

# Ôndulas e Análise de Resolução Múltipla

Maria Joana Soares\*

*Departamento de Matemática, Universidade do Minho*  
*email: jsoares@math.uminho.pt*

## Resumo

A *Teoria das Ôndulas* pode ser vista como uma síntese de ideias e técnicas que foram desenvolvidas independentemente em diferentes áreas de investigação, tais como a matemática pura, a física, a engenharia electrotécnica e as ciências de computação.

O principal objectivo deste artigo é apresentar os resultados básicos dessa teoria. Em particular, será dado especial relevo à estrutura de *análise de resolução múltipla* e às ligações com bancos de filtros, tentando pôr em evidência as vantagens da abordagem da teoria das ôndulas em processamento de sinal.

## 1. Introdução

Como teoria matemática coerente, a chamada *Teoria das Ôndulas* desenvolveu-se a partir de meados da década de 80, embora se lhe possam reconhecer raízes que vão tão longe quanto o início de século. (Em 1910, Alfred Haar introduz a famosa base que tem o seu nome e que é o protótipo de uma base ortonormada constituída por este tipo de funções.)

No final dos anos 70, Jean Morlet, geofísico francês que trabalhava em prospecção de petróleo para a companhia *Elf Aquitaine*, teve a ideia de usar funções obtidas de uma determinada função base por meio de *dilatações* (ou *contrações*) e *translações*, em alternativa às funções usadas na transformada de Fourier em tempo curto (que são *translações* e *modulações* de uma função bem localizada), a qual se revelava ineficiente na análise dos sinais que pretendia estudar. Os bons resultados numéricos obtidos por Morlet levaram o eminente físico teórico Alex Grossmann a interessar-se por estas funções. Grossman, com uma larga experiência em mecânica quântica, reconheceu na transformada de Morlet semelhanças com o formalismo de estados coerentes utilizado nessa disciplina. Da colaboração entre Grossmann e Morlet surge, em 1984, um artigo intitulado “Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape”, no qual são estabelecidos os fundamentos teóricos da chamada *transformada integral com ôndula* e onde, pela primeira vez é utilizada a palavra *wavelet*.

Em 1985, o matemático francês Yves Meyer, ao tomar conhecimento da teoria de Grossmann e Morlet, consegue de imediato aperceber-se que o principal resultado obtido por esses autores é, no fundo, uma redescoberta de um resultado clássico de análise harmónica, introduzido por A. Calderón nos anos 60, e conhecido por *identidade de Calderón*. Entusiasmado com perspectiva de encontrar novas aplicações para a sua área de interesse – a análise harmónica – inicia uma colaboração muito proveitosa com Grossman e Morlet. Em pouco tempo, apresenta uma construção de uma base ortonormada de ôndulas com boas propriedades de localização quer no tempo, quer na frequência.<sup>1 2</sup>

A ligação entre as ôndulas e a área de processamento de sinal fica a dever-se, em grande parte, à perspicácia do jovem estudante de doutoramento Stéphane Mallat. Ao falar, casualmente, com um seu ex-colega, agora aluno de Meyer, sobre os resultados por ele obtidos, Mallat sente que existem muitas características comuns entre a expansão em bases de ôndulas e, por exemplo, o esquema de pirâmide Laplaciana introduzido Burt e Adelson, que ele tão bem conhece da sua área de investigação, a análise de imagem. Expõe, então, as suas ideias a Meyer e os dois, trabalhando exaustivamente durante vários dias, escrevem em conjunto um artigo<sup>3</sup> no qual é introduzido um conceito matemático unificador importante – o conceito de *análise de resolução múltipla*. Este conceito vem clarificar a construção das bases de ôndulas anteriormente obtidas e é determinante para a

---

\*Com o apoio do CMAT- Centro de Matemática da Universidade do Minho

<sup>1</sup>Curiosamente, tal construção surge com a tentativa de demonstração de que tal base não poderia existir.

<sup>2</sup>Mais tarde, vem a constatar-se que uma primeira construção de uma base ortonormada de ôndulas com características semelhantes tinha já sido feita, anos antes, por J. Strömberg, ele próprio um especialista em análise harmónica; no entanto, a construção de Strömberg passou totalmente despercebida, na altura.

<sup>3</sup>Este artigo virá a ser publicado, por insistência de Y. Meyer, apenas sob a autoria de S. Mallat.

construção de novas bases com propriedades importantes, de entre as quais se destacam as descobertas por Ingrid Daubechies e que são hoje frequentemente utilizadas em aplicações.

A análise de resolução múltipla conduz também a um algoritmo simples e recursivo (aplicação sucessiva de um esquema de filtragem de duas bandas) para a determinação dos coeficientes da expansão de um sinal em série de ôndulas.

A *análise de ôndulas* aparece, portanto, como uma estrutura unificadora de conceitos e técnicas que se desenvolveram de forma independente em diferentes ramos da ciência, fornecendo uma linguagem comum que permite facilitar o diálogo entre cientistas de formação muito diversa – matemáticos puros, físicos teóricos, especialistas em processamento de sinal e de imagem, etc. Explica-se, assim, o grande entusiasmo à volta deste tema e a correspondente explosão de novos resultados, quer teóricos quer de aplicações.

O rápido desenvolvimento deste assunto, com constantes modificações e generalizações, torna impossível dar uma visão global desta teoria e de todos os seus campos actuais de aplicação. Torna-se, inclusivamente, difícil dar uma definição de *ôndula* que não corra o risco de ser ou demasiado vaga para ter interesse em certas aplicações ou demasiado restritiva noutras circunstâncias.

Neste texto, concentrar-nos-emos apenas no estudo das chamadas ôndulas *ortogonais*, em ligação com a estrutura de análise de resolução múltipla, tentando também evidenciar as ligações das ôndulas com os bancos de filtros. Faremos uma pequena incursão no estudo da *transformada integral com ôndula*, essencialmente para explicar o interesse das ôndulas como técnica de localização tempo-frequência.

## 2. Notações e resultados preliminares

No que se segue,  $L^2(\mathbb{R})$  denota o espaço das funções mensuráveis  $f$ , definidas na recta real  $\mathbb{R}$ , e que são de quadrado integrável, isto é, que satisfazem  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ , com produto interno  $\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt$  e norma associada  $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$ .

Um dos objectivos fundamentais do processamento de um sinal consiste na extracção de informação relevante sobre esse sinal, através da sua transformação. Por exemplo, no caso de um sinal analógico de energia finita (ou seja, em linguagem matemática, de uma função  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ), uma ferramenta importante para tal objectivo é a transformada de Fourier, definida por

$$\widehat{f}(\xi) = \{\mathcal{F}f\}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt = \langle f, e^{i\xi t} \rangle \quad (1)$$

a qual nos dá uma descrição do comportamento do sinal em frequência (espectro do sinal). Como a fórmula (1) mostra, para estudar o comportamento espectral de um sinal usando a sua transformada de Fourier, é necessário um conhecimento total do sinal no tempo. Além disso, se um sinal é alterado ligeiramente numa vizinhança de um determinado instante, todo o seu espectro vem alterado. Assim, em muitas aplicações, tais como análise de sinais não-estacionários, isto é, sinais cujas propriedades evoluem de forma significativa com o tempo, ou processamento de sinal em tempo real, a simples utilização da transformada de Fourier não é adequada.

