

Universidade do Minho

Escola de Ciências

Susana Luísa Vaz da Silva Lameiras

Modelação espaço-temporal: uma aplicação a dados ambientais

Tese de Mestrado em Estatística

Trabalho efectuado sob a orientação da
Professora Doutora Arminda Manuela Gonçalves

Abril de 2010

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os que me ajudaram na realização deste trabalho, em especial:

- à professora Arminda Manuela Gonçalves por todo o apoio e atenção que me dedicou;
- à Universidade do Minho, em especial a todos os professores e colegas que me acompanharam;
- aos meus amigos e familiares mais directos, sobretudo aos meus pais por todo o apoio e compreensão.

Muito obrigada a todos!

Resumo

A precipitação é um dos processos físicos mais importantes, tendo um papel fundamental em várias áreas relacionadas com a gestão da água e dos recursos hídricos, bem como em sectores importantes da actividade económica, como por exemplo a agricultura, a indústria e o turismo. Verifica-se assim uma contínua necessidade de obter modelos determinísticos e/ou estocásticos que têm em vista enfrentar o desafio da estimação da precipitação, num dado ponto geográfico ou numa dada região, com rigor cada vez maior.

O presente trabalho é o resultado da análise do comportamento temporal e espacial da precipitação, totalizada mensalmente, observada numa rede udométrica constituída por um total de 19 estações de amostragem na região da bacia hidrográfica do rio Ave, localizada no Noroeste de Portugal, entre os anos de 1931 e 2008. Tem como principal objectivo obter estimativas de precipitação pontual e em área, ou seja, um valor médio da quantidade de chuva que cai sobre um local ou uma certa região geográfica num determinado período de tempo.

Assim, o presente estudo visa a identificação de modelos que possibilitem a obtenção dessas medições (re)construindo a distribuição espaço-temporal da precipitação associada a intervalos mensais, na bacia hidrográfica do rio Ave. Para isso, clarificam-se conceitos e introduzem-se as metodologias mais frequentemente adoptadas no âmbito da interpolação de fenómenos espacialmente distribuídos. Efectua-se uma exposição teórica básica dos processos aleatórios e da metodologia de *Kriging*. Por fim, aplicam-se estas metodologias aos dados disponíveis de precipitação da bacia hidrográfica do rio Ave.

Palavras-Chave: bacia hidrográfica, udómetros, modelos espaço-temporais, continuidade espacial, estimação da precipitação, *Kriging*.

Abstract

Precipitation is one of the most important physical processes, it has a fundamental role in different areas related to the water management, namely in important areas of the economical activity, for example, in the agriculture, in the population welfare and in the hydrographic resources. In this way it's necessary to get physical and statistical models in order to face the challenge of measuring the precipitation in a more and more rigorous way, because good calculation of rainfall is a decisive element in an accurate weather forecast.

The place and time precipitation measurement of a geographical area, in particular, is indispensable on hydric balance calculation for the indirect estimate of the river flow and to the development of the streams volume study. It's still essential to the environmental diverse phenomena, among them the variation of the water quality in the river basin.

This work is the result of the place analysis of precipitation, done monthly, in the udometric/pluviometric net consisting on a total of 19 sampling stations in the Ave basin, between 1931 and 2008 and the main purpose is to average the quantity of precipitation in area, that is, the average of rain falling on a certain geographical region during a determined period of time.

Therefore, this study aims to identify the models that allow to obtain those measurements rebuilding the place distribution of monthly precipitation in Ave basin. Thus, we clarify concepts and we introduce the mostly used methodologies to the interpolation of the place distribution phenomena. After doing a basic analysis of the random processes and Kriging methodology. Finally, we use this methodology to the available data on the Ave basin precipitation.

Keywords: hydrological basin, rain gauges, spatiotemporal models, spatial continuity, area rainfall estimation, Kriging

Índice

| | |
|---|----|
| Capítulo 1. Introdução | 1 |
| Capítulo 2. Interpolação Espacial | 5 |
| 2.1. Métodos Determinísticos..... | 6 |
| 2.1.1. Média Aritmética Simples e Média Móvel..... | 7 |
| 2.1.2. Polígonos de Influência..... | 8 |
| 2.1.3. Triangulação..... | 9 |
| 2.1.4. Interpolação em Função do Inverso da Potência das Distâncias..... | 11 |
| 2.2. Modelos de Estatística Espacial: Métodos Geoestatísticos..... | 13 |
| Capítulo 3. Teoria dos Processos Aleatórios | 23 |
| 3.1. Variáveis | |
| Aleatórias..... | 23 |
| 3.2. Análise da Continuidade Espacial | 28 |
| 3.2.1. Variograma, Covariograma e Correlograma | 29 |
| 3.2.2. Modelos de Anisotropia | 36 |
| 3.2.2.1. Anisotropia Geométrica | 36 |
| 3.2.2.2. Anisotropia Zonal | 40 |
| 3.2.3. Modelos teóricos de variogramas definidos positivos (modelos de transição) | 41 |
| 3.2.3.1. O modelo de Efeito de Pepita..... | 43 |
| 3.2.3.2. O modelo Esférico (acompanhado de efeito de pepita)..... | 45 |
| 3.2.3.3. O modelo Exponencial (acompanhado de efeito de pepita)..... | 46 |
| 3.2.3.4. O modelo Gaussiano (acompanhado de efeito de pepita)..... | 47 |

| | |
|---|-----|
| 3.2.3.4. O modelo Racional Quadrático (acompanhado de Efeito de Pepita)..... | 48 |
| Capítulo 4. Estimação Estocástica - <i>Kriging</i> | 51 |
| 4.1. Estimação Linear..... | 51 |
| 4.2. Estimador Linear Geoestatístico: <i>Kriging</i> | 54 |
| 4.2.1. <i>Kriging</i> Simples | 55 |
| 4.2.2. <i>Kriging</i> Ordinário..... | 57 |
| 4.2.3. Algumas propriedades e considerações sobre o estimador de <i>Kriging</i> | 61 |
| 4.2.4. Outros métodos de estimação | 63 |
| 4.4. Estimação Global | 64 |
| 4.5. Validação Cruzada | 69 |
| Capítulo 5. Estimação da Precipitação | 73 |
| 5.1. O Processo da Precipitação..... | 73 |
| 5.1.1. Sensores de Precipitação: udómetros, udoógrafos e radares meteorológicos..... | 75 |
| 5.1.2. Rede Meteorológica..... | 78 |
| 5.2. A Região Geográfica..... | 80 |
| 5.3. Apresentação da Aplicação ao Caso de Estudo..... | 83 |
| 5.4. Aplicação do <i>Kriging</i> às Medições de Precipitação..... | 94 |
| 5.4.1. Análise e Modelação da Continuidade Espacial da Precipitação | 97 |
| 5.4.2. Estimação da Precipitação: pontual e em área..... | 114 |
| 5.4.2.1. Estimação pontual da Precipitação | 121 |
| 5.4.2.2. Estimação da Precipitação em Área | 126 |
| Capítulo 6. Conclusão..... | 131 |
| Bibliografia | 135 |
| Anexo I..... | 139 |

Índice de Figuras

| | |
|--|----|
| Figura 2.1: Método dos polígonos de influência: o ponto x_0 toma o valor da amostra mais próxima, x_1 | 8 |
| Figura 2.2: Estimação por recurso a malhas triangulares | 9 |
| Figura 2.3: Método do inverso da potência das distâncias: o valor de x_0 é uma média ponderada das n amostras vizinhas, em que os ponderadores são determinados pelo inverso da potência das distâncias de cada uma das amostras a x_0 | 11 |
| Figura 2.4: Mortes por cólera de cada dia da epidemia | 15 |
| Figura 2.5: Mapa criado por Dr. John Snow mostrando os agrupamentos de casos de cólera na epidemia de Londres (1854). | 16 |
| Figura 2.6: Precipitação do mês de Novembro de 2006 registada em 158 estações da rede meteorológica nacional | 19 |
| Figura 2.7: Dados de morte súbita infantil | 20 |
| Figura 2.8: Dados de cancro do pulmão | 21 |
| Figura 3.1: Cálculo do variograma omnidireccional | 33 |
| Figura 3.2: Cálculo do variograma segundo uma determinada direcção | 33 |
| Figura 3.3: Variograma com anisotropia geométrica | 37 |
| Figura 3.4: Equivalência entre um modelo de transição de amplitude a e um modelo de transição de amplitude um e ambos com o mesmo patamar | 38 |
| Figura 3.5: Representação na elipse de direcções do conjunto das amplitudes e do modelo de anisotropia geométrica | 39 |
| Figura 3.6: Variogramas com anisotropia zonal. | 41 |
| Figura 3.7: Os três modelos de transição mais usuais | 43 |
| Figura 3.8: Obtenção da constante C_0 – “efeito de pepita”, por via geométrica | 44 |

| | |
|--|-----|
| Figura 3.9: Graus de continuidade da mineralização expressos pelo comportamento do variograma na origem: alto grau de continuidade (1), média continuidade (2), efeito pepita (3) e efeito pepita puro (4) | 49 |
| Figura 4.1: Esquema ilustrativo do processo de interpolação espacial geostatístico | 51 |
| Figura 4.2: Esquema ilustrativo do processo de interpolação espacial geostatístico de áreas locais | 65 |
| Figura 5.1: Udómetro | 76 |
| Figura 5.2: Udógrafo | 78 |
| Figura 5.3: Estação Udométrica | 79 |
| Figura 5.4: Localização da bacia do rio Ave relativamente às bacias vizinhas do Norte de Portugal | 80 |
| Figura 5.5: Mapa rede de estações udométrica do plano de bacia hidrográfica do rio Ave | 84 |
| Figura 5.6: Distribuição espacial das estações de medição de precipitação na bacia hidrográfica do rio Ave | 85 |
| Figura 5.7: Representação esquemática da localização das 19 estações meteorológicas na malha de células que contém a região em estudo | 87 |
| Figura 5.8: Legenda das caixas com bigodes | 90 |
| Figura 5.9: Caixas com bigodes das observações em Novembro e Dezembro | 90 |
| Figura 5.10: Caixas com bigodes das observações em Janeiro e Fevereiro | 91 |
| Figura 5.11: Caixas com bigodes das observações em Março e Abril | 92 |
| Figura 5.12: Caixas com bigodes das observações em Maio e Junho | 92 |
| Figura 5.13: Caixas com bigodes das observações em Julho e Agosto | 93 |
| Figura 5.14: Caixas com bigodes das observações em Setembro e Outubro | 93 |
| Figura 5.15 Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Janeiro) | 101 |
| Figura 5.16: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Janeiro) | 101 |
| Figura 5.17: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Fevereiro) | 103 |
| Figura 5.18: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Fevereiro) | 103 |
| Figura 5.19: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Março) | 104 |
| Figura 5.20: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Março) | 104 |
| Figura 5.21: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Abril) | 105 |
| Figura 5.22: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Abril) | 105 |
| Figura 5.23: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Maio) | 106 |
| Figura 5.24: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Maio) | 106 |
| Figura 5.25: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Junho) | 107 |

| | |
|---|-----|
| Figura 5.26: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Junho) | 107 |
| Figura 5.27: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Julho) | 108 |
| Figura 5.28: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Julho) | 108 |
| Figura 5.29: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Agosto) | 109 |
| Figura 5.30: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Agosto) | 109 |
| Figura 5.31: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Setembro) | 110 |
| Figura 5.32: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Setembro) | 110 |
| Figura 5.33: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Outubro) | 111 |
| Figura 5.34: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Outubro) | 111 |
| Figura 5.35: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Novembro) | 112 |
| Figura 5.36: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Novembro) | 112 |
| Figura 5.37: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Dezembro) | 113 |
| Figura 5.38: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Dezembro) | 113 |
| Figura 5.39: Representação esquemática da localização das 19 estações meteorológicas e dos 5 pontos a estimar | 123 |
| Figura 5.40: Representação esquemática da localização das 19 estações meteorológicas e dos 368 pontos considerados | 127 |

Índice de Tabelas

| | |
|--|-----|
| Tabela 5.1: Estações de medição de precipitação na bacia hidrográfica do rio Ave | 86 |
| Tabela 5.2: Estatísticas básicas de todas as estações de amostragem no período observado | 88 |
| Tabela 5.3: Estatísticas descritivas das médias mensais de precipitação nas 19 estações de amostragem | 89 |
| Tabela 5.4: Valores do semivariograma empírico de Janeiro; $N^*(h)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma | 100 |
| Tabela 5.5: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Janeiro | 102 |
| Tabela 5.6: Valores do semivariograma empírico de Fevereiro; $N^*(h)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma | 102 |
| Tabela 5.7: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Fevereiro | 103 |
| Tabela 5.8: Valores do semivariograma empírico de Março; $N^*(h)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma | 103 |
| Tabela 5.9: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Março | 104 |
| Tabela 5.10: Valores do semivariograma empírico de Abril; $N^*(h)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma | 104 |
| Tabela 5.11: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Abril | 105 |
| Tabela 5.12: Valores do semivariograma empírico de Maio; $N^*(h)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma | 105 |
| Tabela 5.13: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Maio | 106 |

| | |
|--|-----|
| Tabela 5.14: Valores do semivariograma empírico de Junho; $N^*(h)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma | 106 |
| Tabela 5.15: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Junho | 107 |
| Tabela 5.16: Valores do semivariograma empírico de Julho; $N^*(h)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma | 107 |
| Tabela 5.17: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Julho | 108 |
| Tabela 5.18: Valores do semivariograma empírico de Agosto; $N^*(h)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma | 108 |
| Tabela 5.19: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Agosto | 109 |
| Tabela 5.20: Valores do semivariograma empírico de Setembro; $N^*(h)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma | 109 |
| Tabela 5.21: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Setembro | 110 |
| Tabela 5.22: Valores do semivariograma empírico de Outubro; $N^*(h)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma | 110 |
| Tabela 5.23: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Outubro | 111 |
| Tabela 5.24: Valores do semivariograma empírico de Novembro; $N^*(h)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma | 111 |
| Tabela 5.25: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Novembro | 112 |
| Tabela 5.26: Valores do semivariograma empírico de Dezembro; $N^*(h)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma | 112 |
| Tabela 5.27: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Dezembro | 113 |
| Tabela 5.28: Distâncias euclidianas entre as 19 estações de amostragem Meteorológicas | 115 |
| Tabela 5.29: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para as 19 estações de amostragem, aplicando o método de validação cruzada (para Janeiro, Fevereiro e Março) | 116 |
| Tabela 5.30: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para as 19 estações de amostragem, aplicando o método de validação cruzada (para Abril, Maio e Junho) | 117 |
| Tabela 5.31: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para as 19 estações de amostragem, aplicando o método de validação cruzada (para Julho, Agosto e Setembro) | 118 |
| Tabela 5.32: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para as 19 estações de amostragem, aplicando o método de validação cruzada (para Outubro, Novembro e Dezembro) | 119 |
| Tabela 5.33: Matriz $\hat{\Lambda}$ referente ao mês de Janeiro | 122 |
| Tabela 5.34: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para os 5 pontos e para o primeiro semestre, pela resolução do sistema de <i>Kriging</i> Ordinário | 124 |
| Tabela 5.35: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para os 5 pontos e para o segundo semestre, pela resolução do sistema de <i>Kriging</i> Ordinário | 125 |
| Tabela 5.36: Estimativas da precipitação (em <i>mm</i>) em Janeiro de 2001 nos 5 pontos | 126 |
| Tabela 5.37: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para a estimação em área de A e para os 12 meses | 129 |

1. Introdução

A precipitação é um fenómeno natural que tem um impacto muito importante nas vidas das populações, tendo um papel fundamental em várias áreas relacionadas com a gestão da água e dos recursos hídricos, bem como em sectores importantes da actividade económica. Verifica-se assim uma contínua necessidade de obter modelos determinísticos e/ou estocásticos que têm em vista enfrentar o desafio da estimação da precipitação, num dado ponto geográfico ou numa dada região, com rigor cada vez maior.

À superfície terrestre a precipitação, sendo um fenómeno de natureza contínua, denota uma grande variabilidade temporal e espacial. Esta variabilidade é consequência não só dos padrões de circulação atmosférica associados à latitude e à longitude, mas também dos mecanismos de arrefecimento e de formação de nuvens. A variabilidade espacial da precipitação é, para uma dada altitude, a distância relativa a fontes de humidade, a temperatura e a direcção e intensidade dos ventos dominantes.

O presente estudo visa a identificação e a validação de modelos que possibilitem reconstruir a distribuição espaço/temporal da precipitação associadas a intervalos mensais, numa determinada região geográfica. A região de estudo é a bacia hidrográfica do rio Ave localizada no Noroeste de Portugal. A quantificação espacial e temporal da precipitação sobre uma área geográfica, em particular, é imprescindível no cálculo dos balanços hídricos para a estimação indirecta de caudais em cursos de água e para o desenvolvimento do estudo de carga

dos aquíferos. É ainda essencial à modelação de diversos fenómenos ambientais, entre os quais a variação da qualidade da água numa bacia hidrográfica fluvial.

Este trabalho é o resultado da análise do comportamento espacial da precipitação, totalizada mensalmente, na rede Meteorológica constituída por um total de 19 estações de amostragem na região da bacia hidrográfica do rio Ave, entre os anos de 1931 e 2008. Tem como principal objectivo obter estimativas de precipitação pontual e em área (na região da bacia hidrográfica do rio Ave ou numa sua sub-bacia), ou seja, um valor médio da quantidade de chuva que cai sobre um local ou uma certa região geográfica, num determinado período de tempo.

Este trabalho está organizado em seis capítulos. No segundo capítulo introduzem-se as metodologias mais, frequentemente, adoptadas no âmbito da interpolação (determinística e estocástica) de fenómenos espacialmente distribuídos. A interpolação é usualmente adoptada para estimar valores desconhecidos de uma função, a partir de valores conhecidos da mesma função. Esta torna-se necessária sempre que a informação disponível é recolhida por amostragem e, conseqüentemente, não cobre todo o domínio espacial de interesse. Descrevem-se, de uma forma sucinta, os métodos determinísticos e os métodos geoestatísticos.

O Capítulo 3 é dedicado à exposição da teoria básica dos processos aleatórios. Apresentam-se diversos conceitos de estacionaridade e introduzem-se as medidas de continuidade espacial mais comuns, nomeadamente, semivariogramas e covariogramas. Estas medidas desempenham um papel crucial na metodologia Geoestatística, cumprindo fundamentalmente, dois objectivos: a caracterização e a quantificação do modo como se dispersam espacialmente as características de um recurso, grau de continuidade espacial, o modo diferencial ou não como a grandeza se dispersa no espaço (anisotropia ou isotropia) e que servem de base aos processos de inferência espacial/estimação. Segue-se uma breve apresentação dos modelos isotrópicos de semivariogramas mais importantes (modelos de transição).

As metodologias de estimação de *Kriging* são apresentadas ao longo do Capítulo 4. É efectuada a dedução integral dos estimadores lineares associados a cada método, sob a perspectiva da estimação local, ou pontual, e sob a perspectiva da estimação global.

