componentes, tal como ocorre, por exemplo, nos trabalhos de Barbosa (2011), Matos et al. (2008), Mellone (2011) e Pytlak (2011). Esse tipo de abordagem e exploração apenas será viável se os professores forem conscientes da sua importância e detentores, eles próprios, de um *Saber* que possibilite aos seus alunos as oportunidades e capacidade de obterem uma compreensão relacional da matemática (Skemp, 1976) – em geral de todos os conteúdos –, deixando de a considerar compartimentada, e em oposição a uma visão instrumental que se baseia na memorização e na aplicação, muitas vezes sem compreensão de procedimentos.

Esta é uma primeira aproximação a este tipo de problemática, sendo que muitas questões ficam aqui por responder e mesmo por levantar. Entre estas, e de forma ampla, podemos considerar: (a) que MKT cumpre ao professor para poder facultar oportunidades de aprender relacionadas com a promoção da (i) compreensão de um vasto conjunto de regularidades e suas relações?; (ii) utilização construtiva do processo de modelação (e dos modelos obtidos) que permitam aos alunos descrever e compreender relações quantitativas e o mundo que os rodeia?; (iii) habilidade para efectuar generalizações passando de um pensamento aritmético a um algébrico? (iv) capacidade de efectuar relações entre contextos numéricos e representações visuais, promovendo um mais profundo entendimento do(s) significado(s) de número e variáveis?[14]; (b) que implicações (efectivas) tem o (tipo de) conhecimento algébrico inicial adquirido pelos alunos nos Primeiros Anos nas suas aprendizagens futuras (principalmente em situações consideradas matematicamente críticas na prática dos professores)? Ou (c) que tarefas preparar para promover o desenvolvimento do raciocínio algébrico, relacional, *generalizacional* e funcional dos professores e uma consciencialização da sua importância para as (nas) aprendizagens dos alunos?[15]

Agradecimentos

Este artigo foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

Este trabalho forma parte do Projecto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), Dirección General de Investigación y Gestión del Plan Nacional de I+D+i. Ministerio de Ciencia e Innovación (Espanha).

[14] Esta ideia é expandida, ao contexto da formação de professores, da referida por Barbosa (2011) ao abordar a importância das tarefas fornecidas aos alunos.

[15] Esta questão pode ser também formulada de forma mais ampla quando centrada apenas na formação inicial de professores: tarefas para avaliar ou para desenvolver os conhecimentos dos futuros professores?

Referências

Azevedo, M. d. G., & Migueis, M. d. (2006). Percepções e concepções: A matemática na infância. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & A. P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 157-164). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barbosa, A. (2011). Patterning problems: sixth graders' ability to generalize. In *Proceedings do Seventh Congress of European Society for Research in Mathematics Education, CERME 7* (no prelo). Rzeszów: ERME.

Castro, W. F., & Godino, J. D. (2008). Evaluación del razonamiento algebraico elemental en futuros maestros: un estudio exploratorio. In R. Luengo, B. Alfonso & L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 273-282). Badajoz: SEIEM.

Charalambous, C. Y. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 281-288). Morelia, Mexico: PME.

Corno, L. (1988). The study of teaching for mathematics learning: views through two lenses. *Educational Psychologist, 23*(2), 181-202.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 293-319.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: the context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 23*(2), 167-180.

Glaser, B. (1978). *Theoretical Sensitivity: Advances in the Methodology of Grounded Theory*. Mill Valley: CA.

Hiebert, J., & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). NCTM: Information Age Publishing.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42*(2), 371-406.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classroom that promotes understanding* (pp. 133-155). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., & Jordan, A. (2008). Pedagogical Content Knowledge and Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Educational Psychology, 100*(3), 716–725.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo, B. Alfonso & L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 505-515). Badajoz: SEIEM.

Mellone, M. (2011). "Looking for tricks": a natural strategy, early forerunner of algebraic thinking. In *Proceedings do Seventh Congress of European Society for Research in Mathematics Education, CERME 7* (no prelo). Rzeszów: ERME.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Pytlak, M. (2011). Algebraic reasoning among primary school 4th grade pupil. In *Proceedings of Seventh Congress of European Society for Research in Mathematics Education, CERME 7* (no prelo). Rzeszów: ERME.

Radford, L. (2010). Elementary form of algebraic thinking in young students. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 73-80). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Ribeiro, C. M. (2009). Conhecimento Matemático para Ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. *Bolema, 22*(34), 1-26.

Ribeiro, C. M. (em preparação). *Reflectindo sobre o conhecimento do professor na prática e as potencialidades de uma sua discussão na formação*.

Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011a). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring Data analysis. In *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (no prelo). Ankara, Turkey: PME.

Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011b). Knowing mathematics as a teacher. In *Proceedings of Seventh Congress of European Society for Research in Mathematics Education, CERME 7* (no prelo). Rzeszów: ERME.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Schoenfeld, A. H. (1998). On modeling teaching. *Issues in Education, 4*(1), 149 - 162.

Sherin, M. G. (2004). New perspectives on the role of video in teacher education. In J. Brophy (Ed.), *Using video in teacher education* (pp. 1-28). Oxford: Elsevier Ltd.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2)*, 4-14.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*, 20-26.

Stake, R. E. (2000). Qualitative case studies. In N. K. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 435-454). Thousand Oaks: Sage.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (Third edition ed., pp. 443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a Casebook for Professional Development*. New York: Teachers College Press.

Thames, M. (2009). *Coordinating Mathematical and Pedagogical Perspectives in Practice-Based and Discipline-Grounded Approaches to Studying Mathematical Knowledge for Teaching (K-8).* Unpublished PhD Dissertation, University of Michigan, Ann Arbor.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2006). Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 129-156.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2006). Os padrões no Ensino e na Aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & A. P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 193-211). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

O ERRO COMO PONTE PARA A APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES: O CASO DA MARIA

Luísa Vale
Escola Secundária Dr. Joaquim Gomes Ferreira Alves – Valadares
mlsvale@sapo.pt

Rosa Antónia Ferreira
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP
rferreir@fc.up.pt

Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa & IUDEF
leonordsantos@sapo.pt

Resumo

Este estudo procura analisar e compreender os erros cometidos por uma aluna do 7.º ano de escolaridade, Maria, no âmbito do Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico no contexto de ensino-aprendizagem do tópico *Equações*. Procura ainda investigar como o *feedback* escrito usado pelo professor pode contribuir para levar a Maria a aperceber-se dos erros que comete e a tentar ultrapassá-los. Foi usada uma abordagem qualitativa e o estudo de caso como *design* de investigação. A análise de dados evidencia que alguns erros referenciados na literatura revista estão presentes nas produções da Maria: (i) erros que têm a sua origem num obstáculo cognitivo; (ii) erros que têm a sua origem na ausência de significado; e (iii) erros que têm a sua origem em atitudes afectivas e emocionais face à Matemática. Verificou-se que o *feedback* escrito usado pela professora ajudou a Maria a reconhecer alguns erros por si cometidos mas nem sempre foi eficaz na regulação das suas aprendizagens.

Palavras-chave: Erros dos alunos, Avaliação reguladora, *Feedback* escrito, Equações.

Introdução

Nas últimas décadas, a análise de erros como abordagem de pesquisa em Educação Matemática tem vindo a desenvolver-se, sob várias formas (por exemplo, Cury, 1995; Kieran, 1992; Matz, 1981). De facto, a compreensão dos erros cometidos pelos alunos em tópicos matemáticos específicos e as justificações que eles apresentam podem fornecer pistas para novas abordagens no ensino desses mesmos tópicos. É importante salientar que, neste contexto e neste estudo, o erro é conceptualizado como um fenómeno inerente à aprendizagem. No entanto, se o erro não surpreender o professor ou não lhe despertar a atenção, não dará lugar a mecanismos de regulação, como o *feedback* escrito. A não compreensão da natureza dos erros dos alunos reduz as possibilidades de aprendizagem efectiva. Munido deste conhecimento, cabe ao professor intervir com intencionalidade formativa criando contextos propícios para os alunos aprenderem. Em particular, é através de uma prática avaliativa com funções reguladoras da aprendizagem que contemplem a recolha de informação, a sua interpretação e acção consequente que tais contextos podem ser promovidos (Santos, Pinto, Rio, Pinto, Varandas, Moreirinha, Dias, Dias & Bondoso, 2010).

Nesta comunicação, pretendemos analisar e compreender os erros cometidos por uma aluna do 7.º ano de escolaridade, no âmbito do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB) (Ponte et al., 2007), no contexto de ensino-aprendizagem do tópico *Equações*, e investigar como o *feedback* escrito pode ser usado pelo professor para levar a aluna aperceber-se dos erros que comete e a tentar ultrapassá-los. A investigação aqui relatada, parte de um trabalho mais abrangente (Vale, 2010), é guiada pelas seguintes questões: (1) Como se caracterizam os erros mais frequentemente cometidos pela Maria na aprendizagem do tópico *Equaçõ*es? Quais as suas tipologias e as suas origens? (2) Como é que Maria se foi apercebendo dos erros que cometeu? De que modo o *feedback* dado pelo professor favoreceu este processo? e (3) Como é que a Maria procurou ultrapassar esses erros? Que estratégias utilizou? Quais as principais dificuldades com que se confrontou?

Fundamentação teórica

Segundo o NPMEB (Ponte et al., 2007), o ensino-aprendizagem foca-se em quatro áreas consideradas fundamentais: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de Dados, e em três capacidades transversais: Resolução de problemas, Raciocínio e Comunicação. Dentro do tema Álgebra, no 7.º ano de escolaridade, são trabalhados três tópicos: (1) *Sequências e Regularidades*; (2) *Funções* e (3) *Equações*. Nesta comunicação, abordamos apenas o tópico *Equações*.

A Álgebra é um dos temas considerados fundamentais ao longo dos três ciclos do ensino básico. No terceiro ciclo, o propósito principal de ensino da Álgebra é o desenvolvimento, nos alunos, da linguagem e do pensamento algébrico. Neste ciclo aprofunda-se o estudo de relações e das suas representações em linguagem simbólica, já trabalhadas no segundo ciclo (Ponte et al., 2007). Assim, "aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação" (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 10). É este o nosso entendimento sobre a aprendizagem da Álgebra e é esta a perspectiva que permeia o trabalho de investigação aqui relatado.

As equações do 1.º grau com uma incógnita constituem um tópico relevante no NPMEB. Já nos dois primeiros ciclos de escolaridade se trabalha com equações, sobretudo no desenvolvimento do conceito de igualdade e na compreensão da relação das operações com as respectivas inversas. Porém, no 3.º ciclo do ensino básico, pretende-se ainda que os alunos aprendam a resolver equações interpretando e representando situações em diferentes contextos e sejam capazes de resolver problemas recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos (Ponte et al., 2009).

Não é possível conceber um programa sem dedicar um espaço à avaliação das aprendizagens. O NPMEB refere a importância da avaliação como veículo de informação, para o professor, sobre a evolução do desempenho dos seus alunos, nomeadamente, analisando os problemas e lacunas na aprendizagem dos alunos e procurando formas de os levar a ultrapassá-las. A este propósito, pode ler-se que: "A avaliação deve, por isso, fornecer informações relevantes e substantivas sobre o estado das aprendizagens dos alunos, no sentido de ajudar o professor a gerir o processo de ensino-aprendizagem" (Ponte et al., 2007, p. 12). É de salientar o carácter predominantemente regulador da avaliação veiculado por este documento.

Neste estudo, entendemos por regulação das aprendizagens "todo o acto intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribua directamente para a progressão e/ou redireccionamento dessa aprendizagem" (Santos, 2002, p. 77). De facto, "se queremos 'gerir' o erro, para lá do desempenho registado, é preciso tentar determinar as razões que lhe deram origem, e dizer o que ele revela dos conhecimentos adquiridos ou das falhas do aluno" (Hadji, 1994, p. 125). Nesta perspectiva, a análise da produção escrita dos alunos permite, entre outras, fazer um inventário dos erros encontrados e distinguir a sua natureza, já que exigem diferentes procedimentos pedagógicos para a sua superação. Esta opinião é partilhada por Leal (1992), quando afirma que "A ultrapassagem dos erros só pode ser feita por aqueles que os cometem, e não por aqueles que os assinalam, uma vez que as lógicas de funcionamento são diferentes" (p. 51).

O erro na aprendizagem da Álgebra

O erro, por si só, não conduz a nada se não for seguido de uma reflexão sobre a sua ocorrência, tendo em vista o modo de o ultrapassar. Na verdade, é importante que o aluno reflicta sobre o seu próprio progresso, identificando os erros cometidos e utilizando-os de modo a regular a sua aprendizagem (Martins, 1996). A reflexão sobre o processo e o produto permite ao aluno desenvolver a capacidade de auto-questionamento. Note-se que a mudança do estatuto do erro é condição necessária para a auto-regulação das ideias dos alunos. Em qualquer processo de aprendizagem, o erro deve passar de algo que se tem de esconder a algo natural e positivo para a aprendizagem. Esta concepção de erro como ponte para a aprendizagem, de erro como inerente ao processo de aprendizagem (Borasi, 1996; Cury, 2007; Hadji, 1994; Pinto & Santos, 2006) guiou todo o trabalho realizado nesta investigação.