Um processo clássico de obter localização de frequências no tempo é utilizar a chamada transformada de Fourier em tempo curto. Neste caso, é escolhida uma função *janela*  $g$  (isto é, uma função bem localizada no tempo e na frequência) que, ao ser transladada e multiplicada pela função  $f$  selecciona “partes” desta função, determinado-se depois a transformada de Fourier de cada uma dessas partes. A transformada de Fourier em tempo curto transforma, assim, a função  $f$  numa função bi-dimensional definida do seguinte modo

$$\{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t-\tau)}e^{-i\xi t} dt. \quad (2)$$

Dada uma função janela  $g$ , é usual definir o seu centro  $t^*$  por

$$t^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t|g(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt},$$

tomando-se como medida de dispersão em torno do centro a quantidade  $\Delta g$  (chamada raio de  $g$ ), definida por

$$\Delta g = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-t^*)^2 |g(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt} \right\}^{1/2}.$$

De modo análogo se definem o centro  $\xi^*$  e raio  $\Delta\hat{g}$  da função transformada de Fourier de  $g$ .<sup>4</sup>

Considere-se a seguinte família de funções  $g_{\tau,\xi}$ , definidas através de modulações e translações da função  $g$ ,

$$g_{\tau,\xi}(t) := e^{i\xi t} g(t - \tau), \quad \xi, \tau \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Então,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g_{\tau,\xi}(t)} dt \\ &= \langle f, g_{\tau,\xi} \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \widehat{g_{\tau,\xi}} \rangle. \quad (5)$$

(Esta última igualdade, atendendo à bem conhecida fórmula de Parseval). Dada a função janela  $g$ , facilmente se verifica que a função  $g_{\tau,\xi}$  tem o seu centro em  $t^* + \tau$  e tem o mesmo raio que  $g$  e que o centro de  $\widehat{g_{\tau,\xi}}$  é  $\xi^* + \xi$  e o seu raio é o de  $\hat{g}$ , isto é, é dado por  $\Delta\hat{g}$ . Se escolhermos uma janela  $g$  tal que  $t^* = \xi^* = 0^5$ , as fórmulas (4) e (5) mostram-nos que  $\{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \xi)$  nos dá informação à cerca de  $f$  e  $\hat{f}$  essencialmente na seguinte região do plano tempo-frequência (conhecida por janela de Heisenberg)

$$J_{\tau,\xi} = [\tau - \Delta_g, \tau + \Delta_g] \times [\xi - \Delta_{\hat{g}}, \xi + \Delta_{\hat{g}}],$$

isto é, informação sobre  $f$  próximo do instante  $\tau$  e sobre  $\hat{f}$  próximo da frequência  $\xi$ . Pode provar-se facilmente que, para toda a função  $g$ ,

$$\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geq 2, \quad (6)$$

ou seja, que a área da janela é limitada inferiormente. A desigualdade anterior constitui o bem conhecido *princípio de incerteza de Heisenberg*, o qual estabelece que localizações precisas no tempo e na frequência são mutuamente exclusivas.<sup>6</sup>

Note-se que, uma vez escolhida a função  $g$ , a altura e largura das janelas tempo-frequência  $J_{\tau,\xi}$  não variam com o seu centro de localização, isto é, não variam com  $\tau$  e com  $\xi$ . Assim, a resolução tempo-frequência é fixa em todo o plano tempo-frequência; ver Figura 1.

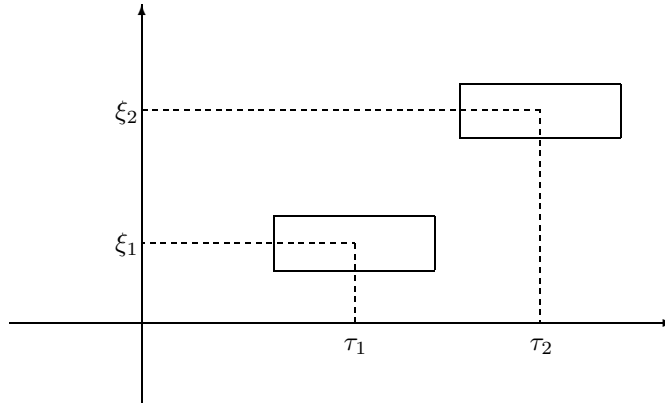


Figura 1. Janelas tempo-frequência

Se tivermos um sinal composto de componentes longas quase estacionárias associadas a pequenas variações bruscas, então para o primeiro tipo de componentes seria adequado o uso de janelas largas (fraca resolução no tempo e boa localização na frequência), enquanto para analisar convenientemente as variações bruscas seriam necessárias janelas com boa localização no tempo e conseqüente fraca resolução na frequência. A transformada de Fourier em tempo curto não é, assim, apropriada para o estudo deste tipo de sinais.

<sup>4</sup>Assumimos aqui que a função decai suficientemente depressa, quer no tempo, quer na frequência, de modo a garantir que qualquer das quantidades indicada é finita. Em particular, a exigência de que  $\Delta_g$  seja finito requer que, em média,  $g(t)$  decaia mais depressa que  $|t|^{-3/2}$  quando  $|t| \rightarrow \infty$ ; para que  $\Delta\hat{g}$  seja finito  $g$  deve ser tal que a sua derivada  $g'$  também tenha energia finita.

<sup>5</sup>O que pode ser sempre conseguido por translação e modulação convenientes.

<sup>6</sup>A razão da escolha usual de uma Gaussiana para função janela  $g$  reside no facto de apenas com este tipo de funções se poder atingir a igualdade em (6).

### 3. Transformada contínua com ôndula

Acabámos de ver que a rigidez das janelas tempo-frequência associadas com a transformada de Fourier em tempo curto constitui uma limitação dessa transformada. A transformada contínua com ôndula, que iremos agora descrever, permite ultrapassar essa dificuldade, originando uma análise com janelas *flexíveis* cuja largura e altura variam no plano tempo-frequência.

Como vimos, no caso da transformada de Fourier em tempo curto, a análise é feita determinando-se o produto interno da função  $f$  com uma família de funções  $g_{\tau,\xi}$ , obtidas por *translação* e *modulação* de uma função fixa  $g$ ; ver (3) – (4).

A ideia da transformada contínua com ôndula é, também, calcular o produto interno de  $f$  com uma família de funções  $\psi_{a,\tau}$  dependentes de dois parâmetros. Neste caso, no entanto, as funções  $\psi_{a,\tau}$  são obtidas de uma função básica  $\psi$  (chamada ôndula mãe) por *dilatações* ou *contrações* – isto é, mudanças de *escala* – controladas pelo parâmetro  $a$  e *translações*, controladas pelo parâmetro  $\tau$ . Mais precisamente, temos

$$\psi_{a,\tau} := |a|^{-1/2} \psi \left( \frac{t - \tau}{a} \right), \quad a, \tau \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (7)$$

(Nota: O factor  $|a|^{-1/2}$  é introduzido para que as diversas funções tenham todas a mesma energia.)

A transformada contínua com ôndula  $\psi$  é, então, definida por

$$\begin{aligned} \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \tau) &:= \langle f, \psi_{a,\tau} \rangle \\ &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi \left( \frac{t - \tau}{a} \right)} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

**Nota:** No que se segue, consideramos apenas ôndulas  $\psi$  reais e parâmetros de escala  $a > 0$ .

As propriedades da transformada contínua com ôndula dependem, naturalmente, das propriedades da ôndula mãe  $\psi$  (também chamada ôndula analisadora). As condições usuais que se exigem para uma “boa mãe”  $\psi$  são que  $\psi$  e  $\widehat{\psi}$  sejam bem localizadas, devendo  $\psi$ , além disso, satisfazer a chamada condição de admissibilidade<sup>7</sup>

$$C_\psi := \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty. \quad (9)$$

Na prática, para ôndulas que satisfaçam razoáveis condições de decaimento, exigir que  $\psi$  satisfaça a condição de admissibilidade (9) é equivalente a exigir que  $\widehat{\psi}(0) = 0$ , ou seja, que  $\int \psi(t) dt = 0$ ; veja, e.g.[10]. Isto significa, portanto, que  $\psi$  deve, de algum modo, oscilar, isto é, comportar-se como uma *onda*. Esta propriedade, juntamente com ao facto de  $\psi$  decair rapidamente, justifica o uso da palavra *ondelette* (em francês) ou *wavelet* (em inglês) para designar estas funções.