No Capítulo 5 apresenta-se a aplicação ao caso de estudo. Começa-se por se abordar a problemática da estimação da precipitação, sendo feita uma explicação sumária dos mecanismos da precipitação, assim como dos sensores de medição da mesma (udómetros, udógrafos e radares meteorológicos). Segue-se com uma caracterização geral da região em estudo, a bacia

hidrográfica do rio Ave, e com a apresentação dos dados referentes ao caso de estudo que constitui a aplicação prática. É feita uma análise descritiva das medições de precipitação observadas nas 19 estações de amostragem Meteorológicas, identificando padrões de comportamento, permitindo interpretar e melhor compreender a informação recolhida.

No final do Capítulo 5, apresenta-se a aplicação das metodologias (abordadas nos capítulos anteriores) às medições mensais da precipitação, com o objectivo de obter estimativas mensais da precipitação num determinado local da bacia, nomeadamente, em lugares onde não há estações de amostragem meteorológicas, bem como obter estimativas da intensidade média mensal da precipitação em toda a área considerada, i.e., na bacia hidrográfica do rio Ave ou, em particular, em qualquer sua sub-bacia.

Finalmente, no sexto capítulo, apresentam-se as principais conclusões decorrentes do estudo efectuado, da análise dos dados e das metodologias aplicadas, tecendo alguns comentários sobre os resultados obtidos.

2. Interpolação Espacial

Os métodos de interpolação espacial possibilitam a recriação das superfícies contínuas a partir de valores aferidos pontualmente. Os valores interpolados são obtidos através de funções ajustadas aos valores conhecidos.

A interpolação é uma técnica usualmente adoptada para estimar valores desconhecidos de uma função a partir de valores conhecidos da mesma função. A interpolação torna-se necessária sempre que a informação disponível é recolhida por amostragem e conseqüentemente não cobre todo o domínio espacial de interesse.

A interpolação de dados referentes a áreas é vocacionada para a construção de iso-áreas (superfícies onde o parâmetro em apreciação pode ser considerado constante) e tem sido também recentemente muito utilizada na transferência de atributos entre tipos distintos de unidades geográficas cujas delimitações não sejam concordantes, tais como áreas administrativas e outras superfícies (áreas de influência de dado fenómeno), Nicolau [32].

A interpolação pode ser desenvolvida globalmente, utilizando a totalidade de observações disponíveis para o domínio espacial de interesse no cálculo de cada estimativa, ou localmente, recorrendo apenas às observações que se encontram numa vizinhança em torno da posição geográfica, para a qual se pretende produzir uma estimativa.

Os métodos, que operam localmente, baseiam-se no pressuposto que cada observação só influencia a superfície de interpolação até certa distância em redor da sua localização (Mitas e Mitasova [31]). Alguns autores advogam que os métodos que operam sobre vizinhanças móveis (janelas móveis) permitem reproduzir com maior fidelidade os fenómenos que evidenciam continuidade espacial, uma vez que na produção de cada estimativa recorrem a um conjunto variável de observações que possibilitam um ajustamento à variabilidade local do fenómeno (Daly, Neilson e Phillips [13]).

Por outro lado, a verificação de comportamentos anómalos a nível local não afecta toda a superfície de interpolação, mas apenas uma vizinhança em torno da posição geográfica onde a anomalia foi observada. Se se atender às características locais da precipitação, a aplicação de métodos que operam sobre vizinhanças móveis parece ser particularmente ajustada à interpolação do fenómeno. A definição da vizinhança a adoptar na estimação com janela móvel pode basear-se em diversos critérios, sendo a distância euclidiana o critério mais frequentemente utilizado.

A estimação pode ser desenvolvida por recurso a métodos que apenas utilizam as observações do fenómeno e as respectivas coordenadas geográficas (métodos univariados) ou, alternativamente, por métodos que permitem incorporar outras variáveis auxiliares para além das observações, cujo conhecimento poderá contribuir para melhorar as estimativas do fenómeno (métodos multivariados). A aplicação, desta última categoria de métodos, obriga a que as variáveis auxiliares sejam mais densamente amostradas do que a variável a estimar.

Existem métodos de interpolação exacta que se baseiam na atribuição de pesos variáveis, dependentes da distância entre o valor conhecido e o valor a estimar e em que as observações pontuais utilizadas para ajustar a função de interpolação, são conservadas, não são substituídas por valores aproximados pertencentes à superfície de interpolação como nos métodos de aproximação ou alisamento. Neste último caso, a adopção de valores aproximados na superfície de interpolação origina erros residuais (desvios) cuja minimização se pretende.

2.1. Métodos Determinísticos

Os modelos mais simples são os chamados modelos deterministas de inferência espacial. Estes modelos caracterizam completamente um fenómeno através das variáveis e parâmetros do próprio modelo. Por exemplo, a precipitação, é um fenómeno natural espacial sob o qual actuam imensos e

diversos factores atmosféricos (como a altitude, o vento e a temperatura do ar) que são de tal forma complexos e incertos que dificultam ou tornam mesmo impossível a sua integração num modelo físico.

Assim, o elevado grau de incerteza relativa ao conhecimento do recurso ou fenómeno natural impede muitas vezes que a inferência seja efectuada por meio de modelos físicos deterministas, de grandezas em áreas compreendidas entre amostras experimentais.

Dos modelos deterministas de inferência espacial, o método dos polígonos de influência, o método de triangulação e o método do inverso da potência das distâncias tiveram e, em alguns casos, continuam a ter uma grande importância e aplicação em áreas como a cartografia de fenómenos espaciais. Estes métodos calculam um valor de uma dada grandeza no espaço, entre as amostras ou observações, a partir de uma combinação linear dos valores observados. Um segundo ponto em comum é que todos esses métodos têm critérios geométricos para determinar a influência das amostras, isto é, a maior ou menor proximidade (uma medida euclidiana) dos valores observados ao ponto a estimar. Os principais métodos de interpolação exacta determinísticos para a estimação da precipitação vão ser então apresentados, de um modo resumido.

2.1.1. Média Aritmética Simples e Média Móvel

O método de estimação mais simples consiste na determinação da média aritmética a partir de todas as observações disponíveis. Este método só deve ser aplicado se a distribuição espacial das observações for uniforme e as observações individuais não diferirem substancialmente da média calculada. Trata-se de um método que atribui igual peso (unitário) a todas as observações disponíveis.

A estimação por média móvel visa o cálculo da média aritmética a partir das observações situadas numa vizinhança pré-estabelecida da posição geográfica, para a qual se pretende obter uma estimativa. Deste modo, as estimativas obtidas variam com a localização espacial do ponto a estimar, sendo atribuído peso nulo a todas as observações que se situam para além da vizinhança estipulada.

2.1.2. Polígonos de Influência

Este método visa a subdivisão do domínio espacial em áreas de influência das observações disponíveis. A superfície ou polígono de influência de cada observação é obtida unindo-se as observações adjacentes três a três por segmentos de recta, traçando-se normais no meio dos segmentos, formando os polígonos com essas normais (Figura 2.1).

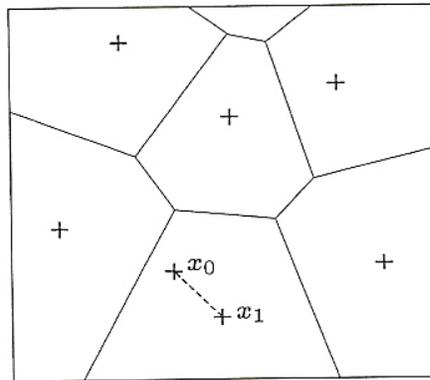


Figura 2.1: Método dos polígonos de influência: o ponto x_0 toma o valor da amostra mais próxima, x_1

Cada um dos polígonos assim formados têm uma única observação no seu interior, e qualquer ponto contido no interior de um polígono está mais próximo da observação desse polígono do que de qualquer outra. Assim, todos os pontos que pertencem a um polígono tomam o valor da amostra do centro do polígono. Por outras palavras, qualquer ponto no espaço tem o valor estimado igual ao valor da amostra mais próxima, que é a do centro do polígono em que o ponto está contido. Trata-se de um método interpolador que só toma em conta o valor de uma amostra e que por isso mesmo só é aplicado normalmente em malhas muito densas de amostras ou em estimação de valores globais, isto é, médias ponderadas das amostras em que os ponderadores de cada amostra são proporcionais às áreas dos polígonos.

2.1.3. Triangulação

Esta técnica consiste na partição de domínio espacial em triângulos. A malha irregular a criar depende do número e do espaçamento das observações disponíveis. Cada observação assume a posição de um vértice ou nó da malha. As arestas dos triângulos ou arcos da malha interligam as observações disponíveis. Cada triângulo descreve uma porção da superfície espacial representada pela totalidade da malha. A interpolação por triangulação apenas utiliza a informação relativa a três observações na produção de uma estimativa. Após selecção do triângulo sobre o qual cai o ponto para o qual se pretende produzir uma estimativa, procede-se ao ajuste de um plano aos seus vértices. A equação do plano assume a seguinte expressão geral

$$f(x, y) = z = ax + by + c$$

que dá origem ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} z_1 = ax_1 + by_1 + c \\ z_2 = ax_2 + by_2 + c \\ z_3 = ax_3 + by_3 + c \end{cases}$$

Uma alternativa à resolução do sistema acima representado baseia-se na geometria do triângulo e na localização do ponto a estimar. Unindo os vértices do triângulo ao nó que define o ponto a estimar, produzem-se três novos triângulos, cuja área pode ser utilizada como função ponderadora da estimativa.

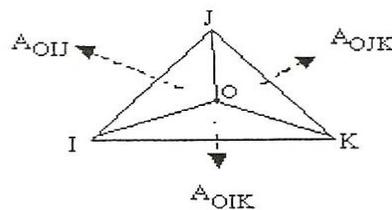


Figura 2.2: Estimação por recurso a malhas triangulares

Em que:

I, J e K- representam observações conhecidas;

A_{IJK} - é a área total do triângulo formado pelas observações I, J e K;

O - identifica a localização do ponto a estimar;

A_{OIJ} , A_{OJK} e A_{OIK} são as áreas dos triângulos contidos em IJK.

A estimativa da superfície para a posição O (Z_0) será, de acordo com a notação utilizada na Figura 2.2, resultado da ponderação de cada observação (Z_I, Z_J, Z_K) pela área do triângulo oposto

$$Z_0 = Z_I \left(\frac{A_{OJK}}{A_{IJK}} \right) + Z_J \left(\frac{A_{OIK}}{A_{IJK}} \right) + Z_K \left(\frac{A_{OIJ}}{A_{IJK}} \right).$$

Os pesos adoptados são normalizados de modo a que totalizem um. Deste modo garante-se a produção de estimativas não enviesadas. As estimativas obtidas dependem da triangulação escolhida, já que se determina as três observações a utilizar na estimação. É por isso recomendável a adopção de modelos triangulares que obedçam ao critério de Delaunay. Nestes modelos, cada nó da malha é ligado aos dois nós mais próximos de modo a constituir triângulos de ângulos e lados similares. Tal evita os problemas de precisão numérica frequentemente associados às superfícies triangulares alongadas e finas. O critério de Delaunay assegura também que a geometria da malha obtida é independente da ordem pela qual os vértices são processados.

Segundo Cressie [12] a superfície produzida por modelos baseados na triangulação de Delaunay é contínua, mas pode não ser diferenciável devido às variações de declive entre as arestas dos triângulos.

Os modelos baseados em malhas triangulares que respeitam o critério de Delaunay são usualmente designados por TIN (*Triangulated Irregular Network*). Quando aplicados a informação altimétrica, os TIN podem ser encarados como modelos numéricos do terreno.

2.1.4. Interpolação em Função do Inverso da Potência das Distâncias

Esta técnica consiste na adoção de pesos que são proporcionais ao inverso da distância ou ao inverso da distância quadrática entre o valor observado e o valor a estimar. Se atendermos à função ponderadora utilizada pelos métodos desta categoria, pode-se concluir que à medida que a potência (p) da distância aumenta, as observações mais próximas recebem cada vez mais ponderação no cálculo da estimativa (Figura 2.3)

$$w(d_i) = \frac{1}{(d_i)^p}$$

em que

$w(d_i)$ - é a ponderação atribuída à observação i ;

(d_i) - mede a distância entre a observação localizada em i e a observação a estimar;

p - é potência a que se eleva a distância na função ponderadora.

Por outro lado, se a potência da distância (p) diminuir progressivamente, os pesos atribuídos às observações tornam-se cada vez mais similares. A escolha da potência da distância é, por isso, determinante do tipo da estimativa obtida. A potência $p=2$ é a mais utilizada, sendo, por isso, muitas vezes conhecido pelo método do inverso do quadrado das distâncias.

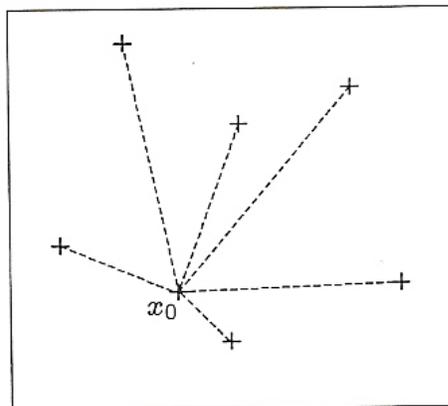


Figura 2.3: Método do inverso da potência das distâncias: o valor de x_0 é uma média ponderada das n amostras vizinhas, em que os ponderadores são determinados pelo inverso da potência das distâncias de cada uma das amostras a

x_0

Apesar deste método poder incluir um maior número de valores observados na estimação de um ponto e, por esse critério, poder ser considerado um melhor estimador que o método dos polígonos ou dos triângulos, contém no entanto uma limitação que, em alguns casos, pode ser impeditiva da sua utilização: em presença de agrupamentos preferenciais de amostras (*clusters*), o método dos polígonos ou o dos triângulos tendem a fornecer estimadores não-enviesadas, porque desagregam a influência das amostras – amostras agregadas têm menos peso que amostras isoladas. O método do inverso da potência das distâncias, pelo contrário, não “desagrega” os agrupamentos preferenciais de amostras: qualquer amostra de um grupo tem a mesma influência (isto é, o mesmo ponderador) que uma amostra isolada, desde que as distâncias ao ponto a estimar sejam as mesmas.

Independentemente destes métodos determinísticos (Média Aritmética Simples e Média Móvel, Polígonos de Influência, Triangulação e Interpolação em Função do Inverso da Potência da Distância) poderem dar resultados satisfatórios em algumas aplicações, convém ter sempre presente as suas limitações para se poder decidir sobre a sua aplicabilidade a um caso concreto:

- trata-se de métodos que têm por base critérios estritamente geométricos, alguns deles definidos de uma forma arbitrária, que podem ser contraditórios com a estrutura espacial da grandeza a estimar: por exemplo, direcções privilegiadas de continuidade espacial do fenómeno podem determinar que amostras alinhadas com o ponto a estimar, segundo essas direcções, tenham mais peso na estimação que outras que estão à mesma distância, mas segundo direcções diferentes;

- trata-se de métodos que, por serem deterministas, não fornecem medidas de incerteza relacionadas com o fenómeno, com as observações e com o método de inferência.

Os modelos geoestatísticos tentam precisamente dar resposta a estes dois pontos fundamentais de um processo de estimação através da quantificação da estrutura espacial da grandeza em estudo e da avaliação da incerteza ligada à caracterização do fenómeno espacial (Soares [37]).

2.2. Modelos de Estatística Espacial: Métodos Geoestatísticos

A quantificação da estrutura espacial da grandeza em estudo e a avaliação da incerteza associada à caracterização do fenómeno espacial são dois dos problemas básicos (dos modelos deterministas) que a Geoestatística propõe resolver através de uma metodologia não determinista, mas sim probabilista. A aplicação dos modelos probabilistas e, em particular, de modelos de funções aleatórias deve-se principalmente a duas razões: os fenómenos distribuem-se no espaço de uma forma não aleatória - possuem uma determinada estrutura e a informação disponível sobre o fenómeno - conjunto de dados amostrados (observações) é em grande parte dos casos escassa o que torna a ideia de incerteza indissociável do fenómeno.

Nestes modelos, a interpretação dos dados é feita como que se os mesmos fossem provenientes de um processo aleatório mas, na realidade não o são. Esta hipótese serve apenas de base metodológica à estimação de grandezas em áreas não amostradas e à quantificação da incerteza associada ao estimador.

A concepção de um processo aleatório que caracterize o conjunto de dados experimentais das amostras é o primeiro passo de modelação geoestatística. Contudo, não é necessária a caracterização do conjunto total de variáveis aleatórias e as funções de distribuição multivariadas, mas sim a selecção de um número restrito de parâmetros que, conjuntamente com algumas hipóteses de partida, permitem a inferência espacial.

Um processo estocástico é simplesmente, no contexto deste modelo, um modo de abordagem do conjunto de dados provenientes das amostras experimentais. Neste sentido, o primeiro passo da modelação geoestatística é a concepção de um processo aleatório que melhor caracterize o conjunto de dados experimentais das amostras ou observações.

O problema básico a resolver com a Geoestatística é o da caracterização da dispersão espacial e espaço-temporal das grandezas que definem a quantidade e a qualidade de recursos naturais, em que os atributos manifestam uma certa estrutura no espaço e/ou no tempo e o da avaliação de medidas de incerteza, tendo em conta a maior ou menor variabilidade do fenómeno espacial, a qualidade das amostras e observações, o tipo de modelo geoestatístico escolhido e o maior ou menor grau de conhecimento que se tem do fenómeno.

O seu corpo metodológico consiste basicamente num conjunto de instrumentos estatísticos que quantificam a continuidade espacial da grandeza em estudo, em modelos de interpolação espacial tendo por base a sua variabilidade estrutural e em modelos de simulação estocástica que quantificam a incerteza ligada ao fenómeno espacial.

Os métodos geoestatísticos procedem à análise de fenómenos regionalizados cuja distribuição espacial apresenta um carácter misto: parcialmente estruturado e parcialmente aleatório. Muitas vezes uma inspecção revela que várias variáveis não são “completamente aleatórias”. Pontos próximos parecem ser relacionados por uma estrutura de correlações. Existem zonas onde os valores destas correlações tendem a ser menores e outras onde estes são maiores. Variáveis com este tipo de comportamento são denominadas “variáveis regionalizadas” para salientar a particular natureza de tal variável em estudo.

Esta ideia contém dois aspectos, um aleatório, contabilizado por irregularidades locais, outro estrutural, que reflecte a característica espacial do fenómeno. Uma formulação que tenha em conta estes dois aspectos (aleatório e estrutural) terá uma interpretação probabilística.

O modelo probabilístico usual, em ciências aplicadas que estudam fenómenos com carácter aleatório no espaço, variáveis regionalizadas, consiste em representá-los por uma função aleatória, ou seja, um processo aleatório.