Quando abordamos o erro em Educação Matemática, é fundamental sabermos de que modo os erros dos alunos podem ser classificados. Na literatura por nós revista, encontrámos diferentes formas de analisar os erros e de os classificar. A título de exemplo, apresentamos uma sistematização de erros cometidos pelos alunos na aprendizagem da Álgebra (Quadro 1), segundo Hall (2002a, 2002b).

Quadro 1: Sistematização de erros (Hall, 2002a, 2002b).

Categorização	**Exemplos**
(1) erro por *eliminação (deletion)*	Simplificar $39x - 4$ como $35x$ ou $2xy - 2x$ como y
(2) erro por troca de membros *(switching addends)*	$x + 37 = 150$ e a sua resolução passar pela transformação em $x = 37 + 150$
(3) erro por *redistribuição* (*redistribution*)	$x + 10 = 25$, os alunos subtraem 10 ao primeiro membro e adicionam 10 ao segundo, obtendo a equação $x + 10 - 10 = 25 + 10$
(4) erro por *transposição* (*transposing error*)	$x + \frac{5}{2} = 3 \Leftrightarrow x + 5 = 6$
(5) erro na aplicação da *operação inversa*	$4x = 1$ $x = 1 - 4$
(6) erro de *divisão* *(division)*	$3x = 2$ $x = 1{,}5$
(7) erro de *exaustão* (*exhaustion error*)	$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 2x - 8} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x-4)(x+2)} = \frac{\cancel{x} + 3}{\cancel{x} - 4} = \frac{3}{-4}$
(8) erro de ausência de estrutura *(absence of structure)*	$5x + x + 2 = 3x + 12 \Leftrightarrow 3 + 2 = 3x - 8$

Socas (1997) discute as dificuldades de aprendizagem em Matemática e as suas distintas origens. Estas dificuldades manifestam-se sob a forma de obstáculos cognitivos e, na prática, na forma de erros. O erro tem origens diferentes; pode ser visto como resultante da presença de um processo cognitivo inadequado e não apenas como consequência de uma falta de conhecimentos específicos ou de uma distracção. Na opinião deste autor, os erros de aprendizagem em Matemática devem-se a certas dificuldades que podemos agrupar em três categorias: (A) erros com origem num obstáculo cognitivo; (B) erros com origem na ausência de significado; e (C) erros com origem em atitudes afectivas e emocionais face à Matemática. Dentro da categoria B, Socas distingue: (B1) erros de Álgebra com origem na Aritmética; (B2) erros de procedimento (incluindo o uso indevido de fórmulas ou procedimentos); e (B3) erros de Álgebra devidos às características da linguagem algébrica. A Figura 1 apresenta a tipologia de Socas (1997), onde são indicados os códigos A, B (B1, B2 e B3) e C. Descrevemos, em seguida, cada um dos códigos utilizados nesta tipologia.

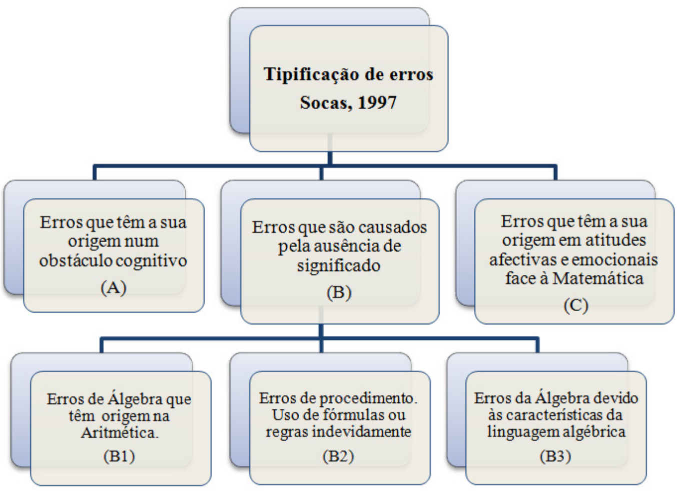


Figura 1: Esquema de tipificação de erros (Socas, 1997)

Código A – Consideramos nesta categoria os erros com origem num *obstáculo cognitivo*. Estes erros são referidos como conhecimento adquirido, e não como uma falta de conhecimento, que provou ser eficaz em determinado contexto (Ruano, Socas & Palarea, 2003). Quando o aluno utiliza esse conhecimento fora de tal contexto, provoca respostas inadequadas (exemplos: erros de *eliminação,* erros de *concatenação*[1]*…)*

[1] Erro de *concatenação*: erro devido à justaposição de dois ou mais símbolos, por exemplo ($-1 + 2x = -12x$).

Código B – Nesta categoria, encontramos os erros que têm a sua origem numa ausência de sentido. A categoria está dividida nas três subcategorias seguintes:

Código B1 – Erros da Álgebra que têm a sua origem na Aritmética. Para entender a generalização das relações e processos algébricos, é necessário que o aluno as tenha assimilado no contexto da Aritmética; quando isso não acontece, os erros cometidos classificam-se com o código B1 (exemplos: uso inadequado de parêntesis, particularização inadequada, erros por *transposição*, erros de *divisão* …).

Código B2 – Erros com origem na utilização, pelos alunos, de fórmulas ou regras de procedimento de modo indevido (exemplo: aplicação inadequada da propriedade distributiva, …)

Código B3 – Erros devido às características da linguagem algébrica (exemplos: erros com origem na incompreensão do significado do sinal de igual em Álgebra, erros na substituição formal de variáveis, …).

Código C – Nesta categoria, consideramos os erros com origem em atitudes afectivas ou emocionais (exemplos: falta de concentração, excesso de confiança, esquecimento …)

A maioria dos erros cometidos pelos alunos na aprendizagem de equações deve-se a causas diversas. Podemos referir, entre outras: (1) a transição conceptual da Aritmética para a Álgebra (Matz, 1981); (2) a realização de falsas generalizações sobre números (Ruano et al., 2003); e (3) o uso inapropriado de fórmulas ou regras de procedimentos (Palarea, 1998; Ruano et al., 2003). É de salientar que, na aprendizagem do tópico equações, os erros cometidos têm essencialmente a sua origem num obstáculo cognitivo e também, na ausência de significado (Socas, 1997). Outros erros frequentemente cometidos incluem os erros por *transposição*, isto é, erros relativos à realização das mesmas operações em ambos os membros da equação (Kieran, 1992), erros de *eliminação* (Hall, 2002a) e erros na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (Socas 1997).

O erro e o *feedback* escrito

Uma das práticas de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos é a escrita avaliativa ou *feedback* escrito (Santos, 2008). Esta prática é privilegiada neste trabalho, uma vez que contribui, potencialmente para a consciencialização por parte dos alunos dos erros cometidos e também para a busca de formas de os ultrapassar; consequentemente, rentabiliza o erro para a aprendizagem (Santos et al., 2010). No entanto, estudos efectuados aludem ao facto da tarefa de dar *feedback* escrito exigir tempo e conhecimento (a vários níveis) por parte do professor (Santos et al., 2010; Leal, 1992; Menino & Santos, 2004).

Há investigações que evidenciam que os professores que utilizam o *feedback* escrito de forma sistemática provocam ganhos significativos nas aprendizagens dos alunos (Black & Wiliam, 1998) e na capacidade de identificação e auto-correcção dos seus erros (Fernandes, 2005; Santos, 2008). Também para Santos (2002), se na sala de aula houver uma cultura de avaliação que regule as aprendizagens dos alunos, então o conhecimento que o professor terá dos seus alunos será maior, facilitando e melhorando a qualidade do *feedback* escrito. Por sua vez, tal promoverá o desenvolvimento de uma avaliação cada vez mais reguladora.

Além disso, a investigação tem evidenciado que um *feedback*, que se pretende eficaz, para promover uma aprendizagem mais duradoura, deverá: (1) ser descritivo, em detrimento do avaliativo (Gipps, 1999), dirigido à tarefa em vez de ao *self* (Wiliam, 1999), interpelando e incentivando o aluno (Santos et al., 2010); (2) recorrer à forma interrogativa e a uma linguagem acessível, concreta e contextualizada (Bruno, 2006); (3) ser diversificado e adequado a cada aluno (Santos & Dias, 2006); (4) ser claro e informativo; (5) referir e reconhecer o esforço dos alunos; e (6) apontar pistas de acção futura e incentivar o aluno a reanalisar a resposta dada (Santos, 2002). O *feedback* é tendencialmente mais efectivo quando é feito para estimular a correcção dos erros, através de uma abordagem que foque a aprendizagem esperada com a tarefa (Black & Wiliam, 1998). Deve, no entanto, ter-se em atenção que "o *feedback* nunca deve ser dado antes de o aluno ter oportunidade para pensar e trabalhar na tarefa (...) e preferencialmente devem ser escolhidas tarefas ainda não classificadas, nas quais os alunos tenham ainda oportunidade de melhorar" (Santos et al., 2010, p. 65).

Metodologia

Este estudo seguiu uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), pois pretendemos, entre outros aspectos, descrever erros cometidos pelos alunos, categorizá-los, analisar possíveis origens dos erros e compreender as dificuldades evidenciadas pelos alunos. Além disso, pretendemos estudar dispositivos de regulação que o professor pode usar na sala de aula para ajudar os alunos a tomar consciência dos seus erros e a usá-los como ponte para a aprendizagem. O *design* de estudo de caso (Merriam, 1988) permitiu compreender de forma mais aprofundada casos particulares para melhor se poder compreender o fenómeno mais abrangente.

O estudo foi realizado numa turma de 7.º ano leccionada pela investigadora e primeira autora deste comunicação, no ano lectivo de 2009/10, numa escola secundária do distrito do Porto. A turma escolhida tinha 27 alunos, quase todos com 12 anos no início do ano lectivo. Destes alunos, foram escolhidos três para a constituição de casos – Rita, Maria e David (pseudónimos). Esta escolha baseou-se nos seguintes critérios: (1) diferentes níveis de desempenho, recorrendo ao aproveitamento escolar nos anos lectivos de 2007/08 e 2008/09; (2) ser a primeira vez que frequentavam o 7.º ano; (3) capacidade de comunicação; (4) predisposição para participar no estudo; e (5) possibilidade de reunir com a investigadora fora das aulas. Nesta comunicação, por restrições de espaço, apenas apresentamos os resultados relativos à Maria.

No Quadro 2 identificamos os diferentes instrumentos de recolha de dados utilizados, relacionando-os com as questões de investigação. A intensidade do sombreado revela o grau de importância que cada instrumento teve para dar resposta a cada questão de investigação; por exemplo, para responder à primeira questão de investigação foram mais importantes a recolha documental (das produções escritas da Maria) e a observação das aulas.

Quadro 2: Relação entre as questões de investigação e os instrumentos de recolha de dados

Questão	**Entrevistas**	**Observação de aulas**	**Notas de campo**	**Recolha documental**
Questão 1				
Questão 2				
Questão 3				

Todas as cinco entrevistas realizadas à Maria no âmbito deste estudo foram semi-estruturadas, duraram cerca de 30 minutos e foram realizadas no Laboratório de Matemática da escola. As entrevistas foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas na íntegra. Tiveram, contudo, objectivos diferentes. A primeira entrevista foi focada na perspectiva da aluna face à Matemática, ao erro e à avaliação; as restantes tiveram dois propósitos: clarificar aspectos das produções escritas da aluna nas tarefas propostas nas aulas que suscitavam dúvidas, e procurar evidências sobre as causas dos erros detectados.

Sendo a professora da turma a investigadora, a observação feita foi de carácter participante e as notas de campo não puderam ser tão exaustivas como seriam no caso de a investigadora não desempenhar, simultaneamente, o papel de professora. Para este estudo, foram observadas e gravadas em áudio três aulas relativas ao tópico *Equações*. Na recolha documental, as produções escritas da Maria foram instrumentais durante a realização de todas as entrevistas. Contudo, foram também recolhidas as suas produções durante as aulas observadas, permitindo uma maior triangulação de dados.

A análise dos erros cometidos por Maria nas produções recolhidas seguiu as categorias de Socas (1997) apresentadas na Figura 1. O *feedback* fornecido pela professora foi analisado tendo em conta a sua natureza (Gipps, 1999), enfoque (Wiliam, 1999) e efeito que produziu na segunda versão produzida por Maria.

Contexto Pedagógico

Os professores de 7.º ano da escola elaboraram uma cadeia constituída por 7 tarefas, a última das quais a ser resolvida num momento formal de avaliação, individualmente e em duas fases. As restantes tarefas foram pensadas para serem resolvidas a pares ou em pequenos grupos de três alunos, procurando desenvolver a sua autonomia, a capacidade de trabalhar colaborativamente, de discutir ideias e de respeitar as ideias dos outros. Procurou-se construir uma cultura, na sala de aula, em que o erro assumisse um papel inerente à aprendizagem. Assim, os alunos foram-se apercebendo da importância da participação activa na sua aprendizagem. Foram ainda enfatizadas situações propícias à reflexão crítica sobre os processos apresentados pelos alunos, incentivando, de forma continuada, a explicitação de todas as suas ideias, mesmo as menos correctas. No decorrer da realização das tarefas, a professora foi incentivando os alunos que revelavam mais dificuldades a procurar ultrapassá-las, fomentando a reflexão, quer sobre processos, quer sobre produtos. Em geral, foi realizada, em vários momentos de aula ou apenas na última parte, uma discussão com toda a turma, por forma a que os alunos, juntamente com o professor, elaborassem uma síntese que deveriam registar nos seus cadernos.