#### Localização tempo-escala

Usando novamente a identidade de Parseval, vemos que

$$\begin{aligned} \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \tau) &= \langle f, \psi_{a,\tau} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{\psi_{a,\tau}} \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

Se  $\psi$  for uma função janela com centro  $t^*$  e raio  $\Delta_\psi$  e tal que  $\widehat{\psi}$  tenha centro  $\xi^*$  e raio  $\Delta_{\widehat{\psi}}$ , então facilmente se verifica que a função  $\psi_{a,\tau}$  tem centro  $\tau + a t^*$  e raio  $a \Delta_\psi$ , e que a função  $\widehat{\psi_{a,\tau}}$  tem centro em  $\frac{1}{a} \xi^*$  e raio  $\frac{1}{a} \Delta_{\widehat{\psi}}$ . Escolhendo  $\psi$  por forma que  $t^* = 0$  e  $\xi^* = 1$ , e tendo em conta as fórmulas (8) e (10), podemos concluir que a transformada contínua com ôndula  $\psi$  nos dá informação local sobre  $f$  e  $\widehat{f}$  na janela

$$J_{\tau,a} = [\tau - a\Delta_\psi, \tau + a\Delta_\psi] \times \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\widehat{\psi}}, \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\widehat{\psi}} \right].$$

<sup>7</sup>A importância desta condição será clarificada posteriormente.

Mais precisamente,  $\{\mathcal{W}_\psi f\}(\tau, a)$  dá informação sobre  $f(t)$  para  $t$  próximo do instante  $\tau$ , com uma precisão  $a\Delta_\psi$  e informação sobre  $\hat{f}(\xi)$  para valores próximos da frequência  $\xi = \frac{1}{a}$  com precisão  $\frac{1}{a}\Delta_{\hat{\psi}}$ .

Note-se que, embora a área das janelas seja uma constante dada por  $4\Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}}$  as suas dimensões mudam de acordo com o valor da escala  $a$ . As janelas alargam para valores de  $a$  grandes (escala grosseira – baixas frequências) e estreitam para valores de  $a$  pequenos (escala fina – frequências altas); ver Figura 2.

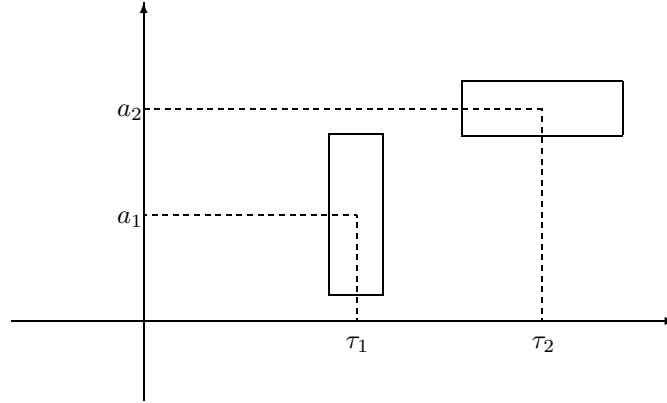


Figura 2. Janelas tempo-frequência com  $0 < a_1 < a_2$ .

### Conservação de energia e inversão

Assumindo que  $\psi$  é admissível, isto é, satisfaz a condição (9), pode provar-se que

$$\frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \tau)|^2 \frac{da}{a^2} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (11)$$

A equação anterior mostra que a correspondência  $f \rightarrow \{\mathcal{W}_\psi f\}$  é uma isometria (a menos de uma constante). Além disso, é invertível no seu contradomínio, sendo a função  $f$  completamente caracterizada pelos valores de  $\{\mathcal{W}_\psi f\}(\tau, a)$ , podendo ser “recuperada” pela fórmula

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \tau) \psi_{a,\tau} \frac{da}{a^2} d\tau; \quad (12)$$

veja, e.g. [10].<sup>8</sup> A fórmula (12) pode ser interpretada como:

- uma fórmula de reconstrução de  $f$  sabida a sua transformada contínua com ôndula  $\{\mathcal{W}_\psi f\}(\tau, a)$ , para todos os valores de  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ .
- uma fórmula de decomposição de  $f$  como uma “sobreposição” das funções  $\psi_{a,\tau}$  (sendo os coeficientes dessa sobreposição os valores da transformada contínua).

### 4. Transformada discreta e ôndulas ortogonais

A transformada contínua com ôndula é altamente redundante (basta notar que uma função de uma variável é transformada numa função de duas variáveis). Na prática, para obter algoritmos eficientes para determinar a transformada de uma função  $f$  e reconstruir  $f$  à custa dos valores da transformada, devemos restringir os valores dos parâmetros de escala  $a$  e de translação  $\tau$  a valores discretos, isto é, calcular  $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \tau)$  apenas numa rede discreta do plano tempo-escala. Uma escolha usual para essa discretização é a chamada *rede diádica*, definida por

$$a = 2^{-j}, \quad \tau = k2^{-j}; \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

<sup>8</sup>Resultados análogos aos anteriores podem também ser obtidos para ôndulas complexas, mas são então necessárias escalas  $a$  negativas.

Nesse caso, temos então a seguinte família de funções

$$\psi_{jk} := 2^{j/2} \psi(2^j t - k); \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Naturalmente, pretendemos que, à semelhança do que se passa no caso contínuo, seja possível:

- Reconstruir  $f$  a partir do conhecimento dos valores

$$c_{jk} = \{\mathcal{W}_\psi f\}(2^{-j}, 2^{-j}k) = \langle f, \psi_{jk} \rangle.$$

- Expandir  $f$  como sobreposição das funções  $\psi_{jk}$ , ou seja, encontrar coeficientes  $d_{jk}$  tais que

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{jk} \psi_{jk}.$$

A decomposição e reconstrução deverão, além disso, ser processos estáveis, isto é, pouco sensíveis a pequenas perturbações nos coeficientes, para que possam ter algum interesse prático. A resposta mais geral a estes dois problemas pode ser encontrada na teoria dos *referenciais de ôndulas* (em inglês, *wavlet frames*); veja, e.g. as referências [9], [10], [11] e [13], nas quais são discutidas as condições sobre  $\psi$  e sobre outras possíveis escolhas de discretização dos parâmetros  $a$  e  $\tau$  para garantir uma resposta afirmativa às duas questões acima.

Neste artigo, restringir-nos-emos ao caso das chamadas *ôndulas ortogonais*, isto é, ao caso em que  $\psi$  é tal que as funções  $\psi_{jk}$  definidas por (14) formam uma base ortonormada de  $L^2(\mathbb{R})$ . Nesse caso, tem-se, naturalmente,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk} \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \{\mathcal{W}_\psi f\}(2^{-j}, 2^{-j}k) \psi_{jk}, \end{aligned} \quad (15)$$

ou seja, tal como no caso contínuo, uma única fórmula expressa simultaneamente a decomposição e a reconstrução de  $f$ .

#### Exemplo 4.1 Ôndula de Haar

Historicamente, a primeira base ortonormada de ôndulas construída é a bem conhecida base de Haar, introduzida muito antes do aparecimento do conceito de ôndula [12]. Neste caso, a ôndula mãe  $\psi^H$  é a função

$$\psi^H := \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)},$$

onde  $\chi_{[a,b)}$  designa a função característica do intervalo  $[a, b)$ . Assim,

$$\psi^H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & \text{outros valores de } t. \end{cases}$$

A base de Haar não é uma base muito apropriada para a representação de funções. Basta notar que os elementos desta base não são sequer funções contínuas. Dada uma função  $f$  razoavelmente suave, a sua expansão na base de Haar converge muito lentamente. Além disso, embora a função  $\psi^H$  tenha uma ótima localização no tempo ( $\psi^H$  tem suporte compacto), a sua localização na frequência é muito fraca, pois  $|\widehat{\psi^H}(\xi)|$  decai apenas como  $|\xi|^{-1}$ .