Um exemplo de como um método adequado de representar dados, eminentemente espacial, pode indicar a solução de um problema complexo, mesmo sem se conhecer exactamente as causas do fenómeno em análise, está bem patente no trabalho de John Snow (1855) sobre a epidemia de cólera, que alastrou em Londres no século XIX. Não era o primeiro, nem Londres era a única grande cidade europeia a enfrentar o problema: a cólera era tão comum nas metrópoles quanto o era na Índia, por exemplo. E isto se devia sobretudo às péssimas condições de vida. A Revolução Industrial atraía para os centros urbanos grandes massas, ansiosas por trabalho. Uma riqueza fabulosa estava sendo gerada, ao lado de pobreza deprimente. E doença, como sabemos, é um acompanhante inevitável da miséria.

A Rainha Victória solicitou ao seu médico particular, John Snow, que investigasse o surto. O trabalho realizado por Snow é hoje considerado o marco fundador da epidemiologia – esta sendo, por sua vez, a base da saúde pública moderna. Embora não fosse então conhecida a bactéria que causa a doença, Snow conseguiu demonstrar que a mesma estava associada à água do abastecimento. O que

foi, realmente, uma façanha científica. Mas o seu trabalho é significativo por um outro, e muito actual, aspecto.

A 31 de Agosto de 1854 surgiu no centro de Londres uma epidemia de cólera que matou mais de 500 pessoas em cerca de 10 dias. O alarme foi geral e os londrinos abandonaram a cidade em massa o que provocou uma interrupção da vida económica e social da cidade.

O diagrama da Figura 2.4, onde se representa o número de cólera registado diariamente durante a epidemia, mostra bem o rápido desenvolvimento da doença (Carvalho e Natário [8]).

O panorama era tanto mais assustador quanto à data nada se sabia sobre a causa da cólera e se pensava que a doença se espalhava através do ar ou, mais fantasiosamente, que subia em forma de vapor dos locais onde tinha sido enterradas vítimas da doença dois séculos antes.

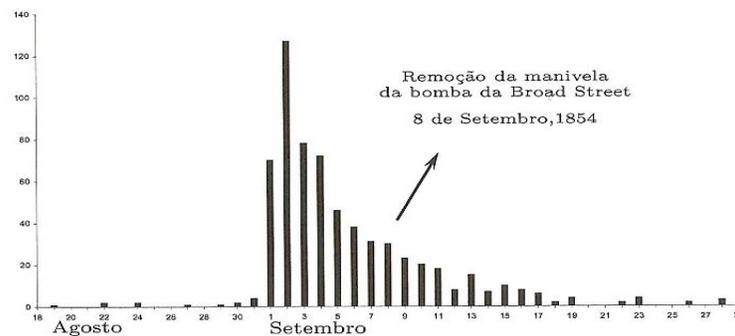


Figura 2.4: Mortes por cólera em cada dia da epidemia

No entanto, John Snow estava convencido que a doença era transmitida através de água contaminada e, para tentar provar essa teoria registou no mapa parte de Londres onde a epidemia alastrava, a localização precisa da morada de cada um dos 83 mortos por cólera de uma lista que obteve do General Register Office. No mapa que desenhou, Figura 2.5, mostra claramente que a maioria das mortes, assinaladas a pequenos traços negros nas respectivas residências, se verificaram nas imediações do poço situado na confluência da Broad Street com a Cambridge Street, marcado com dois círculos no mapa.

Apesar do mapa ser bastante informativo, John Snow fez uma investigação, porta a porta, sobre os hábitos de abastecimento de água dos 83 casos, onde pôde confirmar a correlação existente entre as mortes e a utilização de água do poço de Broad Street.

Embora tivesse observado que a água do poço não apresentava impurezas suspeitas, Snow descreveu as suas descobertas às autoridades responsáveis pelo abastecimento de água a 7 de Setembro e, no dia seguinte, a manivela da bomba do referido poço foi removida.

É erradamente atribuída a remoção do manípulo o fim deste surto de cólera. De facto como se pode observar na Figura 2.4, a epidemia nesta data já estava na sua fase descendente, muito provavelmente devido à fuga do local de grande parte da população. No entanto, a não utilização do poço contaminado foi certamente responsável pela prevenção de novos surtos quando os ocupantes regressaram às suas residências.

1 círculo- poço não infectado;

2 círculos- poço infectado da Broad Street;

■ - número de mortes por cólera no local, proporcional ao comprimento do rectângulo

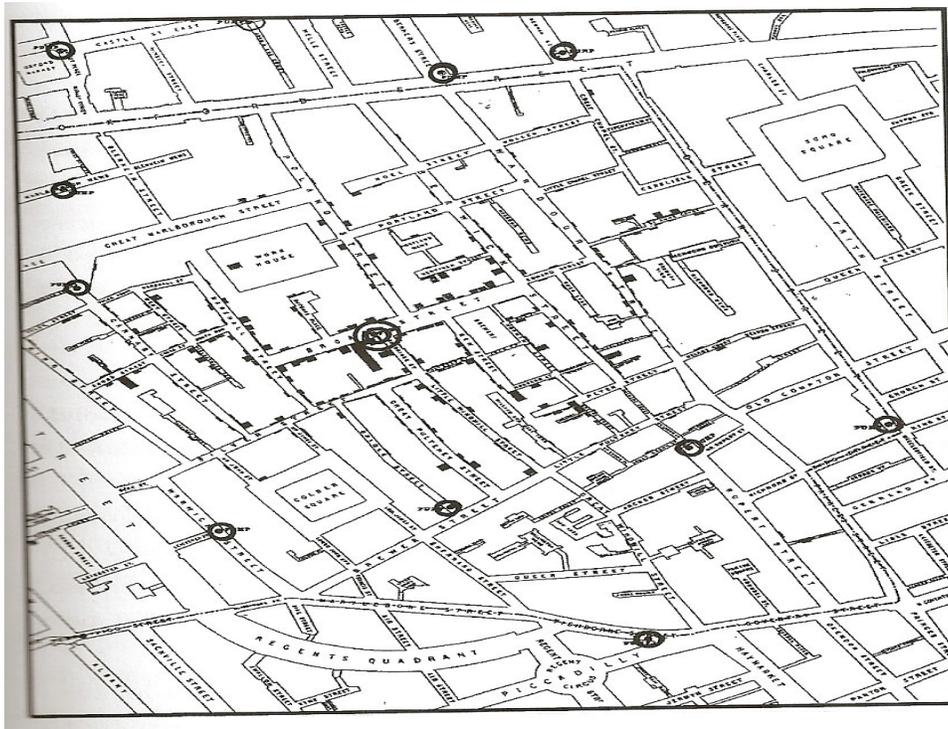


Figura 2.5: Mapa criado pelo Dr. John Snow mostrando os agrupamentos de casos de cólera na epidemia de Londres (1854)

Em 1886 a descoberta do vibrião da cólera veio confirmar a hipótese tão brilhantemente avançada por Snow, cujo eloquente trabalho é com frequência apontado como o primeiro exemplo de

aplicação da representação espacial dos dados na descoberta de solução para um problema de Saúde Pública.

Mais recentemente, outro problema deu origem ao desenvolvimento de outro ramo de análise espacial de dados que é habitualmente conhecido por Geoestatística. Trata-se da avaliação da rentabilidade de exploração de uma mina através da estimação da quantidade de minério aí existente feita com base em amostras retiradas em locais igualmente espaçados no terreno, usando um método empírico de cálculo apresentado em 1951 pelo engenheiro de minas sul-africano D. J. Krige.

Este problema de predição espacial, foi mais tarde tratado através do primeiro Tratado Teórico de Georges Matheron [29] e [30] em França, sempre no contexto da exploração mineira, e por Gandim [20] na União Soviética, no contexto da Meteorologia.

Matheron, que ao trabalhar com dados de concentração de ouro, concluiu que somente a informação dada pela variância era insuficiente para explicar o fenómeno em estudo. Para tal, seria necessário levar em consideração a distância entre as observações. A partir daí surge o conceito de Geoestatística, década de 60, ligada à escola francesa – Centre de Geostatistic de Fontainebleu da École de Mines, que leva em consideração a localização geográfica e a dependência espacial.

A primeira fase da Geoestatística, denominada por Geoestatística Mineira, ficou consolidada ao surgirem os primeiros modelos para abordar os problemas ligados aos recursos minerais como fenómenos espaciais. Como estes modelos, e associada a um método de interpolação – *Krigagem ou Kriging* – surge a noção de variograma, que expressa a dependência espacial entre amostras vizinhas; a noção de anisotropia espacial, que não é mais do que continuidade espacial diferenciada segundo direcções diferentes no espaço; a variabilidade à pequena escala (efeito pepita) e o efeito de suporte.

A palavra Geoestatística, etimologicamente, significa estudo estatístico de fenómenos naturais. No entanto, desde os trabalhos iniciais de Matheron, é definida como a aplicação do formalismo das funções aleatórias ao reconhecimento e estimação de fenómenos naturais.

Nos finais dos anos 70 e início dos anos 80, a teoria da Geoestatística é aplicada com sucesso na área das ciências do ambiente. Nesta segunda etapa da sua evolução, os modelos geoestatísticos assimilam as especificidades dos dados relativos ao campo em estudo. Desta forma, o objecto de caracterização da dispersão espacial, de grandezas provenientes da amostragem dos solos, ou referentes à monitorização da qualidade da água e ar, deixa de ser a inferência de valores médios para ser a previsão de valores extremos.

Em meados dos anos 80, surge o terceiro grande salto na evolução do campo metodológico geoestatístico, com aplicações no domínio das áreas petrolíferas. A escola da universidade de Stanford de André G. Journel teve um papel fundamental nesta fase, onde os modelos estocásticos de reservatórios petrolíferos através da simulação de imagens, não só se impõem como a grande alternativa na modelação de recursos petrolíferos, como se tornam instrumentos privilegiados para a quantificação da incerteza nos outros domínios da terra e do ambiente.

Sendo o *Kriging* o método de estimação geoestatístico mais utilizado e divulgado em inúmeros campos de aplicação, exemplos da prática de *Kriging* podem ser encontrados em vasta bibliografia (Guarascio, David e Huijbreghts [21], Verly, David, Journel e Marechal [42], Armstrong [3], Soares [36], Baafi [4]).

Assim, como ciência aplicada, a Geoestatística desenvolveu um conjunto de modelos para a resolução de problemas concretos relacionados com a caracterização dos fenómenos espaciais e que não era possível por parte da Estatística clássica, nomeadamente, "...um segundo modelo de uma lei de distribuição – correlograma, covariância – só passa a ser um instrumento medidor da continuidade ou da dispersão espacial de uma grandeza, contribuindo para um posterior modelo de interpolação, se incorporar na sua estimação o conhecimento das características do fenómeno..." (Soares [36]).

A Geoestatística tem por objecto a caracterização da dispersão espacial e espaço-temporal das grandezas que definem a quantidade e qualidade de recursos naturais, tais como florestas, recursos geológicos ecológicos, hidrológicos, ou outros fenómenos espaciais em que os atributos manifestem uma certa estrutura no espaço e/ou tempo - contaminação de solos e aquíferos, temperatura e pluviometria de uma região.

O que se conhece daqueles fenómenos espaciais resume-se normalmente a um conjunto discreto e limitado de amostras ou observações. O problema básico a resolver com a Geoestatística é o da caracterização da distribuição espacial daquelas grandezas e o da avaliação de medidas de incerteza, tendo em conta maior ou menor variabilidade do fenómeno espacial, a qualidade das amostras e observações, o tipo de modelo geoestatístico escolhido e o maior ou menor grau de conhecimento que se tem do fenómeno.

O seu corpo metodológico consiste basicamente num conjunto de instrumentos estatísticos que quantificam a continuidade espacial da grandeza em estudo, em modelos de interpolação espacial tendo por base a sua variabilidade estrutural e em modelos de simulação estocástica que quantificam a

incerteza ligada ao fenómeno espacial. Estas grandezas classificam-se tipicamente em três tipos de dados espaciais: dados referentes a pontos, dados referentes a áreas e dados referentes a processos pontuais.

Nos dados referentes a pontos são estudados conjuntos finitos de vectores $\{(z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))\}$, constituídos por observações das mesmas características de um fenómeno de n localizações precisas de um domínio espacial contínuo limitado. O fenómeno pode ser observado em todos os pontos de domínio fixo, D , num campo aleatório $\{Z(x), x \in D\}$ com $D \subseteq \mathbb{R}^2$ contendo um rectângulo de área não nula. Um exemplo de dados deste tipo é apresentado na Figura 2.6.

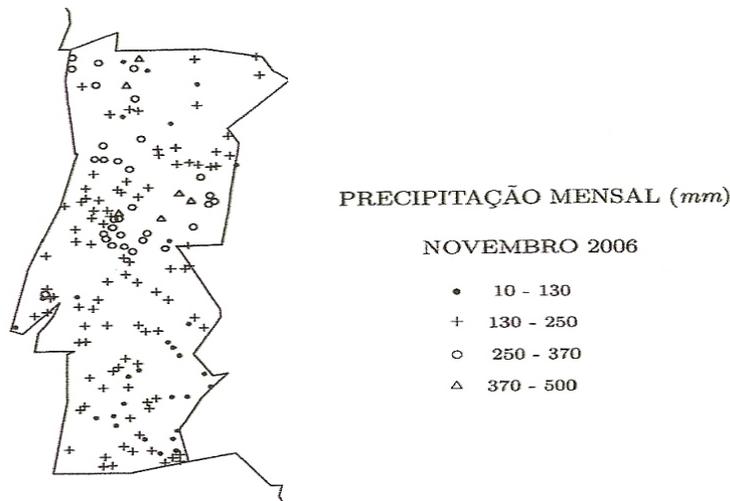


Figura 2.6: Precipitação do mês de Novembro de 2006 registada em 158 estações da rede meteorológica nacional

O fenómeno em análise é a precipitação mensal em Portugal continental e os dados referem-se à precipitação acumulada, medida em milímetros, registada em 158 estações da rede meteorológica nacional durante o mês de Novembro de 2006.

Os dados referentes a áreas, utilizam-se para referir conjuntos de vectores $\{(z(B_1), z(B_2), \dots, z(B_n))\}$, constituídos por observações das mesmas características em n sub-regiões de uma partição de um domínio espacial fixo limitado. Só serão consideradas observações unidimensionais em que $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e se encontra particionado num número finito de regiões regulares ou irregulares de área não nulo com fronteiras bem definidas. O campo aleatório Z usado para modelar

este tipo de observações tem como espaço de índices a referida partição de D , cujos elementos são designados por células, áreas ou blocos, sendo por isso notados por B , em vez de x_i . Frequentemente, escolhe-se um ponto especial em cada bloco. Na Figura 2.7 apresenta-se um exemplo da representação deste tipo.

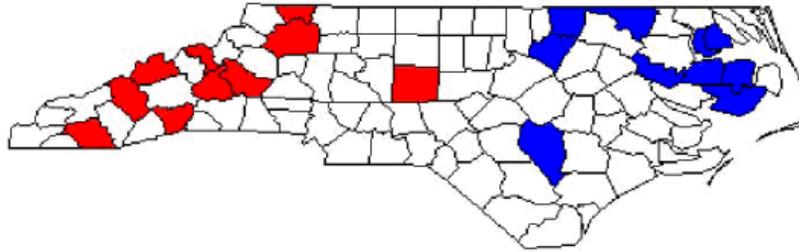


Figura 2.7: Dados de morte súbita infantil

Os dados referentes a processos pontuais podem ser exemplificados pelas localizações no mapa da Figura 2.7 das moradas de casos de morte por cólera, ou pelas localizações exactas de árvores com certas características numa floresta. Os dados são conjuntos de localizações aleatórias às ocorrências de um certo acontecimento de interesse de domínio fixo, W , de IR^2 designado por janela. Cada conjunto de localizações, configuração, é notado por $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ e serve de base ao processo, designado por processo pontual, usado na modelação. Por vezes, a complementar cada ponto x das configurações do processo pontual, existe informação adicional sobre o tipo de ocorrência aí verificada, sob a forma de outra variável aleatória com valores num conjunto de marcas. Neste caso o processo chama-se processo pontual marcado. A análise de dados referentes a processos pontuais, tem frequentemente como objectivo o estudo do agrupamento das ocorrências no espaço. Trata-se de verificar se as localizações tendem a estar aglomeradas espacialmente num ou vários focos ou se, pelo contrário, se encontram espalhadas independentemente e homoganeamente no espaço. Outro exemplo de dados deste tipo é apresentado na Figura 2.8.

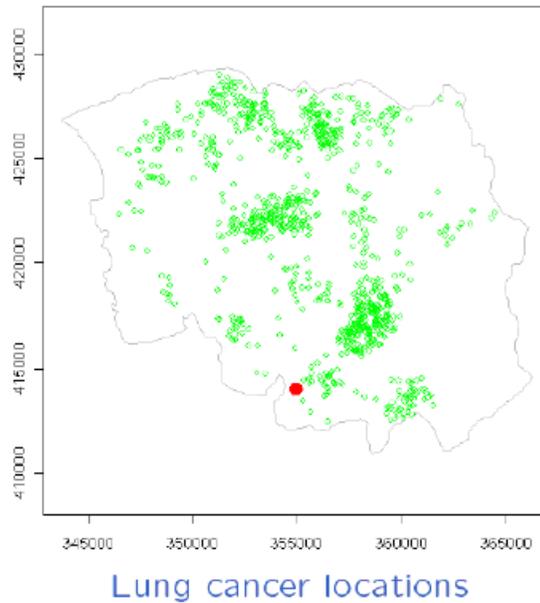


Figura 2.8: Dados do cancro de pulmão

Os fenómenos espaciais nas Ciências da Terra e do Ambiente têm normalmente algumas especificidades próprias que os distinguem dos demais corpos que podem ser objecto da modelação matemática e física: existe normalmente um acentuado grau de incerteza ligado ao seu conhecimento, são únicos como realizações espaciais, o que significa basicamente a impossibilidade de repetição da amostra ou observação num dado espaço e momento.

Estas características constituem as razões principais para que os dados provenientes daqueles fenómenos espaciais tivessem estado, de certo modo, afastados do âmbito e atenção da Estatística clássica: por um lado, não são realizações de uma variável aleatória, pois são correlacionados e, por outro, não preenchem, com toda a coerência e consistência teórica, os requisitos de um processo aleatório ergódico e estacionário, pois constituem apenas uma só realização. Como faz notar Matheron [29], a Geoestatística resulta da reflexão sobre o carácter ambíguo da operação que consiste em interpretar em termos probabilistas um fenómeno natural único e parcialmente desconhecido.

3. Teoria dos Processos Aleatórios

3.1. Variáveis Aleatórias

Chama-se função aleatória (ou processo aleatório ou campo aleatório) a um conjunto $\{Z(x), x \in D\}$ de variáveis aleatórias $Z(x)$ definidas numa região D do espaço real de dimensão finita positiva, isto é, definidas em $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

Suponha-se uma série de n localizações espaciais $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e os valores de uma variável contínua objecto de estudo, $\{z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n)\}$, observados nestas localizações. Cada um dos valores $z(x)$ pode ser visto como a realização particular de uma variável aleatória $Z(x)$.