Apresentação e discussão de resultados

A aluna Maria

Maria não gosta de errar e, para ela, o melhor processo de corrigir os erros é "(…) apagar tudo e fazer tudo de novo para ver se percebi" (Entrevista, 22 de Outubro, 2009). A persistência pareceu ser uma característica da aluna, que admite ser teimosa: "Eu sou muito teimosa (…) se não dá, tento outra maneira, e se continua mal volto ao primeiro processo" (Entrevista, 22 de Outubro, 2009). De seguida, analisamos as dificuldades e os erros cometidos pela Maria na aprendizagem de processos de resolução de equações. Procuramos incluir na nossa análise uma reflexão sobre como o *feedback* escrito, um dos mecanismos de avaliação reguladora utilizados pela professora, que facilitou à Maria a tomada de consciência desses erros e contribuiu para que ela os remediasse.

Algumas dificuldades/erros apresentados por Maria na resolução de equações

Apresentamos a resolução da Maria de uma das tarefas propostas em sala de aula. Esta tarefa, que envolvia a resolução de várias equações, foi trabalhada em duas fases, isto é, as resoluções dos alunos eram comentadas por escrito pela professora e, numa aula posterior, eles poderiam voltar a trabalhar nas suas produções, procurando melhorá-las com base no *feedback* fornecido.

Na Figura 2, apresentamos a resolução da equação $-7a + 4 + 10a = 4 - 2a$ realizada pela Maria. A aluna usa um método informal recorrendo a um modelo de balanças. Começa por adicionar a ambos os membros da equação a mesma quantidade (-4), realizando correctamente a operação respectiva no primeiro membro mas cometendo, aparentemente, um erro de concentração (codificado na categoria C no modelo de Socas, 1997) ao esquecer-se do sinal menos no termo $-2a$.

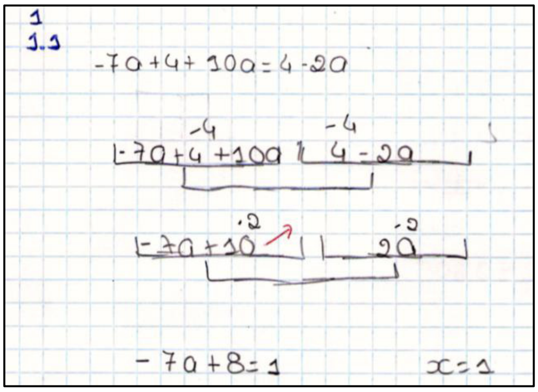


Figura 2: Primeira fase da resolução da questão 1.1. da tarefa sobre equações.

No passo seguinte, a incógnita do termo 10*a* desaparece, evidenciando um erro de concentração (código C). Por fim, nesta resolução, Maria comete um erro de *eliminação*, codificado com a letra A (Socas, 1997), ao adicionar termos não semelhantes. Este erro é também referido na caracterização de Hall (2002a). De notar ainda que, apesar de a incógnita em questão ser *a*, a aluna dá como resposta *x*=1, o que poderá apontar para mais um erro com origem no foro afectivo (código C). No entanto, a aluna pode ter efectuado outro erro de *eliminação* substituindo simultaneamente a incógnita *a* por *x*.

O *feedback* fornecido a esta produção foi "*Por que desaparece a variável do termo 10a? Se atribuíres valores à variável, a última igualdade é sempre verdadeira?*" Este *feedback,* dirigido à tarefa, por pensarmos ser mais eficaz, pretendia dar pistas à aluna para melhorar a sua produção na segunda fase. Efectivamente, analisando a produção de Maria na segunda fase (Figura 3), parece existir evidência de que a aluna entendeu o *feedback* dado, reconheceu o erro de *eliminação* e conseguiu ultrapassá-lo.

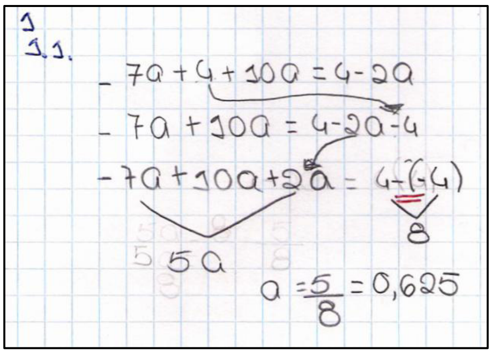


Figura 3: Segunda fase da resolução da questão 1.1 da tarefa sobre equações

A entrevista à Maria, realizada após a aula em que ela trabalhou na tarefa das equações pela segunda vez (em que se procurou perceber melhor como a aluna havia compreendido os erros que havia cometido e como os teria ultrapassado), parece confirmar a afirmação anterior:

> *Professora:* Observa a tua resolução na primeira fase.
>
> *Maria:* Esqueci-me de pôr a variável, passei de um lado para o outro e a variável desapareceu não a passei para baixo (pausa) … eu nos testes esqueço-me!
>
> *Professora:* Mas as resoluções não podem depender de ser ou não teste!
>
> *Maria:* Sim, Baralhei-me toda! Lembrei-me de uma ficha em que fazíamos x=1, igual a 2 e por aí fora e achei que era igual.
>
> *Professora:* Não encontras mais nada?
>
> *Maria:* Juntei tudo, eu não posso mexer neste se não for igual a este [aponta para termos com incógnita e termos sem incógnita].
>
> (Entrevista, 6 de Maio, 2010)

Da entrevista da aluna, podemos também inferir que há factores de origem afectiva que podem ter uma influência significativa na forma como ela realiza as tarefas, em qualquer fase. A distracção e a ansiedade podem ser motivos para alguns erros cometidos pela Maria (código C, segundo Socas, 1997).

Analisando novamente a produção da Maria na segunda fase da resolução da equação $-7a + 4 + 10\ a = 4 - 2a$ (Figura 3), verificamos que, apesar de ter ultrapassado as dificuldades reveladas na primeira fase, a Maria apresenta novos erros que podem enquadrar-se, segundo a tipificação de Socas (1997), na subcategoria B1. De facto, na terceira linha da produção da aluna, surge um erro por *transposição* e um erro de *divisão*, igualmente referidos por Hall (2002a). Relativamente a estes erros, quando com eles confrontada durante uma entrevista, Maria afirma:

> (…) Eu aqui fiz quatro menos e entre parêntesis menos quatro e não podia, o menos só aparece uma vez. Também dividi mal, está ao contrário. O número que fica por baixo tem que ser o que fica à beira da letra. (Entrevista, 6 de Maio, 2010)

A aluna dá, assim, sinal de ter identificado o erro cometido e de o ter corrigido. Contudo, resta a dúvida sobre se terá efectivamente compreendido as razões dos processos necessários à correcção dos erros identificados.

A dificuldade em utilizar adequadamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição é muito frequentemente referenciada na literatura e, de acordo com o modelo de Socas (1997), pode ser considerada na subcategoria B2. Na primeira fase da resolução da equação 3 (x – 2) = 5x (Figura 4), Maria opta por um processo informal, mais uma vez recorrendo a um modelo com balanças. No segundo passo da sua resolução, Maria subtrai o número 3 nos dois membros da equação, cometendo um erro enquadrado na subcategoria B2, pois verifica-se a aplicação de uma regra válida num contexto, mas desajustada nesta situação. A Maria não usa a propriedade distributiva, adiciona termos não semelhantes (5x – 3 = 2), cometendo um erro de *eliminação*, classificado na categoria A, e obtém uma solução incorrecta da equação. Como se pode ver na Figura 4, mais uma vez, o *feedback* fornecido está centrado na tarefa; no entanto, a utilização de um discurso avaliativo, sob a forma de uma opinião autorizada, parece não ter produzido o efeito regulador desejado.

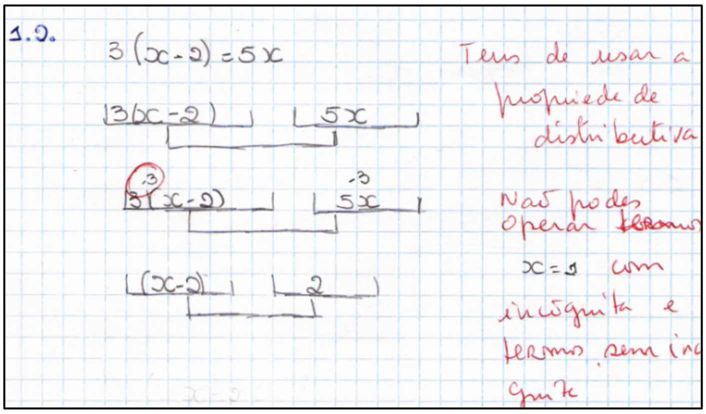


Figura 4: Primeira fase da resolução da questão 1.2. da tarefa sobre equações

Na segunda fase (Figura 5), Maria tenta aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, mas de forma errada. A aluna continua a evidenciar erros de *eliminação* ao, aparentemente, simplificar 6 – 3x como sendo 3, demonstrando simultaneamente dificuldades em isolar a incógnita, cometendo um de *divisão* (Hall, 2002 a). Durante a resolução da equação 4 + 3 (x+5) = 5x (Figura 6), Maria comete os mesmos erros – erros de *eliminação* (código A) e erros de *divisão* (código B1), evidenciando também dificuldades no uso da propriedade distributiva (código B2) e manifestando ainda erros de concentração (código C).

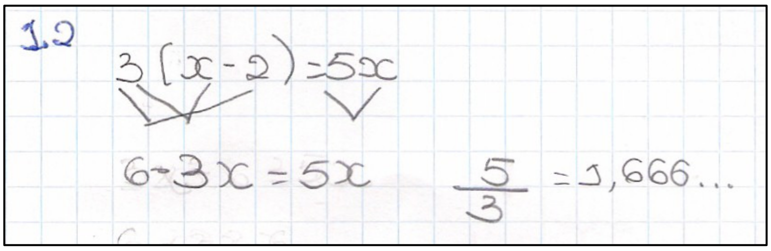


Figura 5: Segunda fase da resolução da questão 1.2. da tarefa sobre equações

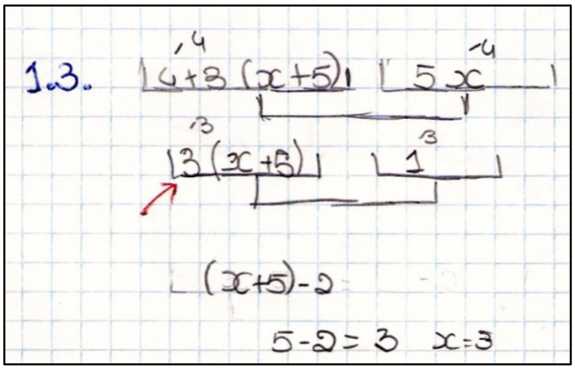


Figura 6: Primeira fase da resolução da questão 1.3. da tarefa sobre equações

O *feedback* que foi fornecido à aluna, na primeira fase da resolução da equação $4+3(x+5) = 5x$, foi o mesmo que foi dado à sua primeira resolução da equação $3(x-2) = 5x$ (Figura 4). Surpreendentemente, na segunda fase, Maria resolve correctamente a questão, identificando e ultrapassando os erros cometidos (Figura 7).

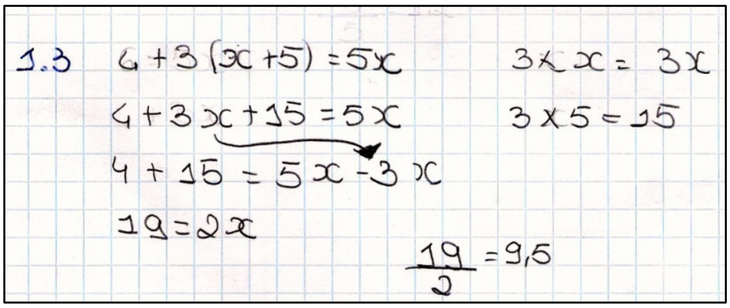


Figura 7: Segunda fase da resolução da questão 1.3 da tarefa sobre equações

O que motivou esta reacção diferente perante o mesmo *feedback* constituiu objecto de reflexão. Poderemos colocar as seguintes questões: (1) por que razão o *feedback* fornecido não produziu efeito na resolução da segunda questão e parece existir evidência de que foi eficaz na terceira questão? (2) que outros factores poderão estar associados a esta reacção? e (3) que mecanismos usou Maria para ultrapassar as suas dificuldades? Para tentar encontrar respostas plausíveis a estas três perguntas, questionámos a aluna.