#### Exemplo 4.2 Ôndula de Shannon

Outro exemplo de uma ôndula ortogonal, cujas propriedades de localização tempo-frequência são como que complementares da ôndula de Haar, é a chamada ôndula de Shannon  $\psi^S$  cuja transformada de Fourier é dada por:

$$\widehat{\psi^S}(\xi) := \begin{cases} -e^{-i\xi/2}, & \pi \leq |\xi| \leq 2\pi, \\ 0, & \text{outros valores de } \xi. \end{cases}$$

Esta ôndula tem boas propriedades de localização na frequência, mas fraca localização no tempo.

Na década de 80 foram construídas várias ôndulas ortogonais que têm simultaneamente as melhores características da base de Haar e da base de Shannon, isto é, que são bem localizadas no tempo e na frequência e sendo, além disso, funções suaves. Como exemplo, podemos citar as ôndulas descobertas por J. O. Strömberg [23], Y. Meyer [18], G. Battle [4] e P. G. Lemarié [14]. Estas primeiras construções de bases ortonormadas de ôndulas parecem um pouco milagrosas; o próprio Meyer afirma “*I found my wavelets by trial and error; there was no underlying concept*”. Com a introdução, por Mallat e Meyer, do conceito de *análise de resolução múltipla*, em finais de 1986, torna-se possível dar uma explicação de todas as construções de ôndulas ortogonais até aí encontradas. A análise de resolução múltipla fornece também uma ferramenta indispensável à construção de novas bases ortonormadas de ôndulas.

## 5. Análise de resolução múltipla

Apresentamos agora o conceito de análise de resolução múltipla de  $L^2(\mathbb{R})$  tal como foi introduzido por Mallat e Meyer; veja, e.g., [15], [16] e [18]. A ideia chave é considerar aproximações sucessivas para uma função  $f$ , as quais correspondem a diferentes *níveis de resolução*, e ter em conta o *detalhe* que é necessário adicionar para se passar de um determinado nível de resolução para o nível seguinte.

**Definição 5.1** *Uma análise de resolução múltipla (ARM)  $\{V_j, \phi\}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  consiste numa sequência  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de subespaços fechados de  $L^2(\mathbb{R})$  e numa função  $\phi$  associada, chamada **função escala**, satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$\text{ARM1} \quad V_j \subset V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{ARM2} \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

$$\text{ARM3} \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

$$\text{ARM4} \quad v(t) \in V_j \iff v(2t) \in V_{j+1}$$

$$\text{ARM5} \quad \{\phi(t - k) : k \in \mathbb{Z}\} \text{ é uma base ortonormada de } V_0.^9$$

Façamos algumas observações sobre esta definição.

- As propriedades **ARM2** e **ARM3** podem expressar-se em termos dos operadores  $P_j$  de projecção ortogonal nos espaços  $V_j$ , do seguinte modo: para toda a função  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , tem-se

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} P_j f = f.$$

- Uma consequência imediata das propriedades **ARM4** e **ARM5** é que

$$f(t) \in V_j \iff f(t - 2^{-j}k) \in V_j.$$

Por esta razão, os espaços  $V_j$  são chamados espaços invariantes por translação. Além disso, cada espaço  $V_j$  é uma versão de  $V_0$  numa escala diferente. A projecção  $P_j f$  pode, assim, ser considerada como uma aproximação de  $f$  na escala  $2^{-j}$ .

---

<sup>9</sup>Esta condição é geralmente enfraquecida, exigindo-se apenas que  $\{\phi(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  constitua uma base estável de  $V_0$ , isto é, que seja um sistema completo e tal que existam constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tais que

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k c_k \phi(t - k) \right\|^2 \leq B \sum_k |c_k|^2,$$

para todas as sequências  $(c_k) \in l^2(\mathbb{Z})$ . Nessas condições, é sempre possível “ortogonalizar”  $\phi$ , isto é, encontrar outra função escala  $\phi^\perp$  satisfazendo ARM5.

- Para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , as funções  $\phi_{jk}(t) := 2^{j/2}\phi(2^j t - k)$  formam uma base ortonormada de  $V_j$ . Como  $V_0 \subset V_1$ , qualquer função de  $V_0$  admite uma expansão em termos da base  $\{\phi_{1k} : k \in \mathbb{Z}\}$  de  $V_1$ . Em particular, a própria função escala  $\phi$  admitirá uma expansão da forma

$$\phi(t) = \sum_k h_k \phi_{1k}(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k) \quad (16)$$

onde os coeficientes  $h_k$  são dados por

$$h_k = \langle \phi, \phi_{1k} \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\phi(2t - k)dt. \quad (17)$$

(Por uma questão de simplicidade, e por ser este o caso de maior interesse prático, assumimos aqui que a função  $\phi$  é uma função real.)

A equação (16) é chamada equação de **dilatação**, de **refinamento** ou de **dupla escala** para a função escala  $\phi$  e a sequência  $\{h_k\}$  é chamada **filtro** da função escala  $\phi$ .

**Nota:** Na prática, por razões computacionais, será de desejar que a função escala  $\phi$  tenha uma certa suavidade e seja bem localizada. No que se segue, suporemos que a nossa ARM é  $r$ -regular ( $r \geq 0$ ), onde isto significa que a função escala  $\phi$  é tal que:

- $\phi \in C^{r-1}$
- a derivada de ordem  $r$  de  $\phi$  existe (q.t.p.)
- para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e para todo o  $\beta$  tal que  $0 \leq \beta \leq r$ , tem-se

$$\left| \frac{d^\beta \phi}{dt^\beta} \right| \leq C_n (1 + |t|)^{-n}$$

### Exemplo 5.3 ARM de Haar

Um exemplo muito simples de uma ARM (apenas 0-regular) é obtida tomando para  $V_j$  os espaços das funções de  $L^2(\mathbb{R})$  constantes nos intervalos da forma  $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e sendo  $\phi(t) = \chi_{[0,1]}$  a função característica do intervalo  $[0, 1)$ .  $\square$

Seja, então,  $\{(V_j), \phi\}$  uma determinada análise de resolução múltipla de  $L^2(\mathbb{R})$ , que suporemos  $r$ -regular. Como surge a base ortonormada de ôndulas associada a esta ARM?

Consideremos o espaço  $W_j$  que é o complemento ortogonal de  $V_j$  em  $V_{j+1}$ , ou seja, tal que  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  e  $V_j \perp W_j$ . Este espaço é usualmente designado por *espaço de detalhe*, por conter a informação que é necessário juntar aos elementos do espaço aproximador mais grosseiro  $V_j$  para obter elementos do espaço mais fino  $V_{j+1}$ . Atendendo a que os espaços  $V_j$  estão encaixados, podemos concluir de imediato que os espaços  $W_j$  são mutuamente ortogonais; das propriedades **ARM2** e **ARM3** segue-se que  $L^2(\mathbb{R})$  admite a seguinte decomposição em soma ortogonal

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}}^\perp W_j. \quad (18)$$

Assim, se dispusermos de uma base ortonormada para cada um dos espaços  $W_j$ , a coleção dessas bases formará uma base ortonormada de  $L^2(\mathbb{R})$ . Mas, como facilmente se verifica, estes espaços herdam, dos respectivos  $V_j$ , a propriedade de dilatação **ARM4**, ou seja,  $w(t) \in W_0 \iff w(2^j t) \in W_j$ . Isto significa que, se for possível encontrar uma função  $\psi \in W_0$  tal que  $\{\psi(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  seja uma base ortonormada de  $W_0$ , então,  $\{\psi_{jk} := 2^{j/2}\psi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  constituirá uma base ortonormada de  $W_j$ .

Por outras palavras, qualquer função  $\psi$  cujas translações inteiras formem uma base ortonormada do espaço  $W_0$  (complemento ortogonal de  $V_0$  em  $V_1$ ) será uma ôndula ortogonal.