Um processo aleatório $\{Z(x), x \in D\}$ fica definido através das distribuições conjuntas de qualquer número finito de variáveis aleatórias $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$, para todo o inteiro positivo n e qualquer série de pontos espaciais $x_i \in D$; distribuições que devem satisfazer as condições de simetria e de consistência de Kolmogorov.

Uma exposição mais aprofundada da teoria dos processos aleatórios pode ser vista em Yaglom [41] e Cressie [11].

Usualmente, chama-se processo espacial a um processo aleatório em que a região D está contida no espaço real bidimensional ou tridimensional, isto é, em \mathbb{R}^2 ou em \mathbb{R}^3 .

Para cada $x \in D$, $Z(x)$ é uma variável aleatória. Desta forma, pode-se definir a média do processo aleatório como $E[Z(x)] = \mu_Z(x)$, $\forall x \in D$, quando a esperança existe.

Para x_1 e $x_2 \in D$ definimos a função de covariância do processo aleatório como $Cov[Z(x_1), Z(x_2)] = E\{[Z(x_1) - \mu_Z(x_1)] - [Z(x_2) - \mu_Z(x_2)]\}$

quando a covariância existe.

Logo, para $x \in D$

$$Cov[Z(x), Z(x)] = E\{[Z(x) - \mu_Z(x)]^2\} = Var[Z(x)].$$

Em situações práticas, desconhece-se a lei de probabilidade que define o processo aleatório do qual a realização $z(x)$ é disponível. Deve-se, portanto, inferir tal distribuição (ou pelo menos alguns dos seus momentos), o que requer várias realizações $z_1(x), z_2(x), \dots, z_k(x)$ do processo $Z(x)$. Porém, na realidade apenas temos uma simples realização $\{z(x_i)\}$ de $Z(x_i)$ (variáveis aleatórias correlacionadas entre si) nos pontos x_i , $i = 1, \dots, n$, o que leva a necessidade de formular algumas hipóteses a respeito do processo aleatório para que a inferência estatística seja possível.

A hipótese (restrição) usual na teoria de processos aleatórios é a de estacionaridade. Assumem-se diversos graus de estacionaridade da função aleatória, de modo que a inferência de algumas estatísticas seja possível. Estas hipóteses traduzem condições ligadas à noção intuitiva de homogeneidade espacial.

A hipótese mais usual na teoria das funções aleatórias é a de estacionaridade que consiste em admitir a invariância da lei de distribuição por translação (pode ser visto em Cressie [10]).

Na prática, no entanto, a lei de distribuição nunca é conhecida, pois os dados são insuficientes para a inferir. Assim, em algumas situações é desejável disponibilizar-se de um conceito de estacionaridade menos restritivo, envolvendo apenas os dois primeiros momentos que são suficientes para aproximar correctamente a solução do problema encontrado.

As duas hipóteses restritivas mais comuns (estacionaridade de segunda ordem e estacionaridade intrínseca), permitem reduzir os requisitos de que depende a função aleatória e tornar exequível a sua

utilização na resolução de problemas práticos como o nosso, postulam apenas a estacionaridade dos primeiros momentos.

Definição 3.1

Um processo aleatório $\{Z(x), x \in D\}$ diz-se estacionário de segunda ordem em $D \subseteq \mathbb{R}^d$, se

i) o valor médio do processo existe e é constante em D , isto é

$$E[Z(x)] = \mu_Z(x) = \mu_Z, \quad \forall x \in D;$$

ii) para cada duas variáveis aleatórias $Z(u)$ e $Z(v)$ a função covariância existe e depende apenas da diferença entre u e v , isto é

$$\text{Cov}[Z(u), Z(v)] = C_Z(u - v), \quad \forall u, v \in D.$$

A estacionaridade da covariância implica que a variância $\text{Var}[Z(x)]$ existe e não depende de x (implica a estacionaridade da variância). Isto é, $\text{Var}[Z(x)] = C_Z(0)$, $\forall x \in D$.

A função $C_Z(\cdot)$ chama-se covariograma ou função de covariância estacionária do processo $Z(\cdot)$.

Quando um processo aleatório é estacionário de segunda ordem podemos definir outra função, o correlograma ou a função de correlação estacionária, como

$$\rho_Z(h) = \frac{C_Z(h)}{C_Z(0)} \in [-1, 1], \text{ em que } h \text{ é qualquer vector de } D \text{ e assumindo } C_Z(0) > 0.$$

O correlograma, bem como o covariograma, modela a estrutura de dependência espacial do processo aleatório (estacionário de segunda ordem).

Como muitas vezes não é evidente garantir que a variância de $Z(x)$ seja finita, é conveniente, em muitos casos de aplicação da estatística espacial, assumir que apenas os incrementos da função (acréscimos espaciais) sejam estacionários de segunda ordem.

Definição 3.2

Um processo aleatório $\{Z(x), x \in D\}$ diz-se intrinsecamente estacionário em D (ou de estacionaridade intrínseca em D) se

i) o valor médio do processo existe e é constante em D , isto é

$$E[Z(x)] = \mu_z(x) = \mu_z, \quad \forall x \in D;$$

ou, equivalentemente

$$E[Z(u) - Z(v)] = 0, \quad \forall u, v \in D;$$

ii) a variância $Var[Z(u) - Z(v)]$ existe para todo $u, v \in D$ e depende apenas da diferença $u - v$, isto é

$$Var[Z(u) - Z(v)] = E\{[Z(u) - Z(v)]^2\} = 2\gamma_z(u - v), \quad \forall u, v \in D.$$

A função $2\gamma_z(\cdot)$ é denominada por variograma do processo $Z(\cdot)$.

A função $\gamma_z(\cdot)$ é denominada por semivariograma do processo $Z(\cdot)$

Observemos alguns resultados que caracterizam as funções covariograma e semivariograma:

Propriedade 3.1

Se $C_z(\cdot)$ é a função de covariância (ou covariograma) do processo aleatório estacionário de segunda ordem $Z(\cdot)$, então é uma função semi-definida positiva, isto é

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_z(x_i - x_j) \geq 0,$$

para todo $n \geq 1$, todo o real $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e todo $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$.

Propriedade 3.2

Se $C_z(\cdot)$ é o covariograma do processo aleatório estacionário de segunda ordem $Z(\cdot)$, então

$$i) C_z(0) = Var[Z(x)] \geq 0;$$

$$ii) C_z(h) = C_z(-h), \quad \forall h \in \mathbb{R}^d;$$

$$iii) |C_z(h)| \leq C_z(0), \quad \forall h \in \mathbb{R}^d.$$

A condição iii) é consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Quando apenas se assume a hipótese de estacionaridade intrínseca o semivariograma existe mas a existência do covariograma não é garantida.

A definição de variograma como a variância dos acréscimos (incrementos) espaciais de um processo aleatório faz com que se verifiquem as seguintes propriedades:

Propriedade 3.3

Se $\gamma_Z(\cdot)$ é o semivariograma de um processo aleatório intrinsecamente estacionário $Z(\cdot)$, então

- i) $\gamma_Z(0) = 0$;
- ii) $\gamma_Z(h) = \gamma_Z(-h)$, $\forall h \in \mathbb{R}^d$;
- iii) $\gamma_Z(h) > 0$, $\forall h \neq 0$;
- iv) $\lim_{\|h\| \rightarrow \infty} \gamma_Z(h) = c_0$ (efeito de pepita).

Outra propriedade importante que pode ser demonstrada, sobre o semivariograma de um processo aleatório intrinsecamente estacionário $Z(\cdot)$ é o da seguinte razão de crescimento

$$\lim_{\|h\| \rightarrow \infty} \frac{\gamma_Z(h)}{\|h\|^2} = 0$$

condição que nos diz que o semivariograma $\gamma_Z(h)$ tem um crescimento mais lento que $\|h\|^2$. Se o crescimento for mais rápido que $\|h\|^2$, então é porque a hipótese intrínseca não é válida.

Convém salientar que na hipótese mais restritiva (na medida em que abrange uma menor variedade de fenómenos) de estacionaridade de segunda ordem de um processo aleatório $Z(\cdot)$, o variograma e o covariograma (covariância espacial) existem e são estruturalmente equivalentes. Assim, a relação estrutural (que se deduz facilmente) entre estas duas medidas é

$$C_Z(h) = C_Z(0) - \gamma_Z(h) \Leftrightarrow \gamma_Z(h) = C_Z(0) - C_Z(h). \quad (3.1)$$

Além disso, quando (o que nem sempre acontece) se verifica que $\lim_{\|h\| \rightarrow \infty} C_Z(h) = 0$

então, $\lim_{\|h\| \rightarrow \infty} \gamma_Z(h) = C_Z(0) = \text{Var}[Z(\cdot)]$ e $C_Z(0)$ é denominado por valor do patamar (ou patamar) do semivariograma $\gamma_Z(\cdot)$.

Define-se patamar parcial como a diferença entre o patamar e o efeito de pepita, isto é, $C_Z(0) - c_0$.

Propriedade 3.4

Um processo aleatório $\{Z(x), x \in D\}$ é uma combinação linear de processos aleatórios não correlacionados $\{Z_i(x), x \in D\}$, $i = 1, \dots, k$, isto é

$$Z(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Z_i(x)$$

com $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_0^+$, então

- i) se $Z_i(\cdot)$ é estacionário de segunda ordem com covariograma $C_{Z_i}(\cdot)$ para cada i , então $Z(\cdot)$ é também estacionário de segunda ordem com covariograma dado por

$$C_Z(h) = \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 C_{Z_i}(h), \quad \forall h;$$

- ii) se $Z_i(\cdot)$ é intrinsecamente estacionário com covariograma $\gamma_{Z_i}(\cdot)$ para cada i , então $Z(\cdot)$ é também intrinsecamente estacionário com covariograma dado por

$$\gamma_Z(h) = \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \gamma_{Z_i}(h), \quad \forall h.$$

A prova desta propriedade é imediata. A Propriedade 3.4 diz que qualquer combinação linear de covariogramas com coeficientes não negativos é ainda um covariograma e o mesmo acontece para os semivariogramas.

3.2. Análise da Continuidade Espacial

A continuidade espacial existe em quase todos os casos, nos quais se estuda uma qualquer característica quantitativa, $z(x)$, de um dado recurso ou fenómeno espacial. A existência de continuidade espacial, em maior ou menor grau, quer dizer que, dois valores próximos um do outro, em termos espaciais, são mais semelhantes do que aqueles que estão mais afastados. A continuidade espacial tem um papel crucial na caracterização e quantificação do modo como se dispersa espacialmente a característica $z(x)$ – o grau de continuidade espacial, o modo diferencial como se dispersa no espaço (anisotropias – quando a continuidade espacial varia nas diferentes direcções do

espaço). Análise estrutural é como também se denomina esta prática na linguagem geoestatística (Pereira [33]) e tem ainda um outro papel fundamental – é o alicerce principal para todo o processo de inferência espacial – estimação e simulação.

Nas próximas secções serão abordados os instrumentos que descrevem e quantificam a continuidade espacial.

3.2.1. Variograma, Covariograma e Correlograma

O variograma, covariograma e correlograma são as funções habitualmente utilizadas em Geoestatística para modelar a dependência espacial e espaço-temporal, e são consideradas como um parâmetro crucial do processo.

Das funções covariância $C_z(h)$, semivariograma $\gamma_z(h)$ e correlograma $\rho_z(h)$, a mais comum em trabalhos em Ciências Aplicadas que estudam fenómenos envolvendo variáveis regionalizadas é o semivariograma. Em Geoestatística, usa-se mesmo o nome variografia para denominar a fase inicial de qualquer estudo geoestatístico cujo objectivo é a construção de um modelo de variograma (que é considerado como o instrumento básico desta disciplina) que incorpore e sintetize os traços estruturais mais importantes da variável regionalizada, como reflexo dos principais aspectos da regionalização.

O facto do estimador do variograma ser quase sempre preferido ao estimador da covariância, deve-se a que em muitos processos aleatórios não existe covariância mas existe variograma (processos não-estacionários), sendo a covariância posteriormente deduzida indirectamente pela relação (3.1). Além disso, pode-se provar que o estimador do variograma (empírico) é não enviesado enquanto que o do covariograma (empírico) é enviesado (Cressie [12]); também, usualmente, o estimador do variograma possui variância inferior à do estimador do covariograma.

Os variogramas podem ser de três naturezas:

(i) variograma empírico: é aquele que é obtido a partir do conjunto de observações derivadas da amostragem realizada;

(ii) variograma teórico: é o modelo de variograma de referência;

(iii) variograma verdadeiro: é o variograma real, que é sempre desconhecido.

O objectivo fundamental de um estudo estrutural é determinar qual o variograma teórico que

melhor se ajusta ao variograma empírico, de tal modo que a partir deste modelo, possam ser feitas inferências em relação ao variograma verdadeiro.

O variograma, em termos práticos, é a ferramenta matemática que permite estudar a dispersão natural das variáveis regionalizadas. Ele mede a variabilidade espacial entre pares de valores separados por uma distância pré-estabelecida $\|h\|$.

Os métodos, para cálculo do semivariograma empírico, mais usuais são o dos momentos, de Matheron [29] e o robusto, de Cressie [12].

Vamos, apenas, apresentar o método dos momentos em que o semivariograma é calculado pela média aritmética do quadrado das diferenças de todos os pares de pontos que estão separados de um vector h

$$\hat{\gamma}_Z(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{(i,j) \in N(h)} (Z(x_i) - Z(x_j))^2,$$

onde $N(h) = \{(i, j) : x_i - x_j = h; i, j = 1, \dots, n\}$ e $|N(h)| = \#N(h)$.

Assim, $|N(h)|$ é número de pares de pontos distanciados de $h = \|h\|$ e alinhados segundo a direcção do vector h .

A representação dos pares de valores $\left(h, \hat{\gamma}_Z(h)\right)$ num sistema de eixos h representa o semivariograma experimental.

Na aplicação destes dois métodos supõe-se que a malha amostral seja regular. No caso da malha não ser regular, é necessário fazer uma regularização angular e por classes de distâncias, para que se possa efectuar o cálculo do variograma amostral, como iremos apresentar mais tarde.

Definição 3.3

Um processo aleatório $\{Z(x), x \in D\}$ diz-se isotrópico se o seu semivariograma/covariograma $(\gamma_Z(h) / C_Z(h))$ depende do vector h apenas na sua norma. Isto é,

$$\gamma_Z(h) = \gamma_Z(\|h\|), \quad \forall h \in \mathbb{R}^d \quad / \quad C_Z(h) = C_Z(\|h\|), \quad \forall h \in \mathbb{R}^d.$$

Caso contrário, diz-se anisotrópico.

Nos processos aleatórios isotrópicos os semivariogramas/covariogramas em dois locais espaciais diferentes dependem apenas da distância entre os locais; a direcção é irrelevante. Assim,

i) se $Cov(Z(x), Z(x+h)) = C_Z(\|h\|)$ o covariograma é isotrópico;

ii) se $Var(Z(x) - Z(x+h)) = 2\gamma(\|h\|)$ o variograma é isotrópico.

Nos processos aleatórios anisotrópicos os semivariogramas/covariogramas dependem da direcção do vector h .

Os tipos, mais comuns, de anisotropia ocorrem quando os semivariogramas construídos em diferentes direcções apresentam o mesmo modelo, a mesma variabilidade (o mesmo patamar), porém amplitudes (amplitude é o valor de $\|h\|$ para o qual o semivariograma se estabiliza, isto é, $\gamma_Z(h) = c_1$, c_1 é uma constante, irá ser definido mais à frente) diferentes ou quando os semivariogramas construídos em diferentes direcções apresentam características de variabilidade diferentes (diferentes patamares).

No primeiro caso, a anisotropia pode ser reduzida ao caso isotrópico por meio de uma transformação linear de h . O segundo é o tipo mais complexo de anisotropia a ser tratada, pois na impossibilidade de se encontrar uma transformação linear, tenta-se a correcção através de uma composição de modelos geométricos, tratados separadamente.

O objectivo da correcção de anisotropia é obter um único semivariograma isotrópico que possa modelar a variabilidade espacial do fenómeno em estudo. A isotropia é muito importante porque é fácil de interpretar e esta característica ajuda na compreensão do processo e na interpretação do modelo e além disso, reduz a carga dos cálculos computacionais.

Anteriormente, foi referido o facto de os pares de valores $(z(x), z(x+h))$, calculados para diversos valores de h , serem o instrumento que fornece a mais completa descrição da continuidade espacial mas também que essa informação requer algum tipo de compilação que pode ser efectuada por uma das três funções - covariância, correlograma e variograma $(c(h); \rho(h); \gamma(h))$, sendo esta última a que tradicionalmente é escolhida.

O variograma é parte fundamental do processo de análise da continuidade espacial e posteriormente do processo de estimação, inclusive já foram apresentados vários modelos teóricos e o processo de ajustamento de um variograma experimental por combinações desses modelos.

No variograma omnidireccional estão reunidas todas as direcções possíveis fazendo com que este seja também um variograma de perda no sentido em que é uma união de várias direcções. Neste sentido, surge uma outra razão que conduz à necessidade de construção de variogramas direccionais ao invés de omnidireccionais: na estimação de um ponto, obtida com a utilização de um variograma omnidireccional, vai ser dado o mesmo peso a amostras que estão à mesma distância do ponto, embora em diferentes direcções, mesmo que amostras que distem menos do ponto possam influenciar mais na estimação.

Um bom exemplo desta situação pode ser dado ao imaginar a estimação de uma determinada grandeza que foi observada ao longo de um rio e que é influenciada pela corrente.

Ao estimar um ponto x_0 no centro de um rio é natural que as amostras localizadas no centro do mesmo tenham uma maior influência na estimação de x_0 do que as amostras localizadas nas margens (já que a corrente do rio actua sobre a grandeza observada/estimada), embora as últimas possam estar mais próximas espacialmente do ponto x_0 . Este é um caso típico em que se deve construir um variograma direccional e não omnidireccional. Ao construir o variograma direccional a direcção da corrente será, em princípio, a de maior continuidade espacial e portanto permite que seja dado maior peso a observações que embora mais distantes do ponto a estimar têm uma maior influência na estimação.

A construção do variograma experimental direccional exige que se definam duas tolerâncias, uma angular e outra em torno do passo h , ou seja, são definidas classes de ângulos e de distâncias.

Os valores das tolerâncias dependem da disposição espacial das amostras, bem como da sua orientação e alguns aspectos devem ser considerados para a definição dos mesmos:

- quando na área a estimar as observações conhecidas são em número reduzido, a tendência é para um aumento das amplitudes/tolerâncias de modo a conseguir-se um maior número de pares de pontos no variograma (o caso extremo é o variograma omnidireccional). Contudo, se o fenómeno em estudo é anisótropo, o aumento considerável da tolerância angular pode resultar na atenuação das amplitudes, o que conduz à sobrestimação das amplitudes das direcções de menor continuidade espacial e a subestimação das amplitudes das direcções de maior continuidade;
- o aumento excessivo da tolerância em torno de h (aumento da amplitude das classes de h) implica à sobrestimação dos efeitos de pepita;

- o cálculo do variograma experimental não deve exceder valores de h superiores a \square da dimensão do campo A na direcção de h .