> *Professora:* Entendeste o feedback dado na questão 1.2?
>
> *Maria:* Entendi, mas tentei fazer de outra maneira e não correu bem…
>
> *Professora:* Mas resolveste bem na segunda fase a questão 1.3 e os erros que deste na primeira fase eram os mesmos da questão 1.2. Como explicas isso?
>
> *Maria:* Às vezes dá-me, umas vezes faço bem e outras vezes faço mal.
>
> *Professora:* Explica melhor.
>
> *Maria:* Nem sempre estou concentrada, aqui apliquei bem a propriedade distributiva, sabia como tinha de fazer.
>
> *Professora:* Mas na 1.2 não fizeste isso. Porquê?
>
> *Maria:* Eu na questão 1.3 lembrei-me da tarefa que tínhamos feito na aula entre as duas fases e tinha lá uma questão igual e assim foi fácil.
>
> *Professora:* Não reparaste que a 1.2 era semelhante?
>
> *Maria:* Só vi que tinha que multiplicar, mas não me lembrava como fazer, não reparei que era parecida com a que fizemos…
>
> (Entrevista, 6 de Maio, 2010)

Maria não consegue explicar que processos usou para superar as suas dificuldades. Resolve a questão 1.3. por comparação com outra experiência de aprendizagem equivalente, mas aparenta não ter interiorizado o procedimento.

Como a entrevista relativa à resolução destas tarefas não foi suficientemente conclusiva, optámos por uma outra entrevista posterior já sem recorrer a uma tarefa em particular. Para nos certificarmos de como a aluna se foi apercebendo dos erros que cometeu na resolução das tarefas, questionámo-la e Maria afirma que "O que a professora escreve ao lado, às vezes ajuda-me a melhorar, mas, outras vezes, não percebo e então mudo de forma. Quando não consigo, apago tudo e tento de outra maneira e, se ainda não der, volto ao início" (Entrevista, 12 de Maio, 2010).

Podemos depreender que a informação dada pelo *feedback* nem sempre foi suficiente e não promoveu o êxito na resolução das questões. No entanto, Maria vê no *feedback* um contributo positivo para a resolução das tarefas e compara a sua eficácia com o que acontece quando o professor se limita a colocar um *risco* numa resolução errada.

(…) Sem os comentários se calhar não conseguia mudar o que fiz, se a professora riscar, passar um traço por cima, ficamos na mesma… Se não tivesse que resolver outra vez, como por exemplo num teste, acabou e passou à frente… Um risco só não ajuda a saber porque é que está mal. (Entrevista, 12 de Maio, 2010)

No Quadro 3, sintetizamos as principais dificuldades/erros manifestados pela Maria na resolução das três equações analisadas neste trabalho.

Quadro 3: Principais dificuldades/erros manifestados por Maria na resolução de três equações

Equação	Código A	Código B1	Código B2	Código B3	Código C
$-7a + 4 + 10a = 4 - 2a$.	Erro de *eliminação* (1ª fase)	Erro por *transposição* (2ª fase) Erro de *divisão* (2ª fase)		Não foram detectados erros desta tipologia	Erro de concentração (1ª fase)
$3(x - 2) = 5x$	Erro de *eliminação* (1ª e 2ª fases)	Erro por *transposição* (2ª fase)	Uso incorrecto da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (1ª e 2ª fases)		Erro de concentração (2ª fase)
$4 + 3(x + 5) = 5x$	Erro de *eliminação* (1ª fase)		Uso incorrecto da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (1ª fase)		Erro de concentração (1ª fase)

Conclusões

Na aprendizagem do tópico *Equações*, e no que diz respeito aos processos de resolução de equações, Maria recorreu frequentemente a processos formais e informais de resolução, ressaltando, destes últimos, uma preferência pelo uso de modelos baseados em balanças. A aluna evidencia uma predominância de erros com origem num *obstáculo cognitivo* ou causados pela *ausência de significado* (categorias A e B, respectivamente, na tipologia de Socas, 1997). Maria cometeu frequentemente erros de *eliminação*, de *divisão* e por *transposição* (Hall, 2002a). De forma recorrente, a Maria evidencia dificuldades na utilização adequada da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e comete também alguns erros resultantes de factores afectivos (categoria C), sobretudo distracção ou ansiedade. Com base nos dados recolhidos, parece surgir evidência que Maria manifesta dificuldades na interiorização do conceito de equação, bem como na compreensão do próprio processo de resolução.

As tarefas em duas fases constituíram uma estratégia de ensino com bastante enfoque no tópico *Equações* e mostraram proporcionar oportunidades para o desenvolvimento de dispositivos de regulação eficazes, em particular, o *feedback* escrito. No entanto, no caso de Maria, apesar de ela ver no *feedback* escrito um contributo positivo para a resolução das tarefas, ele nem sempre produziu o efeito desejado. Normalmente, o *feedback* escrito que foi fornecido às primeiras produções da Maria foi, nuns casos, descritivo e noutros avaliativo, mas sempre dirigido à tarefa, incluindo, em particular, o conteúdo matemático necessário à sua resolução. A Maria pareceu reconhecer os erros cometidos, identificando alguns deles como consequência de distracções, mas nem sempre mostrou compreender o que lhe era pedido ou o procedimento que tinha de adoptar para prosseguir a sua resolução ou para corrigir os erros cometidos. Assim, em algumas tarefas, a Maria conseguiu ultrapassar os seus erros da primeira para a segunda fase, noutras isso já não aconteceu. Perceber por que o mesmo *feedback* dirigido a produções idênticas, na interpretação da professora, nem sempre apresenta o mesmo grau de eficácia é uma questão que merece atenção no futuro.

Referências

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles Policy and Practice*, *5*(1), 7 – 73.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Colecção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction*: *A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Bruno, I. (2006). *Avaliação das aprendizagens: O processo de regulação através do feedback – um estudo em Físico-Química no 3º ciclo do ensino básico*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Cury, H. N. (1995). Retrospectiva histórica e perspectivas actuais da análise de erros em educação matemática. *Zetetiké*, *3*(4), 39 – 50.

Cury, H. (2007). *Análise de erros*: *o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das aprendizagens: Desafios às teorias, práticas e políticas*. Lisboa: Texto Editores.

Gipps, C. (1999). Socio-cultural aspects of assessment. *Review of Research in Education, 24*, 355 – 392.

Hadji, C. (1994). *A avaliação, regras do jogo. Das intenções aos instrumentos.* Porto, Portugal: Porto Editora.

Hall, R. (2002a). An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. Acedido em 20 de Maio, 2009, de http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome15/ hall_errors.pdf.

Hall, R. (2002b). An analysis of thought processes during simplification of an algebraic expression. Acedido em 20 de Maio, 2009, de ,http://www.people.ex.ac.uk/ PErnest/pome15/ r_hall_expressions.pdf.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grows, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390 – 419). New York, NY: MacMillan.

Leal, L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Martins, M. P. (1996). *A avaliação das aprendizagens em Matemática: concepções dos professores* (Tese de mestrado. Universidade Católica Portuguesa). Lisboa: APM.

Matz, M. (1981). Building Metaphoric Theory of Mathematical Thought. *Journal of Mathematical Behavior*, *3*(1), 93 – 166.

Menino, H. & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática. O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2º ciclo do ensino básico. *Actas do XV SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática)* (pp. 271 – 291). Lisboa: APM.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Ponte, J. P.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Breda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Acedido em 20 de Maio, 2009, de http://sitio.dgidc.min edu.pt/matematica/ Documents/Programa Matematica.pdf.

Ruano, R., Socas, M. M., & Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. In E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico & A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 311-322). Granada, Espanha: Editorial Universidad de Granada.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In *Avaliação das aprendizagens: Das concepções às práticas* (pp. 77 – 84). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Santos, L. (2003). A investigação em Portugal na área da avaliação pedagógica em Matemática. *Actas do XIV SIEM* (Seminário de Investigação em Educação Matemática) (pp. 9 – 27). Lisboa: APM.

Santos, L., & Dias, S. (2006). Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback. *Actas do ProfMat2006*. Lisboa: APM. (CD-ROM).

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Orgs.), *Avaliação em matemática. Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: SEM/SPCE.

Santos, L.; Pinto, J.; Rio, F.; Pinto, F.; Varandas, J.; Moreirinha, O.; Dias, P.; Dias, S., & Bondoso, T. (2010). *Avaliar para aprender. Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário*. Porto: Porto Editora e Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Vale, L. (2010). *O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: um estudo com alunos do 7.º ano do ensino básico*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Wiliam, D. (1999). Formative assessment in mathematics. *Equals: Mathematics and Special Educational Needs, 5*(3), 8-11.

SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES NO 7.º ANO: UMA ABORDAGEM NO QUADRO DO NOVO PROGRAMA DE MATEMÁTICA

Paula Teixeira
ES com 2.º e 3.º CEB, D. João V – Damaia
pteixeira@mail.telepac.pt

Henrique Manuel Guimarães
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmguimaraes@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação tem por base o trabalho no tópico *Sequências e regularidades*, correspondente aos primeiros momentos do ensino da Álgebra no 3.º ciclo de escolaridade, realizado numa das turmas piloto 7.º ano que no ano lectivo de 2008-09 iniciaram a aplicação experimental do Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico. O objectivo principal que nos propusemos é analisar o percurso dos alunos na realização das tarefas relativas ao tópico referido, procurando identificar os elementos de sucesso mais relevantes nesse percurso e compreender os principais obstáculos e dificuldades com que os alunos se depararam. Para isso foram seleccionadas as duas tarefas com que o estudo do tópico se iniciou, tendo a nossa análise incidido nos dados recolhidos na observação das aulas em que essas tarefas foram trabalhadas e nas produções escritas que os alunos realizaram. Na sua generalidade, os alunos desenvolveram a compreensão da ideia de sequência matemática e da ideia de regularidade (associada a uma sequência). A determinação de um termo, conhecida a sua ordem não levantou grandes dificuldades, o que não aconteceu com a solicitação 'recíproca', isto é, determinar a ordem de um certo termo dado. Certos aspectos do enunciado das tarefas levantaram dificuldades de compreensão do que era proposto e do que se pretendia que os alunos realizassem. Por outro lado, foram também notórias dificuldades na apropriação e uso adequado de aspectos específicos da linguagem, como 'termo', 'ordem' (do termo), 'sequência'. Todavia, da primeira para a segunda tarefa, foi patente o progresso dos alunos na compreensão das situações propostas e na resposta a essas situações, em particular no que se refere à descoberta da lei de formação da sequência e de uma expressão algébrica que a traduzisse.

Palavras-chave: Sequências e regularidades, Aprendizagem da álgebra, Novo Programa de Matemática do Ensino Básico.

Introdução

Um dos aspectos em que o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB, Ponte et al., 2007) se distingue significativamente do anterior é no assumir o pensamento algébrico como um dos "eixos fundamentais" para o desenvolvimento do ensino-aprendizagem neste nível de escolaridade. Nos primeiros anos, o novo programa propõe um trabalho de iniciação ao pensamento algébrico através de, por exemplo, padrões geométricos, regularidades e sequências numéricas e relações entre os números, na perspectiva de um alargamento e aprofundamento deste estudo no 2.º ciclo, onde a Álgebra surge já como um dos temas matemáticos que estruturam o programa. Este "percurso prévio" no trabalho algébrico anterior ao 3.º ciclo – para onde se reserva a "institucionalização" da utilização da linguagem algébrica – é mesmo assumido, no programa, como "a alteração mais significativa em relação ao [programa] anterior" (Ponte et al., 2007, p. 7), esperando-se que esta alteração, com o encarar da Álgebra como uma forma de pensar em matemática que lhe está associado, favoreça a aprendizagem posterior dos alunos neste domínio.

Nesta comunicação iremos apresentar e analisar o trabalho realizado numa das turmas piloto do 7.º ano de escolaridade que 'experimentou' o novo programa no ano lectivo 2008-2009, logo após a sua homologação, envolvendo, justamente, os primeiros momentos da aprendizagem da Álgebra no 3.º ciclo. O objectivo principal que nos propomos, é analisar o percurso dos alunos na realização das tarefas para o estudo das *Sequências e regularidades*, analisando os incidentes críticos mais relevantes, quer para a identificação dos principais passos de sucesso nesse estudo, quer para compreensão dos obstáculos e dificuldades com que os alunos se depararam.

Contexto do trabalho e aspectos metodológicos

Em Setembro de 2008, inseridos no processo de experimentação do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB) em turmas piloto escolhidas para o efeito, dez professores de Matemática de turmas do 3.º ciclo de diversas escolas distribuídas pelo continente, iniciaram a um trabalho conjunto de construção e adaptação de materiais para a sala de aula.

Esta comunicação incide justamente sobre o trabalho realizado numa das turmas piloto do 7.º ano no tópico *Sequências e regularidades*, cuja leccionação decorreu entre 23 de Outubro e 4 de Novembro de 2008. A turma em questão era também uma das turmas onde duas alunas do curso da Licenciatura em Ensino da Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL) desenvolveram o seu trabalho de prática lectiva supervisionada no âmbito da realização do estágio pedagógico, com a orientação e acompanhamento dos autores deste trabalho, Paula Teixeira, responsável pela turma, de que também era Directora, e Henrique Manuel Guimarães[1], como orientador da Faculdade.[2]

Tratava-se de uma turma constituída por vinte e quatro alunos, dez dos quais eram repetentes, estando dois deles fora da escolaridade obrigatória. Três alunos estavam indicados para Português Língua Não Materna. Relativamente ao desempenho em Matemática no ano lectivo anterior, dois alunos apresentavam nível 4 e dezasseis alunos tinham tido nível inferior a 3, dois deles com nível 1.