O princípio básico de uma ARM é que tal função  $\psi$  existe sempre (com a mesma regularidade que  $\phi$ ) podendo ser construída explicitamente à custa da função escala  $\phi$ .<sup>10</sup>

Note-se que  $\psi \in V_1$ , pelo que terá de existir uma sequência de escalares  $g_k$  tais que

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi_{1k} = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2t - k). \quad (19)$$

À equação anterior chamamos, geralmente, **equação de ôndula**. A escolha de  $g_k = (-1)^k h_{1-k}$  assegura a ortonormalidade das funções  $\{\psi(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  e ainda a ortogonalidade de  $W_0$  a  $V_0$ . Mais precisamente, tem-se o seguinte teorema, cuja demonstração completa pode ser vista, e.g. em [10] ou [17].

**Teorema 5.1** *Dada uma ARM  $\{(V_j, \phi)\}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  e sendo  $\{h_k\}$  os coeficientes da equação de dupla escala de  $\phi$ , então a função  $\psi(t)$  definida por*

$$\psi(t) := \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} \phi(2t - k) \quad (20)$$

é uma ôndula ortogonal com a mesma regularidade que  $\phi$ .

Vamos apresentar as ideias básicas da demonstração deste teorema, aproveitando para estabelecer alguns resultados importantes para o que se segue. Uma ferramenta essencial na demonstração será a utilização da transformada de Fourier.

• Vejamos, primeiramente, que aspecto toma a equação de dilatação, no espaço das frequências. Tomando a transformada de Fourier de ambos os lados da equação (16), vem

$$\widehat{\phi}(\xi) = H(\xi/2) \widehat{\phi}(\xi/2), \quad (21)$$

onde  $H(\xi)$ , definida por

$$H(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}, \quad (22)$$

é uma função periódica de período  $2\pi$  e infinitamente derivável.<sup>11</sup> Esta função  $H(\xi)$  é (a menos do produto pelo factor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ) a função de transferência do filtro  $\{h_k\}$  e desempenha um papel crucial na teoria.

• É fácil de mostrar que a condição de ortonormalidade das funções  $\phi(t - k)$  se traduz na condição equivalente

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1. \quad (23)$$

Da igualdade anterior, separando os termos de índice par e índice ímpar, usando (21) e a periodicidade de  $H(\xi)$ , conclui-se que a função de transferência  $H(\xi)$  deverá satisfazer

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1. \quad (24)$$

• A equação de ôndula (19) expressa-se no domínio das frequências como

$$\widehat{\psi}(\xi) = G(\xi/2) \widehat{\phi}(\xi/2) \quad (25)$$

onde  $G(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_k e^{-ik\xi}$  é uma função periódica de período  $2\pi$  e de quadrado integrável. Seguindo um raciocínio análogo ao usado para a função escala, facilmente se verifica que a condição de ortonormalidade das funções  $\{\psi(t - k)\}$  se traduz como

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(\xi + 2k\pi) \right|^2 = 1, \quad (26)$$

<sup>10</sup>Por esta razão, a função escala é, por vezes, chamada ôndula pai.

<sup>11</sup>A regularidade de  $\phi$  implica o rápido decaimento dos coeficientes  $h_k$ , os quais são os coeficientes de Fourier de  $H(\xi)$ , o que, por sua vez, garante a infinita diferenciabilidade desta função.

ou ainda como

$$|G(\xi)|^2 + |G(\xi + \pi)|^2 = 1. \quad (27)$$

• Por outro lado,  $\psi$  será ortogonal a  $V_0$  se e só se  $\langle \psi(t), \phi(t-k) \rangle = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ , o que facilmente se verifica ser equivalente a exigir que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}(\xi + 2k\pi) \overline{\widehat{\phi}(\xi + 2k\pi)} = 0. \quad (28)$$

Substituindo (21) e (25) em (28), reagrupando os termos para  $k$  par e  $k$  ímpar e usando (23), concluímos que as funções  $G(\xi)$  e  $H(\xi)$  deverão satisfazer

$$G(\xi) \overline{H(\xi)} + G(\xi + \pi) \overline{H(\xi + \pi)} = 0. \quad (29)$$

Esta equação relaciona os coeficientes  $\{g_k\}$  que aparecem na equação de ôndula (19) com os que aparecem na equação de dilatação  $\{h_k\}$ . É óbvio que a equação anterior é satisfeita se escolhermos para  $G(\xi)$  uma função da forma

$$G(\xi) = \lambda(\xi) \overline{H(\xi + \pi)},$$

onde  $\lambda(\xi) = -\lambda(\xi + \pi)$  é uma função periódica de período  $2\pi$  tal que  $|\lambda(\xi)|^2 = 1$ . As condições de ortogonalidade não especificam  $G$  ou a ôndula  $\psi$  univocamente, havendo a liberdade de escolha da função  $2\pi$  periódica e de módulo unitário  $\lambda$ . A escolha usual é tomar  $\lambda(\xi) = -e^{-i\xi}$ , ou seja considerar

$$G(\xi) := -e^{-i\xi} \overline{H(\xi + \pi)} \quad (30)$$

Note-se que esta escolha corresponde precisamente a tomar para  $\psi(t)$  a função dada por

$$\psi(t) := \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} \phi(2t - k).$$

As propriedades de decaimento e suavidade de  $\psi$  deduzem-se do decaimento dos  $h_k$  imposto pela regularidade de  $\phi$ .

### Notas:

**1.** Pode provar-se que uma consequência da propriedade de completude **ARM3** é que a função escala  $\phi$  deverá ser tal que  $|\widehat{\phi}(0)| = 1$ . Na realidade, a função  $\phi$  pode ser escolhida por forma a satisfazer a seguinte **condição de normalização**

$$\widehat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1; \quad (31)$$

veja, e.g., [24]. De (21) e (24) vem então que  $H(\xi)$  deverá satisfazer

$$H(0) = 1, \quad H(\pi) = 0. \quad (32)$$

As condições anteriores justificam, de certo modo, que  $H(\xi)$  possa ser encarada como a função de transferência de um filtro passa-baixo.

**2.** As relações (24), (27) e (29) costumam resumir-se dizendo que a matriz

$$\begin{pmatrix} H(\xi) & G(\xi) \\ H(\xi + \pi) & G(\xi + \pi) \end{pmatrix}$$

é unitária para todo o  $\xi$ .

**3.** As funções  $H(\xi)$  e  $G(\xi)$  são as funções de transferência de uma par de filtros passa-baixo e passa-alto conhecidos, em linguagem de processamento de sinal, por filtros de quadratura conjugada (FQC). Por abuso de

linguagem referir-nos-emos a toda afunção  $H$  periódica de período  $2\pi$ , infinitamente derivável e que satisfaça (24) e (32) como um FQC.

4. É natural tentar construir uma ARM partindo da função escala  $\phi$ . As translações inteiras de  $\phi$  gerarão o espaço  $V_0$ , sendo os restantes espaços  $V_j$  obtidos deste por simples mudança de escala. Naturalmente, para que  $\phi$  se possa “candidatar” a ser a função escala de uma ARM, algumas condições terão de ser satisfeitas. Pode provar-se que se  $\phi$  for pelo menos 0-regular, satisfizer (23) e (21) com  $H$  uma função periódica de período  $2\pi$  infinitamente derivável e for tal que  $|\widehat{\phi}(0)| = 1$ , então gerará uma ARM; veja, e.g. [8].

5. A condição de  $r$ -regularidade impõe que os primeiros  $r + 1$  momentos da ôndula  $\psi$  sejam nulos, ou seja, impõe a seguinte condição de oscilação da ôndula  $\psi$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^l \psi(t) dt = 0; \quad l = 0, \dots, r; \quad (33)$$

veja, e.g. [17]. Note-se que, para  $r=0$ , esta é precisamente a condição de admissibilidade imposta a  $\psi$  para que possa ser usada como ôndula na transformada contínua. No espaço de Fourier, esta condição é equivalente a

$$\frac{d^l \widehat{\psi}}{d\xi^l}(0) = 0, \quad l = 0, \dots, r,$$

a qual se traduz na condição seguinte sobre a função de transferência  $H$

$$H^{(l)}(\pi) = 0, \quad l = 0, \dots, r. \quad (34)$$

A condição anterior significa que  $H$  tem um zero de ordem  $r + 1$  na frequência  $\pi$ , ou seja,  $H$  deve factorizar-se da seguinte forma

$$H(\xi) = \left( \frac{1 + e^{i\xi}}{2} \right)^{r+1} p(\xi) \quad (35)$$

onde  $p(\xi)$  é uma função  $2\pi$ -periódica e suave.