Geometricamente, os pesos estão relacionados com o modo como se constroem os variogramas. No variograma omnidireccional as classes de ângulos e de distância tomam uma forma esférica e por isso o peso de cada amostra para a estimação de um determinado ponto é o mesmo independentemente da direcção; enquanto que, os variogramas direccionais tomam a forma de dois cones simétricos [uma vez que o variograma é uma função simétrica em relação a h e por isso o peso é maior para amostras que estão na direcção do variograma dentro das respectivas tolerâncias, Figuras 3.1 e 3.2.

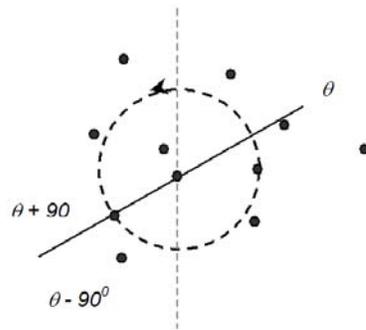


Figura 3.1: Cálculo do variograma omnidireccional

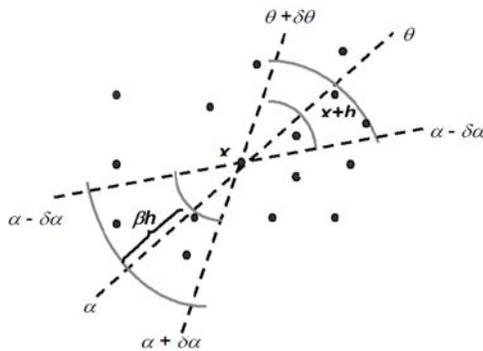


Figura 3.2: Cálculo do variograma segundo uma determinada direcção

Na prática, são então construídos dois variogramas direccionais para os quais a continuidade espacial seja maior e o facto das amostras estarem irregularmente espaçadas implica que sejam

permitidas uma certa tolerância na direcção e nas distâncias, ou seja, uma tolerância angular e uma tolerância em torno do passo h (que corresponde a uma amplitude nas classes de h), respectivamente.

Contudo, a construção do variograma omnidireccional, que contém mais pares de pontos do que qualquer variograma direccional, continua a estar presente na análise da continuidade espacial servindo de ponto de partida para estabelecer alguns parâmetros requeridos no cálculo do variograma experimental (direccional). Por outro lado, se o variograma omnidireccional não produz uma estrutura clara de continuidade espacial, não se deve esperar muito sucesso com o variograma direccional e se for mesmo uma adversidade devem-se procurar as razões para o sucedido.

Nestes casos é importante relembrar que o variograma é muito sensível e pode ser gravemente perturbado por um pequeno número de valores podendo exigir mesmo a sua retirada (desde que em número pouco significativo) apenas para a construção do variograma (aquando da estimação, os pontos amostrados que foram retirados para construção do variograma já foram recolocados). Se pelo contrário, o variograma omnidireccional for bem comportado, deve-se proceder à exploração do modelo de anisotropia com vários variogramas direccionais que na prática já existe alguma informação anterior sobre os eixos de anisotropia, como por exemplo do resultado da análise espacial (Isaaks e Srivastava [25]).

Numa situação de analogia entre o variograma omnidireccional, que é utilizado especialmente em situações de isotropia cujo número de observações é reduzido, e os variogramas direccionais, que são utilizados nas restantes situações, o variograma omnidireccional corresponde ao variograma direccional cuja tolerância angular é de 90 graus.

Depois de escolhidas as duas direcções, amplitudes e tolerâncias dos variogramas cuja continuidade espacial é maior, é necessário transpor toda essa informação obtida para uma função geral representativa. Quer isto dizer, que o passo seguinte é fazer o ajustamento/modelação dos dois variogramas escolhidos, por uma função geral – curva atenuada média quantificadora da continuidade espacial de $z(x)$.

A partir dos dados conhecidos experimentalmente, consegue-se assim inferir um andamento a $\gamma(h)$ de modo a que este seja representativo para todos os valores de h e para toda a área que se pretende estimar e por onde estão distribuídos os dados amostrados. Num modelo único e coerente de variograma ficam sintetizados, o grau de continuidade, anisotropias e imbricamentos.

Portanto, esta etapa é extremamente importante num processo de estimação. É natural que quanto melhor for a qualidade da síntese das características estruturais do fenômeno espacial, melhor será também a estimação originada pela mesma.

Não é possível ajustar um variograma - construir um modelo por meio de interpolação dos pontos experimentais, por qualquer tipo de função. Essas funções interpoladoras são funções de um número reduzido de parâmetros e a sua escolha é limitada àquelas que fornecerem soluções estáveis para o cálculo dos estimadores lineares. Impõe-se portanto, que os variogramas e covariâncias sejam definidos positivos.

Para a covariância ser definida positiva é necessário que se verifique a condição:

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j C(x_i, x_j) \geq 0, (i, j) \in A.$$

que diz, que qualquer combinação linear de covariâncias entre pares de pontos da área A , $(i, j) \in A$, é definida positiva ou nula.

Nota: A covariância entre duas variáveis aleatórias depende somente do vector h que as separa (admitindo a sua estacionaridade) portanto, como aqui esse vector h depende de i e j , $C(Z(x_i), Z(x_j))$ pode representa-se agora por $C(x_i, x_j)$.

Se considerar uma variável $Z(x_0)$ como sendo o resultado de uma combinação linear das variáveis aleatórias $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$,

$$Z(x_0) = \sum_i \lambda_i Z(x_i)$$

então uma covariância definida positiva garante que a variância de $Z(x_0)$ é sempre positiva:

$$\text{Var}\{Z(x_0)\} = E\{[Z(x_0)]^2\} - E\{[Z(x_0)]\}^2 \geq 0.$$

Já se tinha visto que o variograma se pode escrever à custa da covariância:

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

utilizando esta expressão vem que $\text{Var}\{Z(x_0)\} = C(0) \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j - \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j) \geq 0$.

No caso de $C(0)$ não existir em funções aleatórias não estacionárias (variogramas sem patamar), a variância de $Z(x_0)$ existe se $\sum_i \lambda_i = 0$. Ou seja, a condição necessária de positividade da variância é garantida se $\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i x_j) \leq 0$, condicionada à soma dos ponderadores ser nula.

3.2.2. Modelos de Anisotropia

A continuidade espacial de um dado recurso ou fenómeno natural nem sempre é igual nas várias direcções do espaço. No caso de ser igual, o variograma (ou covariância) tem o mesmo comportamento em todas as direcções do espaço, o que quer dizer que depende somente do módulo do vector h , e diz-se que a característica em estudo tem uma estrutura isótropa. Mas, se pelo contrário a continuidade espacial varia nas diferentes direcções do espaço, existindo uma direcção particular de maior continuidade espacial, o que implica que o comportamento do variograma (ou covariância) também seja diferente consoante essas direcções, então a característica em estudo tem uma estrutura anisótropa.

O objectivo principal da modelação de estruturas anisótropas é reduzir as diferentes estruturas de continuidade das diferentes direcções a um único modelo, ou seja, transformá-las de modo a serem equivalentes a uma estrutura isótropa.

São dois os modelos de anisotropia mais comuns – o modelo de anisotropia geométrica que é caracterizada pelo facto dos seus variogramas terem o mesmo modelo com o mesmo patamar em todas as direcções, mas amplitudes diferentes e o modelo de anisotropia zonal que é caracterizada pelo facto dos seus variogramas terem a mesma amplitude, mas diferentes patamares em diferentes direcções.

3.2.2.1. Anisotropia Geométrica

A anisotropia geométrica é um modelo no qual a continuidade espacial, denunciada pelas amplitudes dos variogramas, varia da direcção de maior continuidade/amplitude à direcção de menor amplitude, perpendicular àquela, de um modo gradual segundo a equação da elipse no plano daquelas duas direcções.

A anisotropia geométrica caracteriza-se por os variogramas terem o mesmo modelo com o mesmo patamar em todas as direcções, mas amplitudes diferentes, verificando-se as amplitudes máxima e mínima em direcções perpendiculares, ver Figura 3.3.

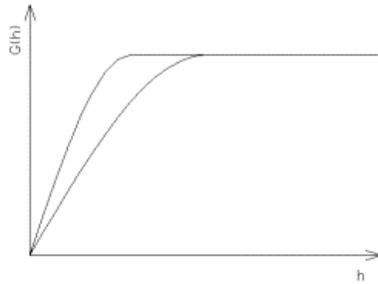


Figura 3.3: Variograma com anisotropia geométrica

A continuidade espacial varia da direcção de maior amplitude (cujo variograma tem maior amplitude) à direcção de menor amplitude (cujo variograma tem menor amplitude) que lhe é perpendicular, de um modo gradual segundo a equação de uma elipse no plano das duas direcções e onde a maior (menor) amplitude corresponde ao comprimento do eixo maior (menor).

A forma elíptica pode ser vista como uma transformação linear do círculo (ou da esfera a três dimensões) que corresponde à situação de isotropia e é nesse facto que se baseia a transformação geométrica de coordenadas que se vai executar.

Um método de combinar vários variogramas direccionais num modelo consistente em todas as direcções é definir uma transformação que reduz todos os variogramas direccionais num modelo comum com amplitude igual a um (Issaks e Srivastava [25]). Na Figura 3.4 estão representados dois variogramas de transição com o mesmo patamar e amplitudes $a = 1$ e a genérico. Note-se que avaliar o variograma de amplitude $a = 1$ numa distância de $\frac{h}{a}$ é precisamente o mesmo que avaliar o modelo de amplitude a na distância h .

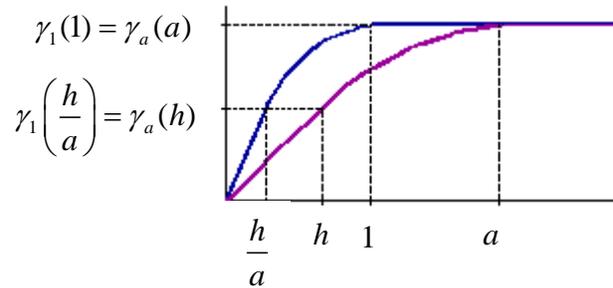


Figura 3.4: Equivalência entre um modelo de transição de amplitude a e um modelo de transição de amplitude um e ambos com o mesmo patamar

Efectivamente, reduziu-se o modelo de amplitude a a um modelo equivalente com amplitude um reduzindo a distância h a $\frac{h}{a}$. Essa equivalência é expressa como $\gamma_1\left(\frac{h}{a}\right) = \gamma_a(h)$ ou $\gamma_1(h) = \gamma_a(ah)$.

Se fizer $h_1 = \frac{h}{a}$, então $\gamma_1(h_1) = \gamma_a(h)$, uma vez que qualquer modelo direccional de amplitude a pode ser reduzido a um modelo de amplitude *um* simplesmente pela substituição da distância h pela distância reduzida $h_1 = \frac{h}{a}$.

O conceito de modelo equivalente e da redução de distância pode se estendido a duas dimensões. Se a_x é a amplitude na direcção x e a_y a amplitude na direcção y , então o modelo anisótropo do variograma é expresso como $\gamma(h) = \gamma_1(h_x, h_y) = \gamma_1(h_1)$ onde h_1 é a distância de redução que é dada por

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{h_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{h_y}{a_y}\right)^2}$$

onde h_x é a componente de h ao longo do eixo dos xx e h_y a componente ao longo do eixo dos yy .

De modo análogo, o modelo de variograma anisótropo em três dimensões, com amplitudes a_x , a_y e a_z pode ser expresso por $\gamma(h) = \gamma(h_x, h_y, h_z) = \gamma_1(h_1)$ e h_1 - a distância reduzida é dada por

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{h_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{h_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{h_z}{a_z}\right)^2}.$$

Outra possibilidade é, em vez de transformar a anisotropia num variograma com amplitude igual a um, transformá-la num variograma de referência como por exemplo o de maior amplitude. Neste caso a distância de redução é dada por

$$h_1 = \sqrt{h_x \left(\frac{h_x}{a_x}\right)^2 + h_y \left(\frac{h_y}{a_y}\right)^2 + h_z \left(\frac{h_z}{a_z}\right)^2},$$

em que a_x é a amplitude do variograma de referência e as razões de anisotropia nos três eixos

principais são: $r_x = \frac{a_x}{a_x}$, $r_y = \frac{a_x}{a_y}$ e $r_z = \frac{a_x}{a_z}$.

Em grande parte dos casos, o que acontece é que a direcção de maior amplitude não coincide com os eixos do sistema de coordenadas e é necessário, antes da transformação geométrica, uma operação de rotação para que os eixos dos xx , yy e zz coincidam com a_x , a_y e a_z respectivamente.

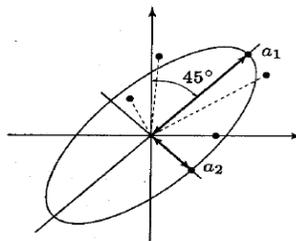


Figura 3.5: Representação na elipse de direcções do conjunto das amplitudes e do modelo de anisotropia geométrica

Por exemplo, no caso da maior amplitude se verificar na direcção de 45° e a de menor amplitude na direcção que lhe é perpendicular, 135° (Figura 3.5) um qualquer vector h terá de previamente ser rodado de 45° antes de se efectuar a isotropização

$$\begin{bmatrix} h_{x_{45^{\circ}}} \\ h_{y_{45^{\circ}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^{\circ} & -\text{sen}45^{\circ} \\ \text{sen}45^{\circ} & \cos 45^{\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}.$$

O método de usar modelos equivalentes e redução de distâncias também é aplicável a modelos que não crescem para um patamar – modelos não estacionários.

Nestes casos a anisotropia presente pode ser corrigida através de uma transformação linear das coordenadas, o que indica que o espaço euclidiano não era o mais adequado para medir a distância entre localizações mas uma transformação linear do mesmo já é, tendo-se a Definição 3.6.

Definição 3.6

Diz-se que um processo espacial intrinsecamente estacionário $\{R(x), x \in B\}$ exhibe anisotropia geométrica se tal anisotropia pode ser reduzida a uma isotropia através de uma transformação linear de coordenadas, ou seja, se existir uma matriz invertível $A_{b \times b}$ tal que $R(Ax)$ é isotrópico.

3.2.2.2. Anisotropia Zonal

Trata-se de uma anisotropia típica de fenómenos estratificados em que a continuidade espacial ao longo do estrato contrasta significativamente com a variabilidade entre estratos e, conseqüentemente, o variograma ao longo dos estratos não atinge o patamar do variograma na direcção entre estratos. (ver Figura 3.6). A anisotropia zonal corresponde ao caso em que os semivariogramas ajustados nas diferentes direcções apresentam os mesmos alcances mas diferentes patamares. Este tipo de anisotropia é um caso menos frequente nos fenómenos naturais.

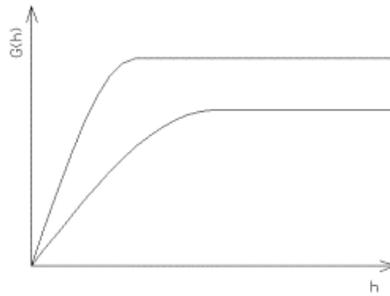


Figura 3.6: Variogramas com anisotropia zonal.

Este tipo de anisotropia pode ser modelado através da combinação linear de várias estruturas, ou seja,

$$\gamma_R(h) = \sum_i \gamma_i(h)$$

em cada uma das componentes $\gamma_i(h)$, deste modelo pode ser anisotrópica em h , ou seja, não depende apenas do módulo $\|h\|$, mas também de uma determinada direcção que se esteja a considerar, tendo-se que a anisotropia de $\gamma_i(h)$ pode ser completamente diferente da anisotropia de $\gamma_j(h)$, isto é, o modelo de anisotropia zonal pode ser definido pela expressão— na qual cada componente poderá ter a sua própria anisotropia.

Observação: Existem outras situações em que o fenómeno anisotrópico não varia de um modo regular de uma amplitude máxima e mínima, quando, por exemplo, a dispersão espacial é condicionada por factores externos. Cada uma destas situações requer transformadas específicas, com o objectivo de se obterem modelos de semivariogramas simples e gerais para todo o campo em estudo.

3.2.3. Modelos teóricos de variogramas definidos positivos (modelos de transição)

A utilização de um número restrito de funções, definidas positivas, para interpolar os valores experimentais dos variogramas é uma das possíveis formas de satisfazer as condições de positividade.

A princípio, isto parece restritivo, mas na verdade, podem-se combinar essas funções, que se sabe serem definidas positivas, para obter outras funções mas também elas definidas positivas.

Estes modelos são simples, isotrópos e independentes da direcção. São funções do escalar $h = |h|$ e podem ser divididos em dois tipos – os modelos de transição e os modelos não estacionários.

Propriedade 3.5

Se $C_{Z_k}(\cdot)$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ é um covariograma válido em \mathbb{R}^d e $\lim_{k \rightarrow \infty} C_{Z_k}(h) = C_Z(h)$, para qualquer $h \in \mathbb{R}^d$, então $C_Z(\cdot)$ é um covariograma válido em \mathbb{R}^d .

Algumas propriedades atrás enunciadas põem em evidência que nem toda a função $\gamma_Z(\cdot) / C_Z(\cdot)$ pode constituir um semivariograma/covariograma válido. A construção de semivariogramas/covariogramas válidos e estabelecimento de condições necessárias e suficientes para que a função seja um semivariograma/covariograma válido é um tema extensamente estudado, embora neste trabalho nos limitaremos unicamente a expor os modelos de semivariogramas mais clássicos e que vão ser usados no nosso estudo.

Definição 3.4

Seja $\{Z(x), x \in D\}$ um processo aleatório intrinsecamente estacionário com semivariograma $\gamma_Z(\cdot)$. Chama-se ao processo aleatório $Z(\cdot)$ fenómeno de transição e a $\gamma_Z(\cdot)$ modelo de transição se $\lim_{\|h\| \rightarrow \infty} \gamma_Z(h) = C_Z(0) = \sigma_Z^2 < \infty$.

Como já foi definido σ_Z^2 é, nesta definição, o valor do patamar do semivariograma $\gamma_Z(\cdot)$. Relativamente ao patamar, o menor valor de $\|r\|$ para o qual $\gamma_Z(r(1+\varepsilon)) = C_Z(0) = \sigma_Z^2$ é denominado por amplitude do semivariograma na direcção $\frac{r}{\|r\|}$ ($r \in \mathbb{R}^d$).

Quando o semivariograma do processo aleatório $Z(\cdot)$ possui um valor do patamar (o semivariograma é limitado) este é, normalmente, o valor da variância do processo $Z(\cdot)$ e este é também um processo estacionário de segunda ordem. Assim, um fenómeno de transição corresponde a um processo estacionário de segunda ordem.

Neste caso o covariograma do processo aleatório $Z(\cdot)$ possui também um valor do patamar que é igual a zero e no caso de existência de amplitude $\|r\|$ é obviamente a mesma para o semivariograma e covariograma.