Uma caracterização geral das dez turmas do processo de aplicação do novo programa no 3.º ciclo consta a seguir no Quadro 1. Estas turmas tinham uma composição muito heterogénea nomeadamente quanto ao número de alunos, quanto à amplitude das idades em cada turma e quanto ao número de repetentes. Também no final do ano foi muito diferente o número de alunos de cada turma que progrediu para o 8.º ano.

Quadro 1. Caracterização das turmas piloto (2008-2009).

Local	N.º de alunos	Idades	N.º de alunos repetentes	N.º de alunos que progrediram no final do 7.º ano
Porto T1	27	12-14	0	25
Porto T2	27	12-14	0	27
Aveiro	22	11-13	0	22
Tondela	24	11-13	1	24
Lisboa	22	11-16	4	15
Damaia	24	11-15	10	6
Reguengos	20	11-14	3	17
Montemor	20	11-13	0	18
Albufeira	22	11-12	0	21
V. Real de Sto António	23	10-16	10	13

Na turma da Damaia, onde teve lugar o trabalho que aqui apresentamos, os alunos de um modo geral tinham um ritmo de trabalho lento na sala de aula e, em muitos deles, era evidente um grande desinteresse pelos trabalhos. A participação dos alunos nas discussões colectivas na turma era desorganizada e manifestavam dificuldade em ouvir-se uns aos outros. Apenas um número muito reduzido evidenciava alguma autonomia na

[1] Também co-autor do NPMEB em aplicação na turma.
[2] Por parte do Departamento da Educação, enquanto que a professora Suzana Nápoles foi a orientadora por parte do Departamento de Matemática.

realização das tarefas em aula e muito poucos conseguiam verbalizar as ideias e argumentar matematicamente com alguma elaboração.

Para esta comunicação seleccionámos duas tarefas com que se iniciou o trabalho no tópico *Sequências e regularidades* que abriu o estudo da Álgebra – “Voo em V” e “Tarefa 2” [3] (Ponte, Matos & Branco, 2008). As aulas onde estas tarefas se trabalharam, foram leccionadas pela professora da turma e observadas pelas professoras em estágio e pelo orientador do Departamento de Educação da FCUL que, junto a um grupo de alunos, elaborou, em cada aula, notas de campo sobre o trabalho que os alunos desenvolviam (no grupo e depois na discussão geral, ou a propósito de qualquer intervenção da professora dirigida a toda a turma). A professora elaborou registos escritos pós-aula, sobre o desenvolvimentos dos trabalhos. Para além da observação com as respectivas notas de campo e registos pós-aula, foram ainda utilizadas para a nossa análise as produções dos alunos nas duas tarefas que a professora solicitava e recolhia em aula.

As foram aulas foram seguidas de uma sessão de trabalho, em geral no mesmo dia da sua realização onde se analisava e reflectia sobre o desenvolvimento de cada aula, com a participação dos professores tinha tomado parte da aula.

Pensamento algébrico e enquadramento curricular do estudo

A ideia da Álgebra apenas como o domínio dos símbolos matemáticos e o conjunto de regras e procedimentos para a sua manipulação (associada, na Matemática escolar, sobretudo ao estudo das expressões e das equações) tem vindo a ser contrariada nas orientações curriculares desde já há uns anos. A perspectiva da Álgebra como ‘forma de pensar’, mais do que como um conjunto de factos e técnicas, tem vindo a ser progressivamente valorizada e a assumir crescente penetração nas orientações e propostas programáticas.

Se os símbolos matemáticos, e algébricos em particular, e o modo como eles podem ser usados na actividade matemática são uma aquisição e património de grande importância, dentro e fora da Matemática, a Álgebra vai além da manipulação desses símbolos. Os alunos, como defende o National Council of Teachers of Mathematics

[3] Nestes materiais a tarefa 2 tem o título de “Azulejos” (na turma foi usada sem título), alterado para “Os desenhos da Sara” depois de reformulada (ver anexo 2).

(NCTM, 2007) “necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem a manipulação simbólica e o modo como os próprios símbolos podem ser usados” (p. 39). Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) incluem como recomendação para o ensino da Álgebra uma ênfase nas “relações entre quantidades”, nas “formas de representar” e na análise da variação, estabelecendo como expectativas para as aprendizagens dos alunos em Álgebra, o serem capazes de:

- compreender padrões, relações e funções;
- representar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- utilizar modelos matemáticos para representar e compreender situações quantitativas; e
- analisar a variação em diversas situações.

Kieran (2007) refere que a Álgebra escolar pode ser caracterizada por três vertentes ou dimensões dizendo respeito a três tipos de actividades: actividades “generativas”, actividades “transformativas e “actividades globais de meta-nível”. As primeiras, “envolvem a criação das expressões e equações”, as segundas, “lidam tipicamente com procedimentos da manipulação simbólica” e, as actividades globais de meta-nível, diz-nos a autora “são algo de especial”: tratam-se de actividades em que a Álgebra é usada “como um instrumento” e que não lhe são “exclusivas”, incluindo actividades como “resolução de problemas, modelação, percepção de estruturas, estudo da variação, generalização, análise de relações, justificação, demonstração e previsão” (p.17). Estas actividades, como faz notar a autora, relacionam-se com actividades e processos matemáticos mais gerais e são actividades em que nos podemos envolver sem que, necessariamente, tenhamos que usar a simbologia algébrica.

Elaborando sobre ideia de pensamento algébrico, Kapput (1999)[4] – tendo em vista o ensino de “uma nova Álgebra com compreensão” – apresentou “cinco formas” de que este tipo de pensamento se pode revestir, ou, talvez melhor, cinco formas de encarar a Álgebra:

- como generalização e formalização de padrões e restrições;

[4] A expressão que Kapput utiliza mais frequentemente no seu texto é “algebraic reasoning”, não “algebraic thinking”, que também usa, embora apenas uma vez (p.3), aparentemente com o mesmo sentido.

- como manipulação de formalismos sintacticamente guiada;
- como o estudo de estruturas abstraídas dos cálculos e das relações;
- como o estudo de funções, relações e variação conjunta de variáveis; e
- como um conjunto de linguagens de modelação e controlo de fenómenos.

Kapput (1999) sublinha que as cinco 'faces' da Álgebra que apresenta estão fortemente "inter-relacionadas" constituindo um "todo complexo", considerando que as duas primeiras "subjazem a todas as outras", as duas seguintes são ramos temáticos da Álgebra e que a última espelha a Álgebra como uma rede de linguagens e permeia todas as outras" (p. 4). Podemos identificar nesta caracterização algumas componentes com que o pensamento algébrico é hoje mais correntemente caracterizado: generalização e formalização, simbolização e manipulação simbólica, estudo de estruturas, funções e relações, modelação e matematização em geral.

O Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, como referimos na introdução, assume o pensamento algébrico como um dos "quatro eixos fundamentais" que, nos níveis de escolaridade a que o programa se dirige, devem orientar o desenvolvimento do ensino e aprendizagem[5]. Nas orientações programáticas globais, prevê, no quadro das finalidades do ensino, o desenvolvimento da capacidade de compreensão de "conceitos e relações", de "abstracção e generalização", de resolução de problemas que envolvam "processos de modelação matemática", 'ingredientes', claramente relacionados com a Álgebra e o pensamento algébrico, que descrevem e especificam a primeira dessas finalidades. Ainda nas orientações mais amplas, dirigidas ao ensino básico na sua globalidade, inclui, entre os objectivos gerais de ensino, reconhecer e explorar regularidades, interpretar e utilizar representações simbólicas e a linguagem matemática, formular generalizações e conjecturas; estas são especificações também claramente relacionadas com o pensamento e trabalho em Álgebra, neste caso, a permear os objectivos gerais que o programa estabelece.

No tema da Álgebra para o 3.º ciclo, o programa considera que o professor deve orientar o seu ensino de forma a promover nos alunos o desenvolvimento da "linguagem e do pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e

[5] A par do "trabalho com os números e as operações", do "pensamento geométrico" e "do trabalho com dados" (NPMEB, p.1)

capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos" (Propósito principal de ensino, p. 55[6]). E, mais especificadamente, estabelece como metas gerais para a aprendizagem que, com o estudo deste tema, os alunos sejam capazes de:

- interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;
- compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade directa e inversa;
- de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos; e
- de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.

Com este enquadramento programático, a planificação geral para o tópico *Sequências e regularidades* que foi seguida é a que consta no Quadro 2.

Quadro 2. Planificação geral do tópico *Sequências e regularidades*.

<table>
<tr><th>Nº aulas</th><th>Tópico</th><th>Objectivos específicos</th><th>Notas</th><th>Tarefas</th><th>Obs.</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="6">• Termo geral de uma Sequência numérica

• Representação

• Expressões algébricas</td><td rowspan="6">• Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados.

• Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral.

• Simplificar expressões algébricas.</td><td rowspan="3"></td><td>1. Voo em "V"</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>2. Tarefa 2*</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>3. Padrão numérico</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>• Propor a representação de sequências de fracções em que os numeradores e os denominadores tenham relações simples (por exemplo, $\frac{2n}{n+1}$ e $\frac{n+1}{n+3}$</td><td>4. Sequências numéricas**</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td>5. Atravessando o rio**</td><td></td></tr>
</table>

* Esta tarefa tinha como título *Azulejos* nos materiais disponibilizados aos professores pela DGIDC[7].
** Esta tarefa foi prevista, mas não foi realizada

[6] De aqui em diante, as páginas referidas, salvo outra indicação, referem-se ao NPMEB.
[7] (Ponte, Matos & Branco, 2008)

Organização e funcionamento geral do trabalho em aula

Os alunos estavam organizados em grupos de quatro. Os grupos eram permanentes e foram formados pela professora após três semanas de aulas. As aulas tiveram sempre a mesma estrutura: um breve momento inicial no qual a professora apresentava a tarefa, um período longo, entre 45 a 60 minutos de trabalho autónomo dos alunos e um momento de discussão colectiva. Para o trabalho autónomo a professora informou os alunos que: (i) sempre que surgisse uma dúvida, esta devia ser esclarecida, primeiro, com os colegas de grupo e caso a dúvida persistisse, com uma das professoras presentes; (ii) cada grupo só teria possibilidade de colocar duas dúvidas; (iii) as resoluções do grupo deveriam ser registadas numa folha de acetato que poderia ser utilizada no período de discussão; para isso, a cada grupo foi entregue uma folha de acetato e uma caneta para que pudesse escrever as suas resoluções.

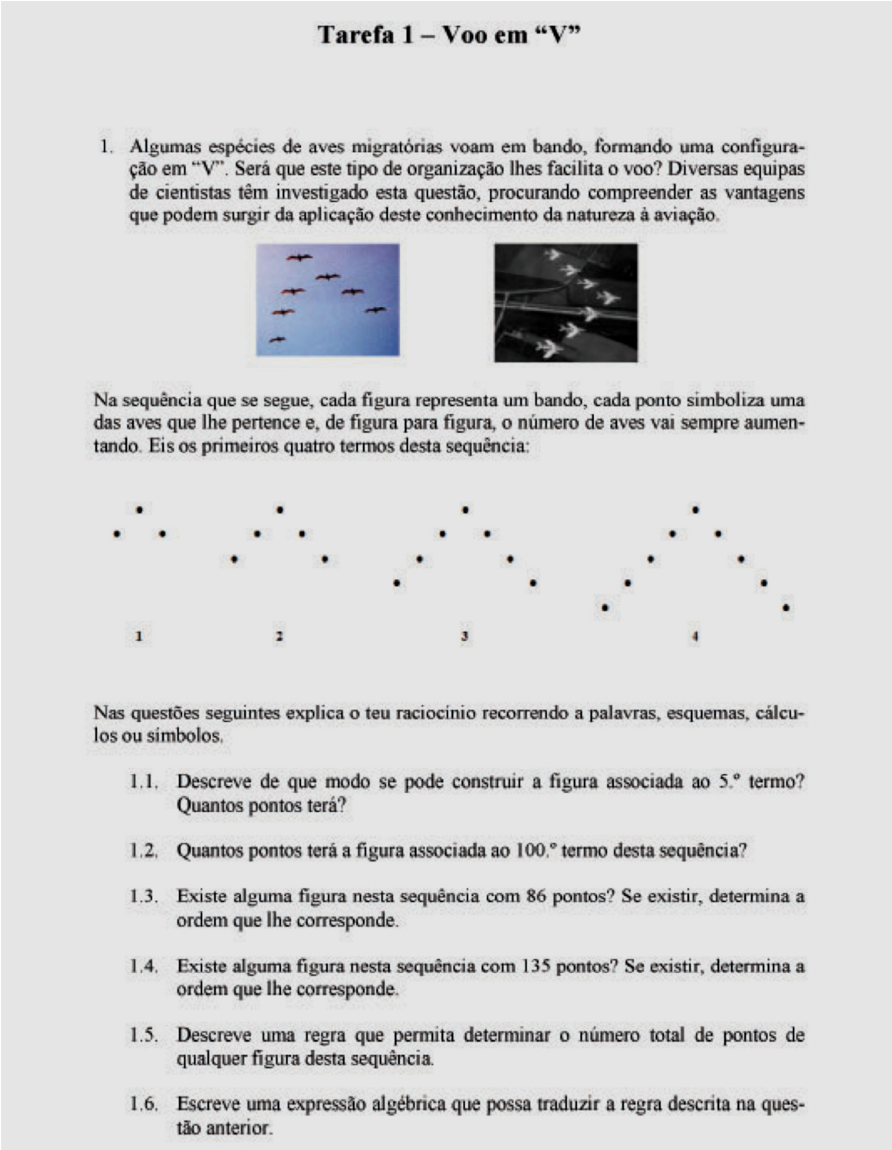
No início do trabalho, os alunos em cada grupo começavam por resolver as questões isoladamente sem interacção entre si. À medida que o tempo ia passando, os alunos começavam a interagir com os colegas, de um modo geral na base de um trabalho em pares. Só na altura de decidir o que escrever na folha de acetato é que o grupo funcionava mais em conjunto.