(De salientar que a existência de  $r + 1$  momentos nulos de  $\psi$  não é necessariamente garantia de  $r$ -regularidade desta função.)

**Exemplo 5.4** Retomemos o Exemplo 5.3, da ARM de Haar, cuja função escala é a função  $\phi(t) = \chi_{[0,1]}$ . É imediato verificar que  $\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1)$ , ou seja, que a sequência  $\{h_k\}$  da equação de refinamento de  $\phi$  é, neste caso, dada por  $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $h_k = 0$ ,  $k \neq 0, 1$ . Então, a função  $\psi(t)$  definida por  $\psi(t) = \sqrt{2}[h_1\phi(2t) - h_0\phi(2t-1)] = \phi(2t) - \phi(2t-1)$  é uma ôndula ortogonal associada a esta ARM. Esta função é precisamente a ôndula de Haar  $\psi^H$  definida anteriormente.

## 6. Transformadas rápidas com ôndulas

Vejamos como a estrutura de AMR conduz, de uma forma natural, a um esquema iterativo muito eficiente para a determinação dos coeficientes da expansão de um determinado sinal digital numa base de ôndulas. A chave deste algoritmo será a utilização dos filtros  $\{h_k\}$  e  $\{g_k\}$  introduzidos anteriormente.

Para analisar um sinal discreto  $\{c_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}}$  começamos por identificá-lo com as coordenadas da aproximação de um sinal contínuo  $f(t)$  num determinado espaço aproximador  $V_j$  cuja escala está relacionada com o intervalo de amostragem. Por convenção, esta escala é fixada em  $j = 0$ . Assim, o ponto de partida do algoritmo pode ser visto como uma função  $f \in V_0$  definida por  $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^0 \phi(t - k)$ .

A análise prossegue calculando as projecções de  $f$  em espaços aproximadores e em espaços de detalhe em escalas mais grosseiras, até uma determinada escala  $-J$ , isto é, em espaços  $\{V_j, W_j\}_{j=-1, -2, \dots, -J}$ . Denotemos por  $\underline{c}^j = \{c_k^j\}$  a sequência dos coeficientes de  $f$  na base  $\{\phi_{jk}\}$  de  $V_j$ , isto é, sejam

$$c_k^j = \langle f, \phi_{jk} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (36)$$

e seja  $\underline{d}^j = \{d_k^j\}$  a sequência dos coeficientes de  $f$  na base  $\{\psi_{jk}\}$  de  $W_j$ , isto é

$$d_k^j = \langle f, \psi_{jk} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (37)$$

Da identidade  $V_0 = W_{-1} \oplus W_{-2} \dots \oplus W_{-J} \oplus V_{-J}$  vemos que o que se pretende é obter a decomposição

$$f = \sum_k c_k^{-J} \phi_{-J,k} + \sum_{j=-1}^{-J} \sum_k d_k^j \psi_{jk}. \quad (38)$$

Notemos, primeiramente, que  $\phi$  satisfaz a equação de dilatação, isto é, que  $\phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{1n}$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} \phi_{j-1,k}(t) &= 2^{(j-1)/2} \phi(2^{j-1}t - k) \\ &= 2^{(j-1)/2} \sum_n h_n \phi_{1n}(2^{j-1}t - k) \\ &= 2^{j/2} \sum_n h_n \phi(2^j t - (2k + n)) \\ &= \sum_n h_{n-2k} \phi_{j,n}(t). \end{aligned} \quad (39)$$

Então, vem

$$\begin{aligned} c_k^{j-1} &= \langle f, \sum_n h_{n-2k} \phi_{jn} \rangle \\ &= \sum_n h_{n-2k} c_n^j. \end{aligned} \quad (40)$$

De modo análogo,  $\psi = \sum_n g_n \phi_{1n}$  com  $g_n = (-1)^n h_{1-n}$ , pelo que, se tem  $\psi_{j-1,k} = \sum_n g_{n-2k} \phi_{jn}$ . Temos, então

$$d_k^{j-1} = \sum_n g_{n-2k} c_n^j. \quad (41)$$

Partindo da sequência  $\underline{c}^0 = \{c_k^0\}$ , as fórmulas (40) e (41) podem ser usadas recursivamente para obter as sequências  $\underline{c}^{-J}, \underline{d}^{-1}, \dots, \underline{d}^{-J}$ , isto é, para obter a decomposição desejada para  $f$ ; veja o esquema da Fig.3.

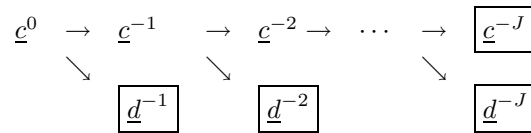


Figura 3. Esquema de decomposição

A transformada que acabámos de descrever pode ser invertida facilmente, ou seja, supondo conhecidas as sequências dos coeficientes  $\underline{c}^{-J}, \underline{d}^{-1}, \dots, \underline{d}^{-J}$ , poderemos determinar a sequência inicial  $\underline{c}^0$ ; ver Figura 4.

A fórmula que descreve essa transformada inversa deduz-se novamente de forma simples das equações de dilatação e de ôndula e é a seguinte

$$c_k^j = \sum_n (h_{k-2n} c_n^{j-1} + g_{k-2n} d_n^{j-1}). \quad (42)$$

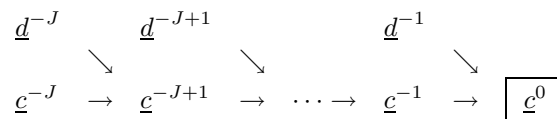


Figura 4. Esquema de reconstrução

Façamos algumas observações sobre a aplicação prática dos algoritmos acima descritos.

- Naturalmente, ao implementar os algoritmos, todas as sequências infinitas terão sempre de ser truncadas. Assim, ao aplicar o algoritmo de decomposição, a sequência inicial será uma sequência finita, ou seja, um determinado vector  $(c_0^0, c_1^0, \dots, c_{N-1}^0)$ . Também, se estivermos a trabalhar com uma ôndula de suporte não compacto, isto é, quando a sequência  $\{h_k\}$  não for finita, esta deverá ser truncada para uma sequência finita de um determinado comprimento  $L$ :  $\{h_{-m}, h_{-m+1}, \dots, h_{-m+L-1}\}$ .<sup>12</sup>
- É natural pretender que cada passo da decomposição resulte num novo vector com  $N$  componentes (número esse que foi considerado suficiente para representar  $f$  inicialmente). As fórmulas (40) e (41) mostram que, se  $N$  for par, no primeiro passo de decomposição são calculados  $N/2$  coeficientes  $c_k^{-1}$  e  $N/2$  coeficientes  $d_k^{-1}$ . Para que o processo se possa repetir  $M$  vezes, deveremos portanto escolher um vector inicial com um número de componentes múltiplo de  $2^M$ .<sup>13</sup>
- É importante ter uma ideia sobre o número de operações envolvidas neste algoritmo. Como a decomposição corresponde a efectuar uma mudança de bases ortonormadas –  $f$  expressa inicialmente na base  $\{\phi_{0k}\}$  de  $V_0$  passa a exprimir-se noutra base desse subespaço: a base formada pelas funções  $\{\phi_{-j,k}\}, \{\psi_{-1,k}\}, \dots, \{\psi_{-j,k}\}$  – os coeficientes na nova base podem ser obtidos através da multiplicação da sequência dos coeficientes iniciais por uma matriz ortogonal. Será de esperar, portanto, que a transformada requiera  $O(N^2)$  operações, onde  $N$  é o comprimento da sequência inicial. Como acabámos de referir, ao fim do primeiro passo de decomposição haverá  $N/2$  coeficientes representando a parte de  $f$  que está no espaço mais grosseiro  $V_{-1}$  e  $N/2$  coeficientes representando a parte que contém os os pormenores (isto é, a parte em  $W_{-1}$ ). O passo de decomposição seguinte é apenas efectuado sobre os coeficientes que representam a parte em  $V_{-1}$  e assim sucessivamente. Assim, à medida que a decomposição prossegue, serão efectuadas cada vez menos operações. Se o comprimento do filtro é  $L$ , o número de operações envolvidas é da ordem de