São apenas cinco os modelos que vão ser apresentados – modelo de efeito de pepita, modelo esférico (Figura 3.7), modelo exponencial (Figura 3.7), modelo gaussiano (Figura 3.7) e o modelo racional quadrático, mas que na prática são suficientes para cobrir a generalidade dos casos geoestatísticos e são todos modelos de transição.

Os modelos de transição são caracterizados por terem um limite – patamar ($C = C(0)$) para o qual tendem os valores de $\gamma(h)$ quando h tende para infinito e uma distância a – amplitude a partir da qual deixa de haver correlação entre as amostras.

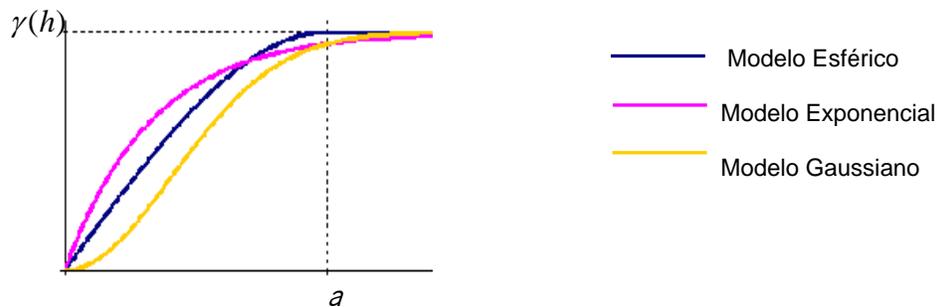


Figura 3.7: Os três modelos de transição mais usuais

3.2.3.1. O modelo de Efeito de Pepita

Embora teoricamente o valor do variograma seja zero para $h = 0$, vários factores, tais como a variabilidade à pequena escala e a variabilidade à escala da amostra induzida por erros, podem permitir que valores observados separados por uma curta distância h tenham valores bem diferentes o que significa que perto da origem $\gamma(0)$ não vai ser aproximadamente zero.

Existe portanto, uma distância mínima - $h_{mín}$ superior a zero tal que $\gamma(h_{mín})$ é relativamente elevado (grande variabilidade à pequena escala), permitindo que quando h tende para zero $\gamma(h)$ não

tenda obrigatoriamente para zero. Este facto provoca uma descontinuidade no andamento do variograma junto à origem, entre $h = 0$ e $h_{\text{mín}}$.

É possível modelar tal descontinuidade por meio da constante C_0 denominada por “efeito de pepita”.

“A modelação do ‘efeito de pepita’ por uma constante diferente de zero significa somente fazer reflectir o desconhecimento do fenómeno àquelas escalas no aumento de incerteza do subsequente processo de estimação” (Soares [37]).

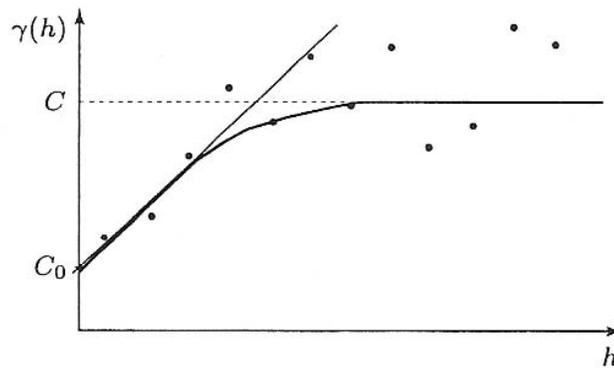


Figura3.8: Obtenção da constante C_0 – “efeito de pepita”, por via geométrica

Geometricamente, a constante C_0 tem abcissa zero ($h = 0$) e ordenada na origem do variograma. C_0 corresponde portanto, ao salto vertical que vai de zero à origem do variograma e pode ser obtida pela intersecção da recta que passa pelos primeiros pontos do variograma com o eixo das ordenadas (Figura 3.8).

Consideremos o processo espacial $\{Z(x), x \in D\}$ em que $Z(u)$ e $Z(v)$ são variáveis aleatórias não correlacionadas para quaisquer $u \neq v$, tal que $E[Z(x)] = 0$, $\forall x \in D$ e $\text{Var}[Z(x)] = \sigma_Z^2 = c_0$, $\forall x \in D$. Então, $Z(x)$ é estacionário de segunda ordem e é denominado por processo espacial de ruído branco. O semivariograma deste processo tem a seguinte expressão

$$\gamma_Z(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ c_0, & h \neq 0 \end{cases}$$

com $h \in \mathbb{R}^d$ e $d \geq 1$. Ao modelo do semivariograma $\gamma_Z(\cdot)$ chamamos modelo de efeito de pepita.

O processo espacial de ruído branco é um processo aleatório que apresenta uma intensa variabilidade espacial e total ausência estrutural. Digamos que é o caso limite, bastante raro, em que a autocorrelação espacial é nula. Corresponde à descontinuidade máxima, uma variável completamente aleatória.

Quando analisamos o semivariograma para distâncias h pequenas (comportamento na origem), esperamos concluir algo sobre o grau de continuidade espacial do fenômeno em estudo.

A “regularidade” de um processo aleatório é medida em termos de continuidade em média quadrática que vamos definir.

Definição 3.5

O processo aleatório $\{Z(x), x \in D\}$ diz-se contínuo em média quadrática em D se

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left\{ [Z(x+h) - Z(x)]^2 \right\} = 0, \quad \forall x \in D.$$

Se a variabilidade espacial de $Z(\cdot)$ é “regular” a variabilidade entre $Z(x)$ e $Z(v)$ espera-se que seja quanto mais pequena quanto mais próximos estão x e v .

3.2.3.2. O modelo Esférico (acompanhado de efeito de pepita)

Trata-se de um dos modelos mais usuais em fenômenos espaciais, nomeadamente, na Geoestatística. O modelo esférico tem a seguinte expressão:

$$\gamma_Z(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ c_0 + c_1 \left(\frac{3 \|h\|}{2 c_2} - \frac{1}{2} \frac{\|h\|^3}{c_2^3} \right), & 0 < \|h\| < c_2 \\ c_0 + c_1, & \|h\| \geq c_2 \end{cases}$$

com $h \in \mathbb{R}^d$ e $d \in \{1, 2, 3\}$.

Onde,

- c_0 representa o efeito de pepita que faz com que o semivariograma apresente uma descontinuidade junto à origem, isto é, $\lim_{h \rightarrow 0} E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\} = c_0 \neq 0, \forall x \in D$, esta descontinuidade (em média quadrática) representa as variações locais ou de pequena escala, como erros de amostragem ou de análises (a variância dos erros de análise contribui para este valor) e possível existência de micro-regionalizações desenvolvendo-se a uma escala não detectável pela escala de amostragem adoptada;

- c_2 , o patamar, é o valor de $\gamma_Z(h)$ para o qual o variograma se estabiliza (o limite superior para o qual tendem os valores do semivariograma com o aumento dos valores de h) que é normalmente coincidente com a variância de $Z(x)$;

- c_1 é a amplitude que mede a distância a partir da qual os valores de $Z(x)$ deixam de estar correlacionados e a partir da qual os valores de $\gamma_Z(h)$ param de crescer.

3.2.3.3. O modelo Exponencial (acompanhado de efeito de pepita)

É uma função dos mesmos parâmetros do modelo esférico - amplitude e patamar - sendo este último o valor para o qual o semivariograma tende assintoticamente:

$$\gamma_Z(h) = c_0 + c_1 \left(1 - e^{-\frac{3\|h\|}{c_2}} \right).$$

A expressão é, então

$$\gamma_Z(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ c_0 + c_1 \left(1 - e^{-\frac{\|h\|}{c_2}} \right), & h \neq 0 \end{cases}$$

com $h \in \mathbb{R}^d$ e $d \geq 1$.

Este modelo alcança o patamar assintoticamente. Esta aproximação é difícil de verificar na prática, devido à flutuação experimental do semivariograma. Por isso alguns autores como Journel e Huijbregts [20], não distinguem na prática o patamar assintótico e o patamar efectivo e consideram o

valor da amplitude $c_2^* = 3c_2$ para que o valor da amplitude c_2^* seja a distância em que o modelo atinge 95% do valor do patamar, isto é $\gamma_Z(c_2^*) = c_0 + c_1(1 - e^{-3}) = c_0 + 0,95c_1$.

Os modelos esférico e exponencial têm um comportamento linear junto à origem. O semivariograma não é derivável na origem, o que implica que a função aleatória $Z(x)$ tem média quadrática contínua mas não é diferenciável.

Apesar do modelo exponencial crescer junto da origem de um modo mais rápido que o modelo esférico, as estruturas apresentam uma maior continuidade espacial, isto é, maiores prolongamentos resultantes das maiores correlações espaciais a grandes distâncias h .

3.2.3.4. O modelo Gaussiano (acompanhado de efeito de pepita)

Quaisquer das duas funções apresentadas - modelo esférico e exponencial - tem um crescimento relativamente rápido junto da origem, denunciando um comportamento típico de fenómenos relativamente irregulares. Outros fenómenos, bastante mais regulares e contínuos, denunciam um crescimento lento de $\gamma_Z(h)$ com um comportamento parabólico na origem (o semivariograma é duas vezes diferenciável na origem, o que implica que a função aleatória $Z(s)$ é derivável em média quadrática).

É o caso dos semivariogramas ajustáveis por modelos Gaussianos:

$$\gamma_Z(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ c_0 + c_1 \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{\|h\|}{c_2} \right)^2 \right) \right), & h \neq 0 \end{cases}$$

com $h \in \mathbb{R}^d$ e $d \geq 1$.

O modelo Gaussiano tal como o modelo exponencial alcança o patamar assintoticamente. A amplitude $c_2^* = \sqrt{3}c_2$ é a distância para que o valor da amplitude c_2^* seja a distância em que o modelo atinge 95% do valor do patamar, isto é, $\gamma_Z(c_2^*) = c_0 + 0,95c_1$.

Nota-se uma maior continuidade espacial da variável em comparação com os modelos esférico e exponencial.

3.2.3.5. O modelo Racional Quadrático (acompanhado de efeito de pepita)

Este modelo corresponde à seguinte função de semivariograma:

$$\gamma_Z(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ c_0 + c_1^2 \frac{\|h\|^2}{c_2^2 + \|h\|^2}, & h \neq 0 \end{cases}$$

com $h \in \mathbb{R}^d$ e $d \geq 1$.

Novamente é um modelo que atinge o patamar assintoticamente quando a amplitude é $c_2^* = \sqrt{19c_2}$. Tal como o modelo Gaussiano tem um comportamento parabólico junto da origem, mas para iguais amplitudes o modelo quadrático racional tem um crescimento mais rápido que o Gaussiano, no entanto, apresenta também uma variabilidade espacial aproximadamente contínua.

Assim, quanto ao grau de continuidade, podem ser reconhecidos quatro tipos de variogramas (veja Figura 3.9) alto grau de continuidade: quando o variograma descreve uma curva parabólica na origem, como o variograma de espessuras de camada:

- continuidade média: quando o variograma é caracterizado por um comportamento linear na origem, típico de muitos depósitos metálicos;
- efeito pepita: quando o variograma apresenta descontinuidade na origem;
- efeito pepita puro: quando o variograma reflecte a variação espacial de um fenómeno totalmente, sendo a variabilidade constante para qualquer distância. Esse termo tem origem na mineração de ouro, onde a inclusão de uma pepita de ouro em uma pequena amostra de um testemunho de sondagem é um evento aleatório.

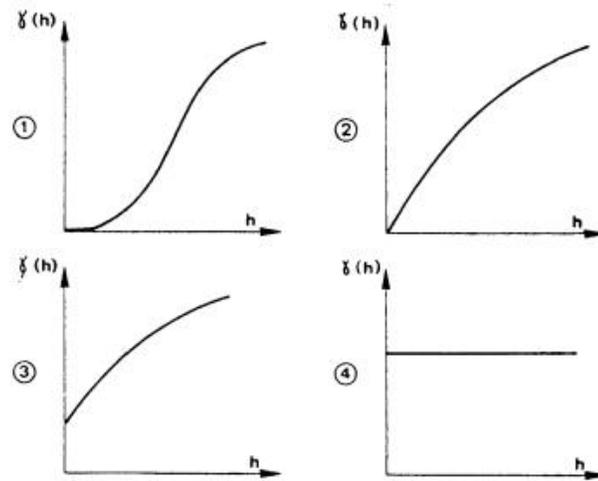


Figura 3.9: Graus de continuidade da mineralização expressos pelo comportamento do variograma na origem: alto grau de continuidade (1), média continuidade (2), efeito pepita (3) e efeito pepita puro (4).

4. Estimação Estocástica - *Kriging*

4.1. Estimação Linear

Seja $Z(x)$ a realização de um processo aleatório e considere-se que se conhece $Z(x)$ em alguns pontos $x_1, x_2, \dots, x_n \in D \subseteq \mathbb{R}^d$, obtendo os valores os valores $z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n)$.

O mais elementar problema posto na fase de estimação consiste em estimar para um ponto $x = x_0 \in D$ o valor de $Z(x)$ que não foi observado, com base nos valores $z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n)$.

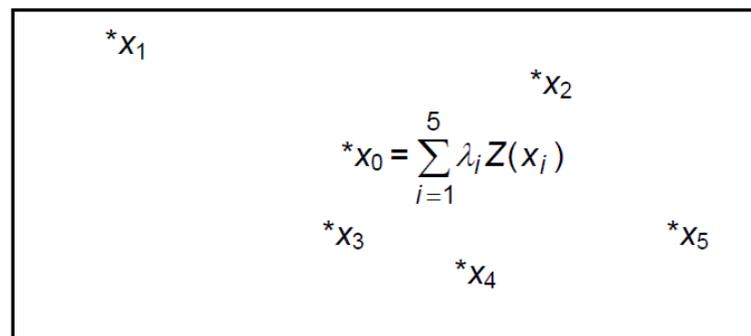


Figura 4.1: Esquema ilustrativo do processo de interpolação espacial geoestatístico

Assim, é construída uma função real $\psi [Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)]$ denominada por função de estimação para $Z(x_0)$ (Figura 4.1).

Seja, então $\hat{Z}(x_0) = \psi [Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)]$ o estimador de $Z(x_0)$. O erro que se comete ao estimar o valor de $Z(x_0)$ é definido como $\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)$. O critério para medir a “qualidade” de $\hat{Z}(x_0)$ é o erro quadrático médio definido por:

$$EQM \left[\hat{Z}(x_0) \right] = E \left\{ \left[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0) \right]^2 \right\}.$$

Este pode ser escrito como $EQM \left[\hat{Z}(x_0) \right] = Var \left[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0) \right] + B^2 \left[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0) \right]$ onde $B \left[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0) \right]$ é o viés do estimador.

Definiremos agora a “melhor” função de estimação de $Z(x_0)$ baseada em $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$. Deve-se, então, encontrar uma função $\psi [Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)]$ tal que o $EQM \left[\hat{Z}(x_0) \right]$ seja mínimo. Tal função é obtida através do seguinte teorema:

Teorema 4.1

A melhor função de estimação de $Z(x_0)$ baseada em $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$ é dada pela esperança de $Z(x_0)$ condicionado a $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$, isto é

$$\psi_0 [Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)] = E \left[Z(x_0) | Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n) \right].$$

Se considerarmos apenas as funções de estimação que são combinações lineares de $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$ temos a seguinte definição:

Definição 4.1

Seja Ψ^* o conjunto de todas as funções que são combinações lineares de $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$. A função $\psi_0^* [Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)]$ diz-se a melhor função linear de estimação de $Z(x_0)$ se

- i) $\psi_0^* [Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)] \in \Psi^*$, isto é

$$\psi_0^* [Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)] = \lambda_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\text{ii) } E \left\{ \psi_0^* [Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)] - Z(x_0) \right\}^2 \leq E \left\{ \psi^* [Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)] - Z(x_0) \right\}^2,$$

para toda a função $\psi^* \in \Psi^*$.

Sejam a matriz Σ , $n \times n$ e os vectores $\mathbf{Z}(x)$, \mathbf{c}_0 e $\boldsymbol{\mu}$, $n \times 1$ definidos por:

$$\text{(i) } \mathbf{Z}^T(x) = (Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n));$$

\text{(ii) } Σ a matriz de covariâncias de $\mathbf{Z}(s)$, isto é

$$\Sigma_{ij} = \text{Cov}[Z(x_i), Z(x_j)] = C_Z(x_i, x_j) \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n;$$

\text{(iii) } \mathbf{c}_0 é o vector de covariâncias entre $Z(x_0)$ e $Z(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, isto é

$$c_{0i} = \text{Cov}[Z(x_0), Z(x_i)] = C_Z(x_0, x_i) \quad \text{para } i = 1, \dots, n;$$

\text{(iv) } $\boldsymbol{\mu}$ é o vector das esperanças de $\mathbf{Z}(x)$, isto é

$$\mu_i = E[Z(x_i)] = m(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Definimos também $\mu_0 = E[Z(x_0)]$.

Teorema 4.2

Se Σ , \mathbf{c}_0 e $E[Z(x)]$ são conhecidos para um dado conjunto de pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, então a melhor função linear de estimação de $Z(x_0)$ baseada em $\mathbf{Z}(x)$ é dada por

$$\psi_0^* [\mathbf{Z}(x)] = \mu_0 + \mathbf{c}_0^T \Sigma^{-1} [\mathbf{Z}(x) - \boldsymbol{\mu}].$$

A BLE (Best Linear Estimation) de $Z(x_0)$ é a projecção ortogonal de $Z(x_0)$ em Ψ^* .

Quando o processo aleatório é Gaussiano, a esperança condicional de $Z(x_0)$ dado as observações $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$ tem a mesma forma da expressão da BLE de $Z(x_0)$ do Teorema 4.2.

Com o intuito de se obter um estimador óptimo cujo *EQM* seja o menor possível, deve-se verificar se o estimador é não enviesado, uma vez que neste estudo mostra-se que o estimador é de variância mínima.

Corolário 4.1 (Teorema 4.2)

O BLE de $Z(x_0)$ é não enviesado.

Logo, a função $\psi_0^*[Z(x)]$ é a melhor função linear de estimação não enviesada (BLUE (Best Linear Unbiased Estimation- Melhor Estimador Linear Não Enviesado)) de $Z(x_0)$ baseada em $Z(x)$.

Em várias situações há o interesse em estimar um determinado atributo em locais não observados, baseando-nos numa amostragem espacial. Dentro dos estimadores possíveis estão as funções pertencentes ao conjunto dos BLUE's, da qual se pode extrair o estimador de *Kriging*.

4.2. Estimador Linear Geoestatístico: *Kriging*

O estimador geoestatístico denominado por *Kriging*, que é uma denominação que foi empregue, pela primeira vez, por Matheron [29], em homenagem aos trabalhos pioneiros de Krige [27]. O *Kriging* pode assumir diversas formas dentro das quais a mais usual é a designada por *Kriging* normal ou ordinário (*Ordinary Kriging*).

A ideia básica do *Kriging* é assumir o atributo sob estudo, $Z(x)$, como uma realização de um processo aleatório.