Foram utilizadas duas aulas de noventa minutos para a realização de cada uma das tarefas seleccionadas para esta comunicação.

Tarefa 1 – Voo em 'V'

No início da aula foi distribuída, a cada um dos alunos, uma folha com a tarefa 1 – "Voo em "V"[8] (ver Figura 1). A professora informou que a tarefa era para ser realizada em 45 minutos, havendo depois um momento de discussão.

[8] (Ponte, Matos e Branco, 2008). Ver no anexo 1 a versão resultante da análise da tarefa depois da sua aplicação em aula.



Tarefa 1 – Voo em "V"

1. Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em "V". Será que este tipo de organização lhes facilita o voo? Diversas equipas de cientistas têm investigado esta questão, procurando compreender as vantagens que podem surgir da aplicação deste conhecimento da natureza à aviação.

Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando. Eis os primeiros quatro termos desta sequência:

1 2 3 4

Nas questões seguintes explica o teu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou simbolos.

1.1. Descreve de que modo se pode construir a figura associada ao 5.º termo? Quantos pontos terá?

1.2. Quantos pontos terá a figura associada ao 100.º termo desta sequência?

1.3. Existe alguma figura nesta sequência com 86 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

1.4. Existe alguma figura nesta sequência com 135 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

1.5. Descreve uma regra que permita determinar o número total de pontos de qualquer figura desta sequência.

1.6. Escreve uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na questão anterior.

Figura 1. Tarefa 1, enunciado distribuído em aula.

No começo dos trabalhos houve casos em que os alunos – eventualmente pela extensão do texto introdutório da tarefa e também por ele próprio conter uma pergunta – tiveram dificuldade em perceber onde começavam as perguntas a que eles tinham que responder. Num grupo, uma aluna, logo depois de ter ligo o texto inicial, a primeira coisa que fez foi unir os pontos das várias figuras que antecedem as perguntas:

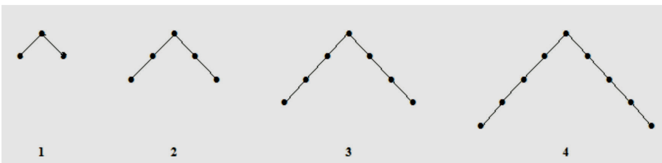


Figura 2. Como a aluna uniu os pontos.

Um colega do grupo, ao reparar no que esta aluna fez, chama-a a atenção – "Aqui não diz para ligar [os pontos]". A aluna ainda replica – "mas aqui diz 'Eis os primeiros quatro termos (...)'" – mas acaba por apagar os traços que desenhara quando outra colega insiste fazendo notar que no texto não se dizia para "ligar" os pontos. Houve também casos em que os alunos não entenderam o que se pretendia na questão 1.1, com a primeira parte – "Descreve de que modo se pode construir (...)" – por não entenderem a expressão "de que modo".

Depois de alguma demora na concentração geral dos alunos, com algumas conversas 'laterais', pouco a pouco os alunos entraram nos trabalhos. Ao fim de 55 minutos, quando se ia iniciar a discussão com toda a turma, diversos alunos pediram mais de tempo, ao que a professora acedeu. Na verdade os alunos mantinham-se empenhados na realização da tarefa – e, como, a professora reconheceu na discussão da aula, era a primeira vez que os sentia tão envolvidos.

A sequência, os termos, a ordem dos termos. Na resolução da tarefa, praticamente todos os grupos responderam correctamente à primeira questão tendo indicado os 11 pontos da figura associada ao 5.º termo da sequência dada (um grupo não o fez explicitamente), tendo dado explicações de como construir a figura em causa, genericamente bem conseguidas (apenas dois grupos se limitaram a apresentar o desenho).

Num grupo (Ricardo, Maria, Lezita e Tiago), uma aluna por si só, apontando com um lápis, conta os pontos de figura para figura e escreve na sua folha "1.1 Acrescentamos um ponto a cada fila. Terá 11 pontos". Um dos colegas do grupo, trabalhando também separadamente, diz que "é fácil", procede da igual modo, contando os pontos com um dedo e escrevendo uma frase semelhante. Em outros grupos, as explicações dadas sobre esta questão foram as seguintes:

> "Para construir o quinto termo é necessário acrescentar 2 pontos à quarta figura" (Marcos, Lamiro, Carina e Cláudia)
>
> "O 5.º termo foi [construído] associa[n]do 2 pontos em relação a figura anterior" (grupo sem identificação)
>
> "A figura do 5.º termo pode ser construíd[a] acrescentando 2 pontos" (grupo sem identificação)

Estas respostas, como todas as outras para as várias questões da tarefa, foram escritas na folha de acetato que a professora distribuíra no início dos trabalhos.

A questão 1.2 foi também bem resolvida nos grupos: todos encontraram o número pretendido, e, embora o enunciado não o pedisse, também registaram indicações sobre como obtiveram a resposta dada (apenas um grupo não o fez). O episódio seguinte dá conta de como os alunos de um grupo (Ricardo, Maria, Lezita e Tiago) trabalharam esta questão.

Ao abordar a questão, um dos alunos, Maria, diz que se tem que "andar de dois em dois" e vai escrevendo a sequência 11, 13, 15... ultrapassando as sete dezenas. Ouve-se entretanto o Tiago a dizer "isto é bué fácil" acrescentando algo como "se é 100, é 50 de cada lado". Maria dirige-se ao Ricardo e pede-lhe que explique ele. O Ricardo segue o que o Tiago tinha dito – "vai ser 50 de cada lado" – mas acrescenta: "mais o ponto de cima" (dá no entanto a ideia que não está seguro). A Maria prossegue, constrói uma tabela até ao termo de ordem 30 mas hesita:

> *Maria*: Isto não deve ser assim, tem que haver outro processo.
>
> *Ricardo:* Isso não interessa, estás quase lá.
>
> *Maria:* Não estou nada quase lá. A figura não tem que ter 100 pontos, tem é que ser a figura 100 e eu ainda só vou na 30ª figura.

A Maria não está convencida do que está a fazer, apaga a sequência de números que tinha na folha e escreve:

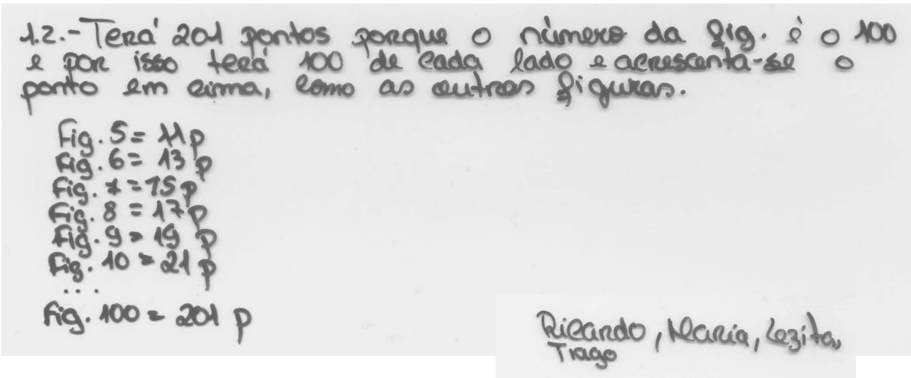
Fig. 5 — 11p
Fig. 6 — 13p
Fig. 7 — 15p
...

Quando chega a Fig. 10 — 10p conclui: "Agora temos que multiplicar por 10" (estaria a pensar no número de ordem da figura). O Ricardo replica dizendo que é por 5 que se tem que multiplicar (estaria a pensar no número de pontos 'de cada lado' da figura, excluindo o vértice do 'V'). Nesta altura, o professor que acompanha o grupo faz uma sugestão:

> *Professor:* Comparem o número de pontos de cada figura com o número que está 'por baixo' da figura.

Esta sugestão leva os alunos a perceber o que se passa de figura para figura, verbalizando algo como: "na primeira figura ao número um acrescentamos 2, na segunda acrescentamos 3, na terceira 4...". Neste ponto é a Maria quem diz: "E na figura 100, acrescentamos 101. Dá 201". Esta aluna ainda acrescenta: "Ah, na primeira há um de cada lado e um em cima, na segunda dois de cada lado e um em cima", prosseguindo com mais alguns casos até dizer, "na centésima há 100 de cada lado e um em cima". Neste momento o professor no grupo pergunta "e se fosse a figura 1000?" e o Tiago, ao ouvir, propõe "e um milhão". Ambas as perguntas foram respondidas com rapidez e acertadamente.

Percebe-se assim que estes alunos identificaram os invariantes de figura para figura na sequência dada e, portanto, de algum modo, a 'regularidade' em causa. Veja-se na Figura 3 o que decidiram escrever na folha do acetato do grupo.



1.2.-Terá 201 pontos porque o número da fig. é o 100 e por isso terá 100 de cada lado e acrescenta-se o ponto em cima, como as outras figuras.

Fig. 5= 11p
Fig. 6= 13p
Fig. 7=15p
Fig. 8 = 17p
Fig. 9 = 19p
Fig. 10 = 21p
...
Fig. 100 = 201 p

Ricardo, Maria, Lezita, Tiago

Figura 3. Questão 1.2, registo do grupo do Ricardo, Maria, Lezita e Tiago.

Em outros grupos não existiram explicações tão elaboradas como esta mas, de um modo geral, o que apresentaram evidencia a compreensão da regularidade em causa.

Nesta questão, para encontrarem a resposta pedida, os alunos 'prolongavam' a sequência usando apenas números, organizando-os, em geral, em forma de tabela que apresentavam como explicação ou complemento da explicação da resposta que davam à questão, como foi o caso do grupo cujo registo se apresenta na Figura 4.

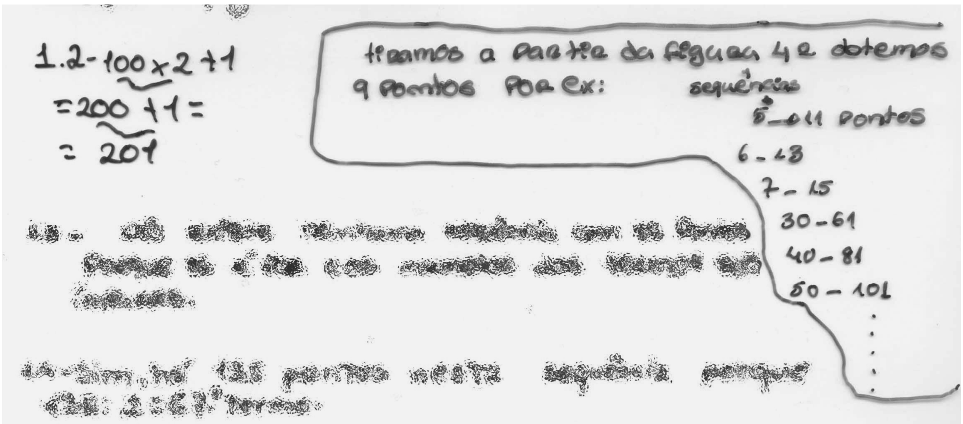


Figura 4. Questão 1.2, registo de um outro grupo (sem identificação na folha de acetato).

As questões 1.3 e 1.4 não levantaram problemas aos alunos que apresentaram respostas correctas em todos os grupos, em alguns casos (ver um exemplo na Figura 5) com justificações que evidenciam a compreensão do que caracterizava a sequência numérica em estudo.

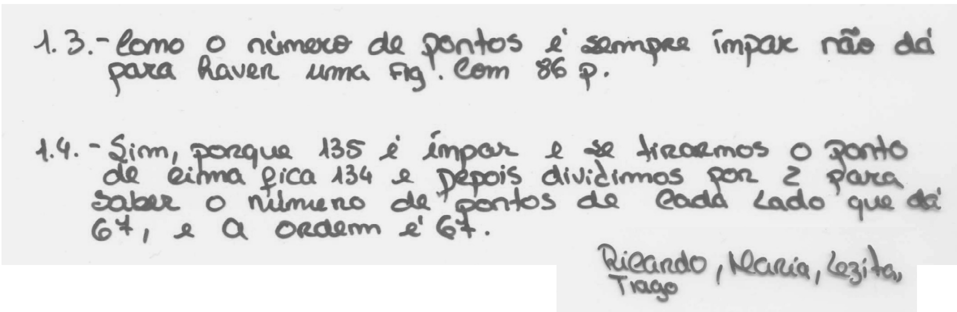


Figura 5. Questões 1.3 e 1.4, registo do grupo do Ricardo, Maria, Lezita e Tiago

Na verdade, a característica de 'imparidade' dos números da sequência foi reconhecida com facilidade pela generalidade dos alunos que a exprimiram bastante correctamente, nas justificações que davam e que escreveram nos registos dos grupos (apenas três respostas, embora correctas, não foram justificadas).