$$L \times \left( N + \frac{N}{2} + \frac{N}{2^2} + \dots \right) < 2NL.$$

Assim, o número de operações envolvidas no algoritmo da transformada com ôndula aplicado a um sinal de comprimento  $N$  é  $O(N)$  e não  $O(N^2)$ . Trata-se, portanto, de um algoritmo bastante rápido e, à semelhança do que acontece com a Transformada de Rápida de Fourier (vulgarmente designada por FFT), é usual designá-lo por *Transformada Rápida com Ôndula* (em inglês, abreviado para FWT).<sup>14</sup>

- Como a sequência inicial tem um comprimento finito, é necessário saber como tratar com os pontos fronteiros. Por exemplo, as fórmulas que dão  $c_0^{-1}$  e  $c_{N/2-1}^{-1}$  são,

$$c_0^{-1} = \sum_{n=-m}^{-m+L-1} h_n c_n^0 \quad \text{e} \quad c_{N/2-1}^{-1} = \sum_{n=-m+N-2}^{n=N+L-m-3} h_{n-N+2} c_n^0 \quad (43)$$

Assim, torna-se necessário “aumentar” o vector inicial, juntando-lhe  $m$  componentes no início e  $L - 2 - m$  componentes no final.

Os valores dessas componentes podem ser escolhidos de diversas maneiras, correspondendo a outras tantas *condições de fronteira*.

- Uma possibilidade consiste em considerá-los iguais a zero (o que corresponde a “truncar” as fórmulas (43) de modo a envolverem apenas os valores  $c_0^0, \dots, c_{N-1}^0$ .)
- Outra hipótese, é tomá-los iguais aos valores fronteiros, isto é, considerar

$$c_{-m}^0 = \dots = c_{-1}^0 = c_0^0 \quad \text{e} \quad c_N^0 = \dots = c_{N+L-m-3}^0 = c_{N-1}^0.$$

<sup>12</sup>Assumimos sempre que  $m \geq 0$  e  $L - 1 > m$  e também que o comprimento do vector não é inferior ao do “filtro”  $\{h_k\}$ , ou seja, que  $N \geq L$ .

<sup>13</sup>Mais precisamente, sendo  $L$  o comprimento do filtro ( $h_k$ ), deverá este número ser não inferior a  $2^M L$ , se pretendermos efectuar  $M$  decomposições, já que a decomposição não se deverá efectuar se o filtro tiver comprimento superior ao vector sobre que actua.

<sup>14</sup>Como é bem sabido, o algoritmo FFT aplicado a uma vector com  $N = 2^M$  envolve  $N \ln N$  operações, pelo que, teoricamente, o algoritmo da transformada de ôndula é mais rápido, sobretudo se  $N$  for muito grande. No entanto, é necessário ter em atenção que a transformada com ôndula depende fortemente do filtro escolhido, podendo ser bastante mais complexa de implementar que a FFT.

(iii) Poderemos também imaginar uma “reflexão” na fronteira, isto é, tomar

$$c_{-i}^0 = c_{i-1}^0 \quad \text{e} \quad c_{N-1+i}^0 = c_{N-i}^0, \quad i > 0.$$

(iv) Uma escolha muito usual é considerar a extensão periódica do vector, isto é, tomar:

$$c_{i+N}^0 = c_i^0, \quad \forall i.$$

(Pode mostrar-se que esta escolha tem a vantagem de permitir uma reconstrução perfeita do vector original.)

Existem outras formas de tratar com as fronteiras, as quais correspondem a usar bases ortonormadas de ôndulas construídas para espaços de funções definidas apenas num subintervalo limitado de  $\mathbb{R}$ , isto é, para espaços do tipo  $L^2[0, 1]$  em vez de  $L^2(\mathbb{R})$ . Algumas soluções para este importante problema de determinação de *ôndulas no intervalo* podem ser vistas, por exemplo, em [2, 3, 7, 19, 20].

## 7. Ôndulas e bancos de filtros

Consideremos novamente o sinal  $\underline{c}^j = (c_k^j)$  dos coeficientes da aproximação de  $f$  na base  $\phi_{jk}$  de  $V_j$ . De acordo com (40), vemos que a sequência  $\underline{c}^{j-1}$  é obtida de  $\underline{c}^j$  por convolução com a sequência  $\{h_{-n}\}$  retendo-se de seguida apenas os termos de ordem par. Por outras palavras, na linguagem de procesamento de sinal, é feita uma fitragem com o filtro  $\{\tilde{h}_k\} = \{h_{-k}\}$  seguida de uma decimação por dois, ou, simbolicamente

$$\underline{c}^{j-1} = [\tilde{h} * \underline{c}^j] \downarrow 2, \quad (44)$$

onde  $\underline{h} = \{h_k\}$  é o filtro da função escala  $\phi$ .

De modo análogo,

$$\underline{d}^{j-1} = [\tilde{g} * \underline{c}^j] \downarrow 2. \quad (45)$$

Por outro lado, vemos de imediato de (42), que para obter a sequência  $\underline{c}^{j+1}$  à custa das sequências  $\underline{c}^j$  e  $\underline{d}^j$ , teremos de introduzir zeros entre os coeficientes de cada uma dessas sequências e convolver as sequências assim obtidas com  $\{h_k\}$  e  $\{g_k\}$ , respectivamente, somando depois as sequências resultantes. Dito de outro modo, haverá que fazer o “upsampling” por dois de cada uma das sequências, filtrar com  $\{h_k\}$  e  $\{g_k\}$  e somar. Simbolicamente,

$$\underline{c}^j = (\underline{h} * [\underline{c}^{j-1}] \uparrow 2) + (\underline{g} * [\underline{d}^{j-1}] \uparrow 2). \quad (46)$$

Quer dizer: em cada passo do algoritmo de decomposiçãodo sinal original, é feita a fitragem desse sinal com um par de filtros passa-baixo e passa-alto  $\tilde{h}$  e  $\tilde{g}$ , fazendo-se a decimação por dois dos sinais obtidos.

Na fase de reconstrução, é feito o “upsampling” por dois de cada um desses sinais, filtram-se os sinais com os filtros  $\underline{h}$  e  $\underline{g}$  e somam-se os sinais obtidos.

Em processamento de sinal digital, (44)-(45) e (46) constituem, respectivamente, as fases de análise e síntese de um processo conhecido por *esquema de fitragem de duas bandas com capacidade de reconstrução perfeita, com filtros FQC*.

É de realçar que os algoritmos utilizam apenas os coeficientes  $\{h_k\}$  da equação de dilatação da função escala  $\phi$ , não havendo, portanto, necessidade de um conhecimento explícito da função  $\phi$  ou da ôndula  $\psi$ .

Vemos, então, que a toda a ARM está associado um par de filtros FQC e que apenas estes filtros são relevantes para a utilização dos algoritmos das transformadas rápidas para sinais digitais.