Consideremos então o processo aleatório $\{Z(x), x \in D\}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ e pretendemos fazer predições acerca do processo $Z(\cdot)$ em pontos (ou regiões) não observados a partir de observações de $Z(\cdot)$ num número finito de localizações espaciais x_1, x_2, \dots, x_n . Com base em tais observações constrói-se a melhor função de estimação não enviesada para $Z(x_0)$, onde $x_0 \in D$ e, neste caso, o método *Kriging* consiste em fazer estimação pontual ou para $Z(B)$, que se define como a média de $Z(\cdot)$, onde $B \subseteq D$ é um subconjunto com volume d -dimensional estritamente positivo e, neste caso, o método *Kriging* consiste em fazer uma estimação global.

Existem muitas variantes do método de *Kriging*. Apenas vamos descrever os “*Krigings*” Simples e Ordinário.

Certas situações não permitem que se considere a hipótese de estacionaridade da média, isto é, considerá-la desconhecida mas constante para todo o domínio A . Essas situações correspondem a fenómenos não-estacionários, fenómenos cujos valores do atributo que se pretende estimar têm um comportamento não homogéneo dentro da área amostrada (por exemplo, valores que cresçam de um modo sistemático numa dada direcção ou os valores mais elevados concentram-se localmente num ponto ou pequena área e decrescem de um modo radical em todas as direcções).

Nestas situações não é possível utilizar o método de estimação denominado por *krigagem* normal uma vez que esse pressupõe a hipótese de estacionaridade do primeiro momento e portanto, utilizam-se outros tipos de *krigagem*.

4.2.1. *Kriging* Simples

Kriging Simples é o algoritmo mais geral para os fenómenos não-estacionários onde se assume o conhecimento das médias do conjunto de variáveis aleatórias referentes aos valores amostrados e aos pontos no espaço não amostrado. Este algoritmo é aplicado em situações cujo formalismo teórico do modelo impõe o conhecimento da média da função aleatória ou quando existe um bom conhecimento da tendência (deriva) do fenómeno.

Se as esperanças e covariâncias de $Z(x)$ são conhecidas, o termo *Kriging* Simples é utilizado para representar o procedimento de estimação. Nesta situação conforme o Teorema 4.2, o problema de estimação fica resolvido.

Consideremos o estimador $\hat{Z}(x_0)$ na sua forma mais geral, isto é, uma combinação linear dos n dados $Z(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ e a constante 1:

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) + \lambda_0 \mathbf{1} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}(x) + \lambda_0 \mathbf{1} \quad (4.1)$$

Neste caso de não estacionaridade do primeiro momento em que as médias das variáveis aleatórias são conhecidas e não constantes, a condição de não enviesamento

$E[\hat{Z}(x_0)] = E[Z(x_0)] = \mu_0$ que implica que $\lambda_0 = \mu_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_i E[Z(x_i)] = \mu_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$ e a variância de estimação $Var[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)] = E\left[\left(\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\right)^2\right]$ seja mínima.

Substituindo em (4.1), temos $\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) + \lambda_0 1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) + \mu_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$.

A variância de estimação de *Kriging* é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{KS}^2 &= Var[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)] = E\left[\left(\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\right)^2\right] = Var\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) + \lambda_0 - Z(x_0)\right] + \\ &+ E\left\{\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) + \lambda_0 - Z(x_0)\right]^2\right\} = Var\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z(x_0)\right] + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i + \lambda_0 - \mu_0\right)^2 = \\ &= Var\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z(x_0)\right] = \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} - 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}_0 + Var[Z(x_0)]; \end{aligned}$$

expressão em forma matricial, onde $\boldsymbol{\Sigma}$ é a matriz de dimensão $n \times n$ de covariâncias de $\mathbf{Z}(x)$ e \mathbf{c}_0 é o vector de dimensão n de covariâncias entre $Z(x_0)$ e $Z(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Derivando relativamente a $\boldsymbol{\lambda}$ e igualando a derivada a zero, obtemos o sistema linear de n equações $\boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c}_0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\lambda}^{-1} \mathbf{c}_0$ e assim, a variância de estimação de *Kriging* é dada por $\sigma_{KS}^2 = -\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}_0 + Var[Z(x_0)]$.

O estimador de *Kriging* Simples de $Z(x_0)$ é, então

$$\hat{Z}_{SK}(x_0) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}(x) + \lambda_0 1 = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}(x) + \mu_0 - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\mu} = \mu_0 + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{Z}(x) - \boldsymbol{\mu}] = \mu_0 + \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [\mathbf{Z}(x) - \boldsymbol{\mu}]$$

Porém em situações práticas, a função de covariância não é conhecida e é então necessário introduzir a hipótese de estacionaridade, para que a estimação seja possível. Esta hipótese não fornece a forma da função de covariância, apenas permite estimá-la a partir da amostra.

Suponhamos que $\{Z(x), x \in D\}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ é um processo aleatório estacionário de segunda ordem. Para n pontos x_1, x_2, \dots, x_n tais que $x_i \in D \subseteq \mathbb{R}^d$, observa-se o valor de $z(x)$ obtendo-se $z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n)$. O estimador de *Kriging* de $Z(x_0)$, $x_0 \in D$, é dado por

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}(x)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ é tal que $\hat{Z}(x_0)$

$$\begin{cases} \text{i) tenha } EQM \text{ m\u00ednimo dentro de todas as combina\u00e7\u00f5es de } Z(x) \text{ n\u00e3o enviesadas} \\ \text{ii) seja n\u00e3o enviesado, isto \u00e9, } E\left[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\right] = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

4.2.2. *Kriging* Ordin\u00e1rio

Consideremos o processo aleat\u00f3rio $\{Z(x), x \in D\}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$, tal que $E[Z(x)] = m$ constante em D e m \u00e9 desconhecida, para todo o $x \in D$, isto \u00e9, apenas a esperan\u00e7a de $Z(x)$ \u00e9 estacion\u00e1ria. O termo *Kriging* Ordin\u00e1rio \u00e9 utilizado para representar o procedimento de estima\u00e7\u00e3o.

Assim,

$$E\left[\hat{Z}_{OK}(x_0) - Z(x_0)\right] = E\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z(x_0)\right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i m - m = m\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1\right).$$

Para que se verifique a condi\u00e7\u00e3o de n\u00e3o enviesamento \u00e9 necess\u00e1rio impor uma condi\u00e7\u00e3o aos ponderadores: $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Se $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}(s)$ \u00e9 uma combina\u00e7\u00e3o linear de $\mathbf{Z}(s)$ que satisfaz a condi\u00e7\u00e3o de n\u00e3o enviesamento, o seu erro quadr\u00e1tico m\u00e9dio \u00e9 igual \u00e0 vari\u00e2ncia, assim:

$$\begin{aligned} EQM\left[\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}(x)\right] &= E\left\{\left[\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}(x) - Z(x_0)\right]^2\right\} = Var\left[\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}(x) - Z(x_0)\right] = \\ &= \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} - 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}_0 + Var\left[Z(x_0)\right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

covari\u00e2ncias entre $Z(x_0)$ express\u00e3o em forma matricial, onde $\boldsymbol{\Sigma}$ \u00e9 a matriz de dimens\u00e3o $n \times n$ de covari\u00e2ncias de $\mathbf{Z}(x)$ e \mathbf{c}_0 \u00e9 o vector de dimens\u00e3o n de $Z(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Portanto, as condições em (4.2) são equivalentes a

$$\begin{cases} \text{i) } \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} - 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}_0 \text{ seja mínimo} \\ \text{ii) } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases} \quad (4.4)$$

Com o objectivo de minimizar a função (i) sujeita à restrição (ii) ambas no sistema, introduzimos um multiplicador de Lagrange ϕ .

$$\text{Assim, } L = \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} - 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}_0 - 2(\mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} - 1)\phi$$

$$\frac{dL}{d\boldsymbol{\lambda}} = 2\boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} - 2\mathbf{c}_0 - 2\mathbf{1}\phi = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{c}_0 - \mathbf{1}\phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{1}\phi = \mathbf{c}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{1}\phi \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0 + \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0 + \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}\phi$$

Como $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} = 1$, temos

$$\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0 + \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}\phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}.$$

Então, o vector $\boldsymbol{\lambda}$ que satisfaz (4.3) é dado por

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0 + \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \frac{(1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0)}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}$$

e o estimador de *Kriging* Ordinário de $Z(s_0)$ é dado por

$$\hat{Z}_{KO}(x_0) = \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}(x) + \frac{(1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0)}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}(x).$$

A variância do erro de estimação de *Kriging* (erro quadrático médio de estimação) é

$$\begin{aligned} \sigma_{KO}^2 &= \text{Var} \left[\hat{Z}_{OK}(x_0) - Z(x_0) \right] = \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} - 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}_0 + \text{Var} [Z(x_0)] = \\ &= \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{1}\phi - 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}_0 + \text{Var} [Z(x_0)]. \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{1} = 1$, vem

$$\sigma_{kO}^2 = -\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}_0 + \phi + \text{Var}[Z(x_0)].$$

Como um processo estacionário de segunda ordem é intrinsecamente estacionário (quando a continuidade espacial de um processo é descrita através do semivariograma), e então vamos adaptar o método de estimação de *Kriging* Ordinário e exprimir as equações de covariâncias, mas em termos do semivariograma:

Sejam a matriz $\mathbf{\Lambda}$ de dimensão $n \times n$ e os vectores \mathbf{v}_0 e $\mathbf{1}$ de dimensão n definidos como:

(i) $\mathbf{\Lambda}$ a matriz de semivariogramas de $\mathbf{Z}(x)$, isto é

$$\Lambda_{ij} = \gamma_Z(x_i, x_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

(ii) \mathbf{v}_0 o vector de semivariogramas entre $Z(x_0)$ e $Z(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é $v_{0i} = \gamma_Z(x_0, x_i)$,

$i = 1, 2, \dots, n$;

(iii) $\mathbf{1}$ o vector composto por n valores unitários (1's).

Utilizando a relação $\gamma_Z(h) = C_Z(0) - C_Z(h)$, temos

$$\text{Var}[Z(s_0)] = C_Z(0), \quad \mathbf{c}_0 = C_Z(0)\mathbf{1} - \mathbf{v}_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{\Sigma} = C_Z(0)\mathbf{1}\mathbf{1}^T - \mathbf{\Lambda}.$$

Assim, podemos reescrever o erro quadrático médio (4.3) em termos da função semivariograma como:

$$\begin{aligned} EQM[\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}(s)] &= \boldsymbol{\lambda}^T [C_Z(0)\mathbf{1}\mathbf{1}^T - \mathbf{\Lambda}] \boldsymbol{\lambda} - 2\boldsymbol{\lambda}^T [C_Z(0)\mathbf{1} - \mathbf{v}_0] + C_Z(0) = \\ &= C_Z(0)\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{1}\mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\lambda} - 2C_Z(0)\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{1} + 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_0 + C_Z(0). \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{1} = 1$, vem $EQM[\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}(s)] = 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\lambda}$.

Assim, as condições em (4.4) são equivalentes a

$$\begin{cases} \text{i) } 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\lambda} \text{ seja mínimo} \\ \text{ii) } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

Com o objectivo de minimizar a função (i) sujeita à restrição (ii), ambas no sistema (4.5), introduzimos um multiplicador de Lagrange ϕ .

Assim, $L = 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\lambda} - 2(\mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} - 1)\phi$

$$\frac{dL}{d\boldsymbol{\lambda}} = 2\mathbf{v}_0 - 2\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\lambda} - 2\mathbf{1}\phi = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{1}\phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{1}\phi \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1}\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_0 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1}\phi$$

Como $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} = 1$, temos

$$\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_0 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1}\phi = 1 \Rightarrow \phi = -\frac{(1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_0)}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1}}$$

Então, o vector $\boldsymbol{\lambda}$ que satisfaz (4.5) é dado por

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1} \frac{(1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_0)}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1}}$$

e o estimador de *Kriging* Ordinário de $Z(s_0)$ é dado por

$$\hat{Z}_{OK}(x_0) = \mathbf{v}_0^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{Z}(x) + \frac{(1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_0)}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{Z}(x) \quad (4.7)$$

e a variância do erro de estimação de *Kriging* é

$$\sigma_{KO}^2 = \text{Var} \left[\hat{Z}_{OK}(x_0) - Z(x_0) \right] = \text{EQM} \left[\hat{Z}_{OK}(x_0) \right] = 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\lambda}. \quad (4.8)$$

Por (4.6) $\sigma_{KO}^2 = 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{v}_0 - \mathbf{1}\phi) = 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{1}\phi =$

$$= \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_0 + \phi.$$

Fazendo as substituições de $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ e ϕ temos

$$\sigma_{KO}^2 = \mathbf{v}_0^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_0 - \frac{(1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_0)^2}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1}}.$$

4.2.3. Algumas propriedades e considerações sobre o estimador de *Kriging*

1) Observa-se, através das expressões para o erro quadrático médio do estimador de *Kriging*, que a variância do erro de estimação depende apenas do segundo momento do processo aleatório (nos casos apresentados), não dependendo da esperança $E[Z(x)]$ e tão pouco das observações $z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n)$. Então, é possível conhecer a qualidade do estimador antes de se observar o processo.

2) O estimador de *Kriging* nos pontos observados é igual ao valor da função nesses pontos, isto é, $\hat{Z}(x_i) = Z(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. O estimador de *Kriging* é um interpolador exacto.

De facto, suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_0 = x_1$, então o vector \mathbf{c}_0 é igual à primeira coluna da matriz $\mathbf{\Sigma}$ e portanto os valores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$ e $\phi = 0$ são solução do sistema (4.4). Tem-se, assim:

$$\hat{Z}_{OK}(x_1) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) = Z(x_1).$$

Relativamente à variância de estimação, tem-se

$$\sigma_{KO}^2(x_1) = \text{Var} \left[\hat{Z}_{OK}(x_1) - Z(x_1) \right] = 0.$$

3) Se $Z(u)$ e $Z(v)$ são variáveis aleatórias independentes, quando $u \neq v$ e $\text{Var}[Z(x)] = \sigma_Z^2$, não depende de s (há independência entre amostras e entre amostras e o ponto a estimar), isto acontece quando $\{Z(x), x \in D\}$ é um processo de ruído branco, então a estimação em qualquer ponto $x_0 \neq x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ é a média aritmética dos valores observados de $Z(\cdot)$ (a média aritmética das amostras), isto é $\hat{Z}(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z(x_i) = \bar{Z}$, para qualquer $x_0 \neq x_i$. Com efeito, neste caso, a matriz $\mathbf{\Sigma} = \sigma_Z^2 \mathbf{I}$, sendo \mathbf{I} a matriz identidade de dimensão $n \times n$ e, como $x_0 \neq x_i$, \mathbf{c}_0 é o vector nulo de dimensão n . Resolvendo o sistema (4.5), temos $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{1} \left(\frac{1}{n} \right)$ e $\phi = \frac{\sigma_Z^2}{n}$.

Então, tem-se $\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z(x_i) = \bar{Z}$ e a variância de estimação é $\sigma_{ko}^2(x_0) = Var \left[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0) \right] = \sigma_Z^2 + \frac{\sigma_Z^2}{n}$ (a variância é a soma da variância de cada variável $Z(x_i)$ e da variância da média das n variáveis $Z(x_i)$).

4) Como consequência das propriedades 2) e 3), tem-se que a superfície constituída pelos $\hat{Z}(\cdot)$ não é sempre contínua.

5) Considere-se o seguinte modelo $Z(x) = m(x) + Y(x)$, $x \in D$ onde $Y(x)$ é um processo aleatório de covariância estacionária com média zero e função de covariância conhecida. Então, no que diz respeito às duas variantes de *Kriging* aqui abordadas temos:

a) Suponhamos $m(x) = m$, conhecida, $\forall x \in D$. Pelo Teorema 4.2 o estimador de *Kriging* de $Y(x_0)$ é dado por

$$\hat{Y}(x_0) = \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Y}(x) = \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [\mathbf{Z}(x) - \mathbf{1}m] = \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}(x) - \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}m.$$

$$\text{Assim, } \hat{Z}^*(x_0) = m + \hat{Y}(x_0) = \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}(x) + (1 - \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})m \quad (4.9)$$

é o estimador de *Kriging* de $Z(x_0)$. Portanto, o erro quadrático médio de $\hat{Z}^*(x_0)$ é dado por:

$$\begin{aligned} Var \left[\hat{Z}^*(x_0) - Z(x_0) \right] &= Var \left[\mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}(x) - Z(x_0) \right] = \\ &= \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0 + Var \left[Z(x_0) \right] - 2\mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0 = Var \left[Z(x_0) \right] - \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0; \end{aligned}$$

b) Suponhamos agora que $m(x) = m$, desconhecida, $\forall x \in D$. O estimador de mínimos quadrados ponderados de m , \hat{m} é dado por:

$$\hat{m} = (\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}(x) \text{ e } Var \left(\hat{m} \right) = (\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^{-1}.$$

Substituindo \hat{m} em (4.9) temos:

$$\hat{Z}^*(x_0) = \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}(x) + (1 - \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) (\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}(x)$$

que é exactamente o estimador de *Kriging* Ordinário dado em (4.7) ($1 - \mathbf{c}_0^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} = 1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0$). Então o método de *Kriging* estima a média m .

Através da equação (4.8) temos

$$\text{Var} \left[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0) \right] = \text{Var} \left[\hat{Z}^*(x_0) - Z(x_0) \right] + (1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_0)^2 \text{Var}(\hat{m}),$$

onde o segundo termo à direita é a perda da precisão envolvida quando precisamos de estimar m .

4.2.4. Outros métodos de estimação

Certas situações (tal como acontecia no *Kriging* Simples) não permitem que se considere a hipótese de estacionaridade da média, isto é considerá-la desconhecida mas constante para todo o domínio. Essas situações correspondem a fenómenos não estacionários cujos valores do atributo que se pretende estimar têm um comportamento não homogéneo dentro da área amostrada. Nestas situações utilizam-se outro tipo de *Kriging* como o *Kriging* com modelo de deriva (também conhecido por *Kriging* Universal) ou o *Kriging* com deriva externa. No algoritmo do *Kriging* com modelo de deriva as médias são uma função das coordenadas x , y como por exemplo na função linear $m(x) = a_0 + a_1x + a_2y$ ou quadrática $m(x) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy$; no *Kriging* com deriva externa o algoritmo a forma da deriva $m(x)$ é assumida como uma função linear de uma variável auxiliar externa $Y(x)$, por exemplo, o caso em que as médias locais de pluviometria de uma dada região podem ser modeladas à custa de uma função linear de altitude topográfica do tipo $m(x) = a_0 + a_1Y(x)$ (ver mais pormenores em Soares [37]).