> (1.3)
>
> "Não. Porque cada figura é constituída por números ímpares e 86 é um número par." (Cíntia, Solange, Márcia e Marlion)
>
> "Não, porque 86 é um número par e nesta sequência só existe[m] nºs ímpares." (Marcos, Lamiro, Carina e Cláudia)

> “Não existe porque o resultado dos pontos é sempre números ímpares” (Bruno, Rúben, Cátia e Leo)

> (1.4)
>
> “Existe na figura 67, vai dar 135 pontos porque é sempre o dobro do número mais um” (Bruno, Rúben, Cátia e Leo)

É de notar, no entanto, que nestas e em outras questões se evidenciou que não é logo claro para os alunos o significado de ‘termo’, ‘ordem’ (do termo) e ‘sequência’, e que com recorrência os confundem ou usam inadequadamente. Por exemplo na questão 1.4., houve alunos que não perceberam de imediato o significado de “determina a ordem da figura [com determinado número de pontos]”. “O que é determina a ordem? É o que determina a figura?”, perguntou a Maria, aluna do grupo de que se transcreveu o registo anterior. Esclarecida pela professora vem a dizer: “Então se tirarmos o ponto de cima fica 134 e depois dividimos por 2 para saber o número de pontos de cada lado que dá 67 e a ordem é 67” que foi justamente o que veio a ser escrito no acetato do grupo.

Da confusão referida e do uso desajustado de ‘termo’, ‘ordem’ (do termo) e ‘sequência’, são ainda exemplos, na questão 1.4, a resposta “Sim, há 135 pontos nesta <u>sequência</u> porque 135:2 = 67º termo” ou, na questão 1.5, “Tiramos o <u>número da sequência</u> multiplicamos por 2 e somamos 1” ou ainda (questão 1.6) “para encontrarmos <u>as sequências</u> temos de pegar o <u>número da sequência</u> e multiplicamos por 2 e somamos pelo número 1” (sublinhados nossos).

A expressão algébrica. O objectivo principal da realização desta tarefa era que os alunos chegassem à generalização – termo geral da sequência – que as questões 1.5 e 1.6 solicitavam, a 1.6 numa versão formal – uma “expressão algébrica”.

Todos os grupos escreveram uma regra que permitia calcular o número de pontos de qualquer figura da sequência (questão 1.5), mas nem todos conseguiram escrever uma expressão algébrica correspondente (questão 1.6). Eis alguns exemplos das regras que os alunos escreveram, respondendo à questão 1.5:

> “Para sabermos sempre, temos que ver o número da fig. que é a ordem e depois multiplicamos por 2 e s[o]mamos o ponto que está por cima ficando o número de pontos ímpar” (Ricardo, Maria, Lezita e Tiago).

"A regra que nos permite determinar o número de pontos é fazer o número da Figura x 2 + 1" (o sublinhado é do grupo, Cíntia, Solange, Márcia e Marlion).

"A regra é fazer o dobro da ordem e a soma de mais um" (Marcos, Lamiro, Carina e Cláudia).

"Multiplica-se o número da figura por 2 e soma-se mais um" (grupo sem identificação).

No ano em curso ainda não se tinha usado na turma a terminologia "expressão algébrica" o que naturalmente levantou dificuldades na interpretação do enunciado e terá levado a que poucos alunos tenham respondido à questão. Um grupo que não conseguia perceber o que era pedido no enunciado com "escreve uma expressão algébrica", tomou a iniciativa de ir ver ao dicionário o que significava a palavra *algébrica* e concluiu que o que se pretendia era "traduzir a regra através de uma expressão com símbolos e letras". Este grupo (Ricardo Maria Lezita e Tiago), que respondeu com correcção e clareza a todas as questões da tarefa, apesar da consulta ao dicionário, não escreveu a expressão algébrica pedida.

Mesmo assim, eventualmente por existirem alunos repetentes, dois dos grupos responderam à questão 1.6, num caso escrevendo (N+N+1) – que oralmente foi explicitada como "duas vezes o N mais 1" – e, no outro caso, escrevendo Nx2+1 (apresentada no âmbito da questão 1.5). Dois grupos não chegaram a escrever a expressão algébrica, mas um deles, na discussão, explicou qual era a expressão utilizando a linguagem natural. Uma aluna que descobriu uma expressão algébrica para responder ao que era pedido, para explicar o modo como procedeu fez no quadro o desenho que a seguir se apresenta na Figura 6.

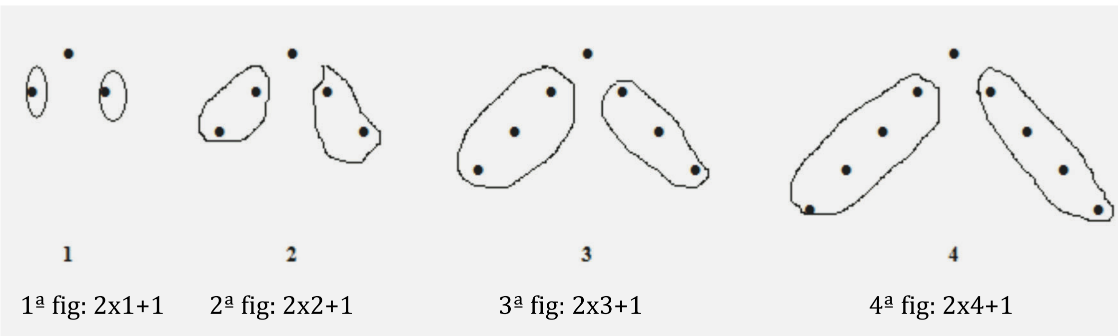


Figura 6. Questão 1.6, à procura da expressão algébrica.

Sobressai aqui o papel das figuras na descoberta da 'lei'. Aparentemente, a aluna terá reparado na simetria de cada figura e no que permanecia e mudava de figura para figura, aspectos que os 'círculos' que desenhou e as legendas que escreveu evidenciam. Repare-se todavia que, embora as sucessivas 'legendas' de cada uma das figuras sugiram que a aluna irá escrever a expressão geral 2N + 1, o que escreveu foi N+N+1, porventura respondendo ao 'apelo' visual das figuras.

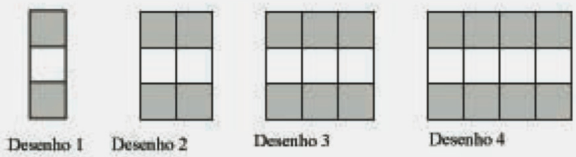
Tarefa 2

Tal como se passou com a tarefa anterior, os alunos receberam da professora a folha com a Tarefa 2, que os informou que a questão 1 (ver Figura 7) deveria ser realizada em 20 minutos, havendo depois um momento de discussão colectivo[9]. Muitos alunos chegaram atrasados e só passados 15 minutos do início da aula os grupos estavam a trabalhar. A discussão da primeira questão só se iniciou passados 35 minutos depois do início da aula.

Tarefa 2

Responde às questões seguintes e explica o teu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

1. **A Sara fez uma sequência de desenhos utilizando pequenos quadrados brancos e cinzentos, dispostos como se observa na figura seguinte:**



1.1. **Quantos quadrados brancos tem a figura número 5? E quadrados cinzentos?**

1.2. **Quantos quadrados tem a figura número 10?**

1.3. **Escreve uma expressão algébrica que permita determinar o número de quadrados cinzentos de qualquer uma das figuras desta sequência.**

1.4. **Escreve uma expressão algébrica que permita determinar o número total de quadrados de qualquer uma das figuras desta sequência.**

Figura 7. Tarefa 2, Questão 1.

[9] Assistiu também à aula a professora Sílvia Machado, da DGIDC, que também acompanhou os professores do 2.º e 3.º ciclos das turmas piloto.

Logo que iniciaram a leitura da questão 1, vários alunos fizeram a analogia entre esta tarefa e a tarefa anterior "Voo em V", dizendo que se tratava da mesma coisa, "É como a dos pontinhos", disse uma aluna, "Esta é do tipo do voo", disse o Ricardo, lembrando-se inclusivamente do título da tarefa que já tinham realizado. Na verdade, aparentemente pelo simples facto de terem já passado por uma experiência com o mesmo tipo de solicitação, esta questão não apenas foi sentida pelos alunos como mais 'fácil' em relação à anterior, como entenderam mais depressa o que era pedido e souberam como proceder para responder, tendo-o feito com maior rapidez. Num grupo que resolveu a questão em cerca de 15 minutos, tendo sido por ele confrontado pelo professor que o acompanhava com a pergunta "Qual é que acham mais fácil, esta ou a do voo", todos os alunos responderam imediatamente, "Esta". Por iniciativa própria, a Maria, ainda acrescentou: "Mas também é porque já tínhamos feito a outra".

Para determinarem a quantidade de quadrados da 5ª figura da sequência (questão 1.1), os alunos tendencialmente recorreram ao desenho, esboçando a figura para efectuarem as contagens, como aconteceu no grupo de que se apresenta o registo na Figura 8.

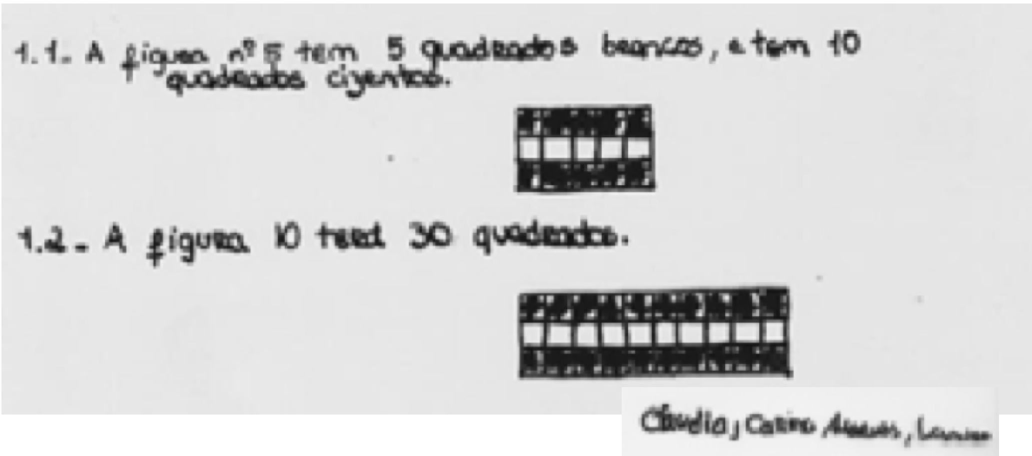


Figura 8. Questões 1.1 e 1.2, registo do grupo da Cláudia, Carina, Marcos e Lamiro).

Este grupo recorreu de novo ao desenho da figura para responder à questão 1.2 – relativa à 10ª figura da sequência – o que aconteceu em vários outros grupos, embora, nesta questão, já tenha havido alunos que usaram uma organização em 'tabela'. Veja-se o exemplo que se apresenta a seguir na Figura 9, onde consta o registo completo de um outro grupo para a questão 1.

Repare-se que este grupo recorreu apenas ao desenho na primeira questão (1.1) e na resposta que dá refere que a figura tem 5 quadrados brancos e que "o cinzento tem o <u>dobro</u> – 10" (sublinhado nosso). "O cinzento", aparentemente, refere-se ao conjunto dos quadrados 'pintados' e o recurso à expressão "dobro", exprimindo a relação entre número de quadrados cinzentos e o número de quadrados brancos, sugere também aqui a influência da figura (embora se trate de números pequenos). Para além disso, fornece já elementos para a identificação de aspectos da regularidade em jogo (eventualmente, neste momento ainda implícitos nos alunos). Na questão 1.2, este grupo já não recorreu ao desenho, embora tenha percorrido todos os passos intermédios para responder à pergunta, organizando os resultados obtidos em jeito de tabela, fornecendo toda a informação parcelar.