Note-se que, se  $\phi$  é a função escala de uma determinada ARM regular, então  $\phi$  satisfaz necessariamente a equação de dupla escala (21), a qual pode ser iterada em cada escala, tendo-se, portanto

$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{k=1}^n H(2^{-k}\xi)\widehat{\phi}(2^{-n}\xi)$ . Como  $\widehat{\phi}(0) = 1$  e  $\widehat{\phi}$  é regular,  $\widehat{\phi}(\xi)$  pode expressar-se pelo produto infinito

$$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} H(2^{-k}\xi) \quad (47)$$

A fórmula anterior relaciona a função escala de uma ARM com o respectivo filtro  $H$ . Várias questões se podem, naturalmente, colocar:

- Será que todo o filtro FQC (recorde-se que por tal se entende uma função periódica de período  $2\pi$ , infinitamente derivável e que satisfaz (24) e (32)) está associado, através de (47), a uma função escala de uma ARM? Em caso negativo, como caracterizar tais filtros?
- Será possível impor propriedades a uma ARM (por exemplo, regularidade) escolhendo adequadamente o filtro  $\{h_k\}$ ?
- Qual a relevância, do ponto de vista prático, de trabalhar com filtros que estejam associados a ARM com determinadas características? Por outras palavras, de que forma intervêm, na realidade, as propriedades de  $\phi$  e  $\psi$  nas aplicações práticas?

Estas questões têm sido objecto de investigação por parte de matemáticos, nos últimos anos.

— Condições necessárias e suficientes (um pouco técnicas) para que um filtro FQC esteja associado a uma ARM (pelo menos 0-regular) podem ser vistas, e.g. em [8, pp. 39–52]. Uma condição suficiente, embora não necessária, mas que é muitas vezes satisfeita na prática, é que  $H(\xi) \neq 0$ , para  $\xi \in [-\pi/3, \pi/3]$ .

— Relativamente à segunda questão, é possível estimar o grau de suavidade da função  $\phi$  através de de um estudo cuidadoso do factor residual  $p(\xi)$  na factorização

$$H(\xi) = \left(\frac{1 + e^{i\xi}}{2}\right)^{r+1} p(\xi)$$

que  $H$  deverá satisfazer necessariamente se  $\phi$  vier a ser  $r$ -regular; veja, e.g. [10] e [8].

— O caso particularmente importante da construção de ondulas de suporte compacto – as quais correspondem a filtros de resposta a impulso finita – com um número máximo de momentos nulos (permitido pelo tamanho do suporte), foi totalmente resolvido por I. Daubechies em [10], impondo precisamente condições ao filtro  $H$ .

— Relativamente à questão de saber de que forma as propriedades da função escala  $\phi$  e ondula  $\psi$  são relevantes em aplicações práticas dos algoritmos das transformadas, apenas podemos dizer que existem alguns indícios, mas não respostas definitivas.

Certas experiências indicam que a regularidade pode ser importante, por exemplo, na compressão da formação de uma imagem. Intuitivamente, reconstruir uma imagem "suave" usando funções descontínuas, por exemplo, poderá provocar distorções facilmente detectáveis. No entanto, não é possível saber qual a ordem de regularidade óptima para esse efeito; veja, e.g. [1].

Quanto ao número de momentos nulos da ondula, este não parece ser tão importante para este mesmo objectivo (a não ser na medida em que é condição necessária de regularidade). No entanto, em aplicações em análise numérica baseadas em algoritmos desenvolvidos por Beyklin et al. [5, 6] para compressão de operadores (i.e., redução à forma dispersa das matrizes que os representam em bases de ondulas), o número de momentos nulos de  $\psi$  representa um papel essencial. Para um argumento justificando por que razão, em implementações dos algoritmos em que os filtros sejam usados repetidas vezes, é importante ter ondulas com um certo número de momentos nulos, veja também [10, pp. 245-247].

Para mais pormenores sobre a ligação entre a teoria das ondulas e a teoria de bancos de filtros, sugerimos a leitura dos artigos [21, 25, 26] e [27]. Os livros de Cohen e Ryan [8] e de Strang e Nguyen [22] são também excelentes referências sobre este assunto.

## Referências

- [1] M. Antonini, M. Barlaud, I. Daubechies e P. Mathieu, “Image coding using wavelet transforms”, *IEEE Trans. on Image Processing*, **1**, 205-220, 1992.
- [2] P. Auscher, “Wavelets with boundary conditions on the interval”, in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C.K. Chui (Ed.), Academic Press, 237-256, 1992.
- [3] P. Auscher, “Ondelettes à support compact et conditions aux limites”, *J. Funct. Anal.*, **111**, 29-43, 1993.
- [4] G. Battle, “A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarié functions”, *Comm. Math. Phys.*, **110**, 601-615, 1987.
- [5] G. Beylkin, R. Coifman e V. Rokhlin, “Fast wavelet transforms and numerical algorithms”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**, 141-183, 1991.
- [6] G. Beylkin, R. Coifman e V. Rokhlin, “Wavelets in Numerical Analysis”, in *Wavelets and Their Applications*, M. Ruskai et al. (Eds), Jones and Bartlet, 181-210, 1992.
- [7] A. Cohen, I. Daubechies e P. Vial, “Wavelets and fast wavelet transforms on an interval”, *Appl. Comp. Harm. Anal.*, **1**, 44-81, 1993.
- [8] A. Cohen e R. Ryan, *Wavelets and Multiscale Signal Processing*, Chapman & Hall, London, 1995.
- [9] I. Daubechies, “The Wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis”, *IEEE Trans. on Info. Theory*, Vol. 36, No. 5, 961-1005, 1990.
- [10] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [11] I. Daubechies, A. Grossman e Y. Meyer, “Painless nonorthogonal expansions”, *J. Math. Phys.*, **27**, 1271-1283, 1986.
- [12] A. Haar, “Zur Theorie der Orthogonalen Funktionensysteme”, *Math. Annal.*, Vol. 69, 331-371, 1910.
- [13] C. E. Heil, “Wavelets and frames”, in *Signal Processing, Part I: Signal Processing Theory*, L. Auslander, et al.(Eds), IMA, Vol. 22, Springer, New-York, 147-160, 1990.
- [14] P. G. Lemarié, “Une nouvelle base d’ondelettes de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ”, *J. de Mat. Pures et Appl.*, **67**, 227-236, 1988.
- [15] S. Mallat, “A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representacion”, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intell*, Vol. 11, **7**, 674-693, 1989.
- [16] S. Mallat, “Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **315**, 69-87, 1989.
- [17] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs*, Tome I, Hermann, Paris, 1990.
- [18] Y. Meyer, “Ondelettes, fonctions spline et analyses graduées”, Curso dado na Universidade de Torino, Itália, 1986
- [19] Y. Meyer, “Ondelettes sur l’intervalle”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **7**, 115-143, 1991.
- [20] E. Quak, N. Weyrich, “Wavelets on the interval”, in *Approximation Theory, Wavelets and Applications*, S. P. Singh (Ed.), NATO ADI Series, Dordrecht, Kluwer Academic, 247-283, 1995.
- [21] O. Rioul e M. Vetterli, “Wavelets and signal processing”, *IEEE Signal Process. Mag.*, October, 14-38, 1991.
- [22] G. Strang e T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA, 1994.
- [23] J.O. Strömberg, “A modified Franklin system and higher order spline systems on  $\mathbb{R}^n$  as unconditional bases for Hardy spaces”, in *Conf. in honor of A. Zygmund*, Vol. II, W. Beckner et al. (Eds), Wadsworth Math. Series, 475-493, 1982.



- [24] P. Tchamitchian, "Wavelets, functions and operators", in *Wavelets: Theory and Applications*, G. Erlebacher et al. (Eds), Oxford University Press, 1986.
- [25] P. P. Vaidyanathan, "Theory and design of M-channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M, having perfect reconstruction property", *IEEE Trans. on Acoust. Signal Speech Process*, **36**, 476-492, 1987.
- [26] M. Vetterli, "Filter banks allowing perfect reconstruction", *Signal Process.*, **10**, 219-244, 1986.
- [27] M. Vetterli e C. Herley, "Wavelets and filter banks: theory and design", *IEEE Trans. on Acoust. Signal Speech Process*, **40**, 2207-2232, 1992.