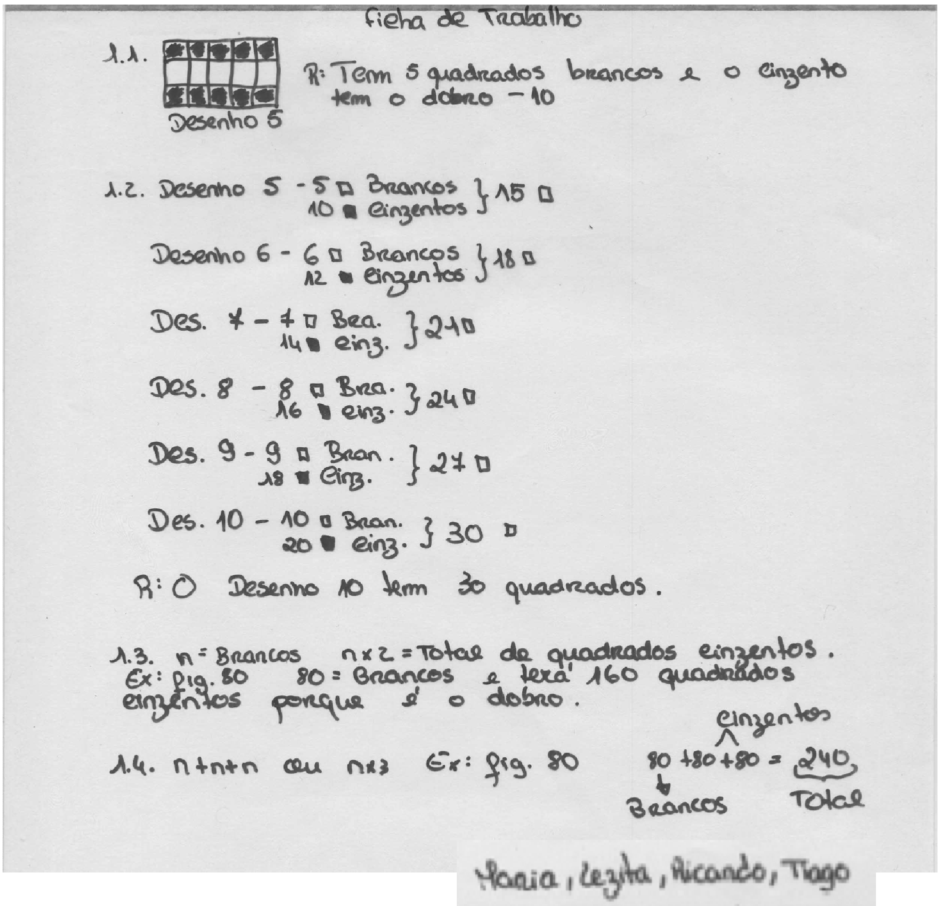


Figura 9. Questão 1, registo completo do grupo da Maria, Ricardo, Lezita e Tiago.

No registo da Figura 9 vêem-se as respostas às questões 1.3 e 1.4, com justificação cuidada e detalhada e com exemplos – embora não seja pedida no enunciado – que os outros grupos não fizeram (este grupo apresenta também alguma 'manipulação' algébrica quando na questão 1.4 escreve “n+n+n ou n×3”). Em todos os casos, no entanto, os grupos escreveram expressões algébricas adequadas ao que era solicitado, tendencialmente do tipo:

N x 1 — quadrados brancos

N x 2 — quadrados cinzentos

N x 3 — total de quadrados

Como referimos a propósito da Figura 5, realizada por uma aluna para explicar o seu procedimento para encontrar a expressão algébrica solicitada na questão 1.6 da tarefa 1, as expressões algébricas escritas pelos alunos estão associadas à forma como percepcionam o desenho dos termos da sequência. Também nas respostas às questões 1.3 e 1.4 da tarefa 2, com a mesma solicitação, as expressões escolhidas traduzem essa percepção: com “n+n+n” ou “nx3” os alunos mostram que ‘vêem’, em cada figura, as três linhas que a constituem, todas com o mesmo número de quadrados.

Em síntese e a concluir

O trabalho que os alunos desenvolveram com as tarefas propostas e o que, nesse trabalho, manifestaram oralmente e por escrito, indica que estes, na sua generalidade, desenvolveram a compreensão da ideia de sequência matemática que era pretendida bem como da ideia de regularidade (associada a uma sequência).

Dado um termo de uma sequência (pressuposta a regularidade que a define), os alunos compreenderam com facilidade que o termo que se lhe segue pode ser determinado à custa do termo dado, recorrendo a um procedimento que inferem analisando os termos sucessivos da sequência que são dados no enunciado. Também perceberam que este procedimento serve para calcular qualquer termo a partir do anterior (não foram abordadas, nesta fase inicial do trabalho, situações recíprocas, ou seja, que implicassem raciocinar em ‘sentido inverso’ – conhecido um termo de uma sequência, determinar o que o antecede – que, porventura, levantariam dificuldades maiores).

Nos momentos iniciais do trabalho com as sequências propostas (cada termo era dado por uma figura), os alunos começaram por recorrer a desenhos onde efectuam contagens, mas em alguns casos deixam de o fazer relativamente cedo e usam apenas números e os cálculos necessários, mantendo no entanto a necessidade de ‘prolongar’ a sequência até ao termo desejado. Num caso e noutro há aqui já, ainda que implicitamente, o reconhecimento da 'lei de formação' – ou da regularidade – que define sequência.

Se a determinação de um termo, conhecida a sua ordem – ainda numa fase em que a 'lei de formação' não está explicitada – não levantou dificuldades de maior, o mesmo não aconteceu com a solicitação 'recíproca': determinar a ordem de um certo termo dado. A isto não será alheio o raciocínio 'inverso' que a solicitação exigia – da ordem para o termo – nas as dificuldades com a terminologia utilizada e conceitos associados – termo e ordem (do termo). Acresce ainda a natureza (mais) abstracta de 'ordem de um termo', e o facto de se tratar da fase inicial da aprendizagem das *Sequências e regularidades*, eventualmente com pouco ou nenhum trabalho desta natureza em anos anteriores.

As figuras que nas tarefas 'concretizavam' os termos das sequências constituíram um apoio intuitivo importante, antes de mais para a determinação de termos desconhecidos, mas também como 'inspiração' para a descoberta e explicitação da lei de formação subjacente à sequência, quer na sua formulação na linguagem natural, quer na sua formulação algébrica.

Certos aspectos do enunciado das tarefas constituíram, para alguns alunos, um constrangimento à compreensão do que era proposto e do que se pretendia que realizassem. Referimo-nos, por exemplo, a aspectos de redacção e à extensão do texto introdutório, particularmente na primeira tarefa, ao uso de expressões pouco familiares aos alunos, à formulação nem sempre directa das questões para responder, a algumas inconsistências nas designações usadas (por exemplo, na segunda tarefa, "desenho" e "figura" para designar os termos da sequência). Nos anexos 1 e 2 estão reformulações das tarefas utilizadas, elaboradas com base na análise das reacções dos alunos e do trabalho que fizeram com elas.

De um modo geral os alunos manifestaram dificuldades de expressão e comunicação oral e escrita e incapacidade de manter a concentração no trabalho de forma continuada. Apesar disso, da primeira para a segunda tarefa, foi muito visível o progresso dos alunos, quer na apropriação das situações propostas, compreendendo mais facilmente o que era pedido e como proceder para responder, quer ainda na maior rapidez com que deram e registaram as respostas, muito especialmente na descoberta da lei de formação da sequência e de uma expressão algébrica que a traduzisse. Foi também notório que os alunos se foram progressivamente libertando da necessidade de desenhar, recorrendo preferencialmente a números e à sua organização em forma de tabela.

O acompanhamento dos grupos de alunos, pela professora, durante a realização do trabalho autónomo, e a discussão colectiva na turma das suas produções, foram momentos importantes, não apenas para o esclarecimento de dúvidas dos alunos, mas também para recolha de informação sobre as suas dificuldades e as estratégias que usaram tendo em vista o desenvolvimento do estudo do tópico.

Os alunos desta turma que progrediram estão agora no 9.º ano, sempre acompanhados pela mesma professora em Matemática, que se manteve no processo de experimentação do programa. Os alunos tiveram uma evolução positiva significativa na sua forma de estar em aula, quer nos momentos de trabalho em grupo, quer nos momentos de discussão colectiva, em aspectos de organização, na forma como interagem e intervêm, na sua autonomia e capacidade de iniciativa. As sequências e regularidades voltaram a ser trabalhadas no 8.º e no 9.º anos e, num e noutro ano, em todas as tarefas de avaliação realizadas, este é o tópico onde continuam a ter mais sucesso.

Referências

Kapput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133 – 155). Mahwah, NJ: Erlbaum. Acedido em 24 de Março, 2011, de www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA.../Kaput_99AlgUnd.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante 16*(1), 5 – 26.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J., Matos, A., & Branco, N. (2008). *Sequências e funções: materiais de apoio ao professor. Tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano*. Lisboa: DGIDC-ME.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Simões, E. Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC-ME.

Anexo 1 – Tarefa 1

(Reformulada após a análise do trabalho realizado em aula)

Tarefa 1 – Voo em "V"

1. Algumas espécies de aves migratórias voam em bando numa organização em forma de "V", tal como mostram as fotografias da figura 1. Este facto tem interessado diversas equipas de cientistas que têm investigado se esta organização é usada para facilitar o voo, procurando compreender as vantagens que podem surgir da aplicação deste conhecimento da natureza à aviação.

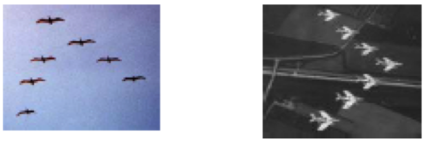


Figura 1

Na sequência da figura 2, cada esquema numerado representa um bando de aves a voar em "V", e cada ponto representa uma das aves do bando. De esquema para esquema, o número de aves vai aumentando sempre no mesmo valor, e os primeiros quatro termos da sequência são:

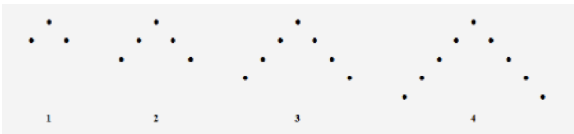


Figura 2

Responde agora às questões seguintes e explica o teu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

1.1. Quantos pontos tem o esquema associado ao 5.º termo da sequência? Descreve de que modo esse esquema se pode construir.

Ou apenas: Quantos pontos tem o esquema associado ao 5.º termo da sequência?

1.2. Quantos pontos tem o esquema associado ao 100.º termo?

1.3. Existe na sequência algum esquema com 86 pontos? Se existir, qual é a ordem do termo que lhe corresponde?

1.4. Existe na sequência algum esquema com 135 pontos? Se existir, qual é a ordem do termo que lhe corresponde?

Ou, agrupando os dois pontos anteriores: Existe na sequência algum esquema com 86 pontos? E com 135? Se existirem, qual é a ordem dos termos que lhes correspondem?

1.5. Descreve uma regra que permita determinar número de pontos de qualquer esquema desta sequência.

1.6. Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra que descreveste na questão anterior.

(29.10.2008)

Anexo 2 – Tarefa 2

(Reformulada após a análise do trabalho realizado em aula)

Tarefa 2 – Os desenhos da Sara

A Sara fez no seu caderno uma sequência de desenhos utilizando pequenos quadrados brancos e cinzentos dispostos como podes ver na figura 1, onde estão os quatro primeiros desenhos dessa sequência:

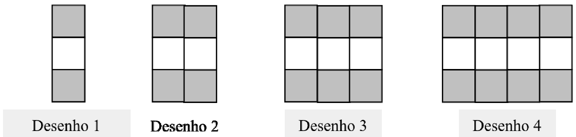


Figura 1

1. Observa cada um dos desenhos da figura 1 e responde às questões seguintes, apresentando o teu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

   1.1. Na sequência que a Sara imaginou, quantos quadrados brancos tem o desenho número 5, se for construído da mesma maneira dos anteriores? E quantos quadrados cinzentos?

   1.2. Ainda na sequência de desenhos da Sara, quantos quadrados tem ao todo o desenho número 10?

   1.3. Escreve uma expressão algébrica que permita calcular a quantidade de quadrados cinzentos de qualquer um dos desenhos da sequência da Sara.

   1.4. Escreve agora uma expressão algébrica que permita calcular a quantidade total de quadrados de qualquer um dos desenhos desta sequência.

(8.11.2009)

Nota: A tarefa 2 consta ainda de uma segunda questão, mas apresenta-se aqui apenas a reformulação da que foi a que foi usada no texto atrás apresentado.

Índice de Autores

Adelaide Filipe, 149
Ana Barbosa, 327
Ana Patrícia Gafanhoto, 124
António Domingos, 53, 107, 124
António Guerreiro, 365

Célia Mestre, 195
Carlos Miguel Ribeiro, 406
Cláudia Santos, 149

Daniela Nogueira, 260

Floriano Viseu, 260

Hélia Oliveira, 195
Helena Rocha, 56
Henrique Guimarães, 442

Isabel Cabrita, 87
Isabel Vale, 323
Isabel Velez, 177

João Pedro da Ponte, 71, 173, 177, 219, 239, 280, 346, 385
Joana Brocardo, 53, 71
Joana Mata Pereira, 346
José Duarte, 71

Laura Bandarra, 304
Leonor Santos, 422
Luísa Vale, 422

Mário Ceia, 149
Maria Helena Martinho, 173
Maria Luísa Almeida, 87
Maria Teresa Grossmann, 280
Marisa Quaresma, 219
Marta Molina, 27
Miguel Silva, 107

Nélia Amado, 239
Neusa Branco, 385

Paula Teixeira, 442

Rosa Antónia Tomás Ferreira, 323, 422

Sandra Nobre, 239

Teresa Pimentel, 1