A teoria desenvolvida até agora considera só um processo aleatório. O *Kriging* é um método de estimação de um processo $\{Z(x), x \in D\}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ usando valores observados deste processo nos lugares x_1, x_2, \dots, x_n . Mas, por vezes e quando é possível, a qualidade desta estimação pode ser

melhorada utilizando observações de outros processos que estejam correlacionados com ele. Assim, pode ser desenvolvido um método de estimação de um processo $\{Z_1(x), x \in D\}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ usando não só os valores observados deste mesmo processo, mas também de outros processos $Z_2(x), Z_3(x), \dots$. Este método chama-se *Cokriging*. Esta técnica tem especial interesse quando um processo $\{Z_1(x), x \in D\}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ é observado num número limitado de lugares. Utilizam-se então observações de outros processos para os quais os pontos de amostragem são mais numerosos.

Situações em que o método de *Cokriging* pode ser aplicado são, por exemplo, nas medições da precipitação fornecida por udómetros e por radar, nos teores de dois elementos químicos num jazigo mineral, na porosidade e na permeabilidade de um reservatório petrolífero ou de um solo.

De um ponto de vista teórico, o *Cokriging* não é essencialmente diferente do *Kriging*. é uma generalização do método a dois ou mais processos, mas a apresentação deste processo não será aqui efectuada.

4.4. Estimação Global

O método de estimação *Kriging* foi apresentado para a estimação pontual, isto é, o valor da característica do processo num suporte idêntico ao das amostras.

Contudo, quando se pretende estimar o valor médio de $Z(\cdot)$ numa região (área local) $B \subset D$, onde $B \subset D$ é um subconjunto com volume d-dimensional estritamente positivo, isto é $|B| > 0$, fala-se então de estimação global. Este pode ser obtido pela média dos valores pontuais estimados pelo *Kriging* que compõem B ou pode ser estimado directamente (Figura 4.2).

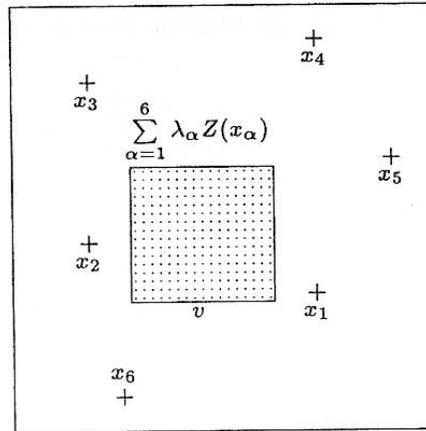


Figura 4.2: Esquema ilustrativo do processo de interpolação espacial geostatístico de áreas locais

Neste último caso, temos de definir o valor médio do processo aleatório $Z(\cdot)$ na região B , $Z(B)$ como um integral:

$$Z(B) = \frac{1}{|B|} \int_B Z(x) dx, \text{ sendo } |B| \text{ a área da região } B.$$

Segundo a teoria dos processos aleatórios, o integral de um processo aleatório é uma variável aleatória definida como o limite (em média quadrática) de uma soma de Riemann (Yaglom [41]) e baseado na definição anterior, deduzem-se as seguintes expressões:

$$E[Z(B)] = \frac{1}{|B|} \int_B E[Z(x)] dx;$$

$$Var[Z(B)] = Cov[Z(B), Z(B)] = \frac{1}{|B|^2} \iint_{B B} Cov(Z(x), Z(u)) du dx;$$

$$Cov[Z(B), Z(x)] = \frac{1}{|B|} \int_B Cov(Z(x), Z(u)) du, \forall x \in B.$$

Se, além disso, $\{Z(x), x \in D\}$ é também intrinsecamente estacionário, com semivariograma $\gamma_Z(\cdot)$, então as expressões podem ser escritas:

$$E[Z(B)] = \mu_Z;$$

$$Var[Z(B)] = \frac{1}{|B|} \int_B Var[Z(x)] dx - \frac{1}{|B|^2} \iint_{B B} \gamma_Z(x-u) du dx;$$

$$\frac{1}{2} \text{Var}[Z(B) - Z(x)] = \frac{1}{|B|} \int_B \gamma_Z(x-u) du - \frac{1}{2|B|^2} \int_B \int_B \gamma_Z(v-u) du dv, \quad \forall x \in B.$$

Geralmente, a função covariância ou o semivariograma do processo $Z(\cdot)$ têm expressões que fazem com que, obter-se as quantidades anteriores seja uma tarefa difícil, senão impossível de se fazer pois, em teoria, estes momentos são obtidos através de integrais e a partir dos momentos dos processos pontuais $Z(\cdot)$. Em tais situações, é usado cálculo numérico e as expressões, na prática, são obtidas por aproximação.

Para tal, a região B é “discretizada”, seleccionando um conjunto finito de pontos x_1, x_2, \dots, x_n , suficientemente denso, de pontos espaçados regularmente na região B (constrói-se uma grelha o mais fina possível emersa no domínio B) e os integrais são substituídos por médias dando origem às seguintes aproximações:

$$\text{Var}[Z(B)] \approx \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}[Z(x_i) - Z(x_j)] \text{ ou}$$

$$\text{Var}[Z(B)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Var}[Z(x_i)] - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_Z(x_i - x_j);$$

$$\text{Cov}[Z(B), Z(x)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Cov}[Z(x_i) - Z(x)], \quad \forall x \in B;$$

$$\frac{1}{2} \text{Var}[Z(B) - Z(x)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma_Z(x_i - x) - \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_Z(x_i - x_j), \quad \forall x \in B.$$

Mais uma vez o objectivo é estimar, neste caso $Z(B)$, $B \subset D$ a partir de observações pontuais, ou seja a partir de observações de $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$. O método de estimação por *Kriging* é análogo à estimação pontual, descrita anteriormente.

Assim, o estimador de *Kriging* Ordinário de $\hat{Z}_{KO}(B)$ tem a forma $\hat{Z}_{KO}(B) = \sum_{i=1}^n \lambda_{B,i} Z(x_i) = \lambda_B^T \mathbf{Z}(x)$, onde λ_B e $\mathbf{Z}(s)$ são vectores de dimensão n definidos como: $\lambda_B^T = (\lambda_{B,1}, \lambda_{B,2}, \dots, \lambda_{B,n})$ e $\mathbf{Z}^T(x) = (Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n))$, o vector das observações do processo.

Em termos de covariâncias, quando o processo aleatório $\{Z(x), x \in D\}$ é um processo

estacionário de segunda ordem em D que tem variância finita e em que a função de covariância existe, na estimação global o vector λ que satisfaz (4.6) é dado por

$$\hat{\lambda}_B = \Sigma^{-1} \mathbf{c}_B + \Sigma^{-1} \mathbf{1} \frac{(1 - \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{c}_B)}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}},$$

onde Σ é a matriz de dimensão $n \times n$ de covariâncias de $\mathbf{Z}(x)$ e \mathbf{c}_B é o vector de dimensão n de covariâncias entre $Z(B)$ e $Z(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é $c_{Bi} = Cov[Z(B), Z(x_i)]$, para $i = 1, 2, \dots, n$ e $\mathbf{1}$ o vector composto por n valores unitários (1's).

O estimador de *Kriging* Ordinário de $Z(B)$ é dado por

$$\hat{Z}_{KO}(B) = \mathbf{c}_B^T \Sigma^{-1} \mathbf{Z}(x) + \frac{(1 - \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{c}_B)}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{Z}(x).$$

A variância do erro de estimação de *Kriging* (erro quadrático médio de estimação) é

$$\sigma_{KO}^2 = -\lambda_B^T \mathbf{c}_B + \phi + Var[Z(B)].$$

Como um processo estacionário de segunda ordem é intrinsecamente estacionário (quando a continuidade espacial de um processo é descrita através do semivariograma), então vamos adaptar o método de estimação de *Kriging* Ordinário e exprimir as equações de covariâncias, mas em termos do semivariograma.

Sejam a matriz Λ de dimensão $n \times n$ e os vectores \mathbf{v}_B e $\mathbf{1}$ de dimensão n definidos como:

(i) Λ a matriz de semivariogramas de $\mathbf{Z}(s)$, isto é

$$\Lambda_{ij} = \gamma_Z(x_i, x_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

(ii) \mathbf{v}_B o vector de semivariogramas entre $Z(B)$ e $Z(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é $v_{Bi} = \gamma_Z(B, x_i)$,

$i = 1, 2, \dots, n$;

(iii) $\mathbf{1}$ o vector composto por n valores unitários (1's).

Seja $\sigma_{KO}^2 = Var[\hat{Z}_{OK}(B) - Z(B)] = EQM[\hat{Z}_{OK}(B)] = Var\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_{B,i} Z(x_i) - Z(B)\right\} =$
 $= 2 \sum_{i=1}^n \lambda_{B,i} \frac{1}{2} Var[Z(B) - Z(x_i)] - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_{B,j} \lambda_{B,i} \frac{1}{2} Var[Z(x_j) - Z(x_i)]$, a variância do erro de
 estimação, que em forma matricial pode ser escrita como $\sigma_{KO}^2 = 2\lambda_B^T \mathbf{v}_B - \lambda_B^T \Lambda \lambda_B$.

Assim, as condições em (4.2) são equivalentes a

$$\begin{cases} \text{i) } 2\boldsymbol{\lambda}_B^T \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\lambda}_B^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\lambda}_B \text{ seja mínimo} \\ \text{ii) } \sum_{i=1}^n \lambda_{B,i} = 1 \end{cases} .$$

Associando um multiplicador de Lagrange, obtemos a solução

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_B = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1} \frac{(1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_B)}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1}} \text{ e } \phi_B = - \frac{(1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_B)}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1}} .$$

O estimador de *Kriging* Ordinário de $Z(B)$ é dado por

$$\hat{Z}_{OK}(B) = \mathbf{v}_B^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{Z}(x) + \frac{(1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_B)}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{Z}(x)$$

e a variância do erro de estimação de *Kriging* é $\sigma_{KO}^2 = 2\boldsymbol{\lambda}_B^T \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\lambda}_B^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\lambda}_B = \boldsymbol{\lambda}_B^T \mathbf{v}_B + \phi_B$.

Fazendo as substituições de $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_B$ e ϕ_B temos $\sigma_{KO}^2 = \mathbf{v}_B^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_B - \frac{(1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{v}_B)^2}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{1}}$.

Um método alternativo ao método, atrás descrito, de estimação global por *Kriging* consiste em obter o estimador pontual $Z(\cdot)$ de *Kriging* para todos os pontos $x \in B$ (na prática, para um “grande” número de pontos de B) e determinar a média dos $\hat{Z}(x)$ obtidos. Pode-se provar que estes dois métodos, de um ponto de vista teórico e assumindo a hipótese de estacionaridade em toda a região B , são equivalentes (deve-se às propriedades de linearidade do método *Kriging*).

Isto é, usando uma grelha de pontos G para aproximar numericamente o vector \mathbf{v}_B e depois calcular o estimador global $\hat{Z}(B)$ baseado nessa aproximação é precisamente o mesmo que calcular as estimações locais (pontuais) para todos os pontos da grelha e considerar $\hat{Z}(B)$ como a média de todos os estimadores pontuais. Podemos concluir que é indiferente “*Krigar*” directamente a média global para toda a área em estudo ou proceder por composição (combinação linear) de “*Krigings*” locais.

Há, no entanto, que observar que não há uma relação que se estabeleça de forma trivial entre as variâncias dos erros de estimação pontuais e a variância do erro de estimação global, pois a variância de *Kriging* não se obtém por simples combinação linear das variâncias de *Kriging* pontuais. Além disso, a composição de *Krigings* supõe que todos os estimadores são construídos a partir da mesma configuração de dados.

4.5. Validação Cruzada

A prática de *Kriging* pode parecer simples mas assenta num modelo de variograma que deve traduzir as principais características do fenómeno ou recurso natural em estudo, na área sobre a qual se vai processar a estimação. A necessidade de estimar advém da impossibilidade de conhecimento dos valores reais, contudo, o processo de estimação requer a existência de métodos ou técnicas que permitam a validação dos modelos de variogramas e das hipóteses de homogeneidade espacial para todo o campo em estudo.

A validação cruzada é uma técnica que, utilizando apenas a informação disponível, permite a comparação de n observações com n valores estimados nos pontos onde foram recolhidas as observações – a estimação é testada nos locais onde foram retiradas as amostras.

A validação cruzada trata-se da adaptação da técnica estatística não paramétrica de validação cruzada a um conjunto de dados $Z(x_i)$. O processo consiste em retirar-se uma amostra $Z(x_\alpha)$ do conjunto de dados e estimar-se (utilizando, por exemplo, o estimador linear de *Kriging*) no local da amostra o valor $\hat{Z}(x_\alpha)$. Isto é, consiste basicamente em retirar temporariamente um valor amostrado $Z(x_\alpha)$ do conjunto de valores observados e este é estimado com base nos restantes $Z(x_i)$, $i=1,2,\dots,n$ e $i \neq \alpha$. Do conjunto de dupletos – valores reais, valores estimados $\left(Z(x_i), \hat{Z}(x_i) \right)$, obtidos para todas as amostras $i=1,2,\dots,n$ – calculam-se algumas estatísticas básicas das distribuições univariadas das estimativas e dos erros com o objectivo de aferir a qualidade do modelo escolhido para o variograma. É de esperar que numa boa estimativa os parâmetros de estatística descritiva univariada se assemelhem aos mesmos calculados para os valores reais, bem como é de desejar que os erros (desvios) sejam mínimos e faz-se também a sua análise.

Os passos a seguir para efectuar a validação cruzada são os seguintes, supondo que temos observações das variáveis $Z(x_1)$, $Z(x_2)$, ..., $Z(x_n)$:

1) Para cada $i=1,\dots,n$, aplica-se o método de *Kriging* para obter a expressão do estimador $\hat{Z}(x_i)$ em função das variáveis $Z(x_1)$, ..., $Z(x_{i-1})$, $Z(x_{i+1})$, ..., $Z(x_n)$, usando o semivariograma ajustado. Calcula-se também o valor da variância de estimação $\sigma^2(x_i)$;

2) Para cada i , calcula-se a diferença normalizada entre o valor observado $Z(x_i)$ e o valor

estimado $\hat{Z}(x_i)$:
$$\frac{\left(Z(x_i) - \hat{Z}(x_i) \right)}{\sigma(x_i)};$$

3) A qualidade do ajustamento pode ser medida utilizando os seguintes critérios:

- a análise do histograma das diferenças normalizadas $\frac{\left(Z(x_i) - \hat{Z}(x_i) \right)}{\sigma(x_i)}$, $i = 1, \dots, n$ permite

detectar valores discordantes;

- o valor médio das diferenças normalizadas que deve ser próximo de zero,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\left(Z(x_i) - \hat{Z}(x_i) \right)}{\sigma(x_i)} \right);$$

- a diferença quadrática média que deve ser próxima de um, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\left(Z(x_i) - \hat{Z}(x_i) \right)}{\sigma(x_i)} \right)^2$.

Acontece que esta prática tem um conjunto de limitações que torna a sua aplicabilidade muito restrita (Davis [14]):

- no processo de estimação da validação cruzada intervêm basicamente três factores que estão de tal modo relacionados que se torna difícil julgar qual a sua influência nos valores das estatísticas globais dos desvios: as hipóteses de estacionaridade/homogeneidade espacial, o modelo de variograma (que se pretende validar) e o próprio processo de estimação. Perante umas más estatísticas dos desvios, antes de se começarem a alterar os parâmetros dos variogramas, tem de se fazer, em primeiro lugar, a validação da hipótese de estacionariedade/ homogeneidade espacial, em segundo lugar há que julgar se os desvios não têm a ver com o tipo de estimador usado, o imbricamento destes factores torna qualquer destas análises extremamente difícil;

- se as amostras estão de tal modo dispersas no espaço que os pequenos valores de $\gamma_z(h)$ não intervêm no processo de estimação, parâmetros tão importantes como o “efeito de pepita” não podem ser testados por esta técnica;

– pequenas áreas de grande variabilidade local vão produzir elevados desvios entre os valores estimados e reais. Normalmente, a atenuação destes desvios locais e, conseqüentemente, melhores estatísticas globais da validação cruzada são conseguidos com o aumento do “efeito de pepita” (aumento da influência da média global em detrimento dos valores locais). Em resumo, pequenas áreas de grande variabilidade local tendem a sobreestimar o valor do “efeito de pepita” que, eventualmente, só é representativo dessas pequenas áreas.

Em resumo, a qualidade do modelo de variograma escolhido (modelo representativo para a área não coberta pelas amostras) não pode ser avaliada e validada por estatísticas ou testes do tipo da validação cruzada. Um teste de validação cruzada com bons índices finais não significa necessariamente que estamos perante um modelo adequado ao fenómeno em análise.

Segundo Soares [37] em relação ao modelo de variograma, não se pretende que este seja um estimador ergódico de um segundo momento de uma função aleatória $Z(x)$. Pretende-se, acima de tudo, que ele reflecta, em termos médios, os principais padrões de continuidade espacial/variabilidade do conjunto de amostras $Z(x_i)$ e proporcione o conhecimento (muitas vezes qualitativo, não mensurável) do fenómeno em estudo. Por esta razão, é preferível, na maioria das situações, condicionar o ajustamento de um variograma a um dado modelo ao conhecimento pericial do recurso em estudo do que condicioná-lo a estatísticas resultantes de ajustamentos de mínimos quadrados.

5. Estimação da Precipitação

5.1. O Processo da Precipitação

A precipitação é um dos processos físicos mais importantes, tendo um papel fundamental em várias áreas relacionadas com a gestão da água e dos recursos hídricos, nas suas mais diversas vertentes, desde a vigilância das bacias hidrográficas, previsão da precipitação para períodos curtos, previsão de caudais, bem como em sectores importantes da actividade económica, como por exemplo a agricultura e a indústria. Verifica-se assim uma contínua necessidade de obter modelos determinísticos e/ou estocásticos que têm em vista enfrentar o desafio da estimação da precipitação, num dado ponto geográfico ou numa dada região, com rigor cada vez maior.

Tratando-se da precipitação, uma análise rigorosa em tempo real é muito importante, uma vez que uma boa estimativa da queda da chuva constitui um elemento determinante nos modelos de previsão meteorológica rigorosa fundamental para, por exemplo, as actividades relacionadas com a gestão da água, como a previsão dos caudais, das secas, das cheias ou das cheias repentinas que requerem informação imediata. Sendo assim, a medição da precipitação é feita com o objectivo de recolher o máximo de informação sobre a quantidade de precipitação que cai num determinado intervalo de tempo. É então muito importante que a amostra recolhida seja representativa da

precipitação que tenha ocorrido na região que está a ser estudada, para que esse conhecimento seja uma mais valia importante no apoio à decisão em contextos de incerteza.

Os modelos de precipitação são bastante dependentes das condições meteorológicas. A zona de precipitação associada a sistemas frontais tem uma extensão muito variável que de alguma forma é maior quando se tratam de frentes quentes, mas com intensidades de queda de chuva inferiores e menos variáveis quando comparadas com frentes frias. Ao contrário, em condições meteorológicas de ausência de frentes que por vezes são muito instáveis, a variação espacial de precipitação é maior que em situação de existência de frentes. Todas estas particularidades fazem com que se torne difícil avaliar o rigor dos cálculos da queda de chuva e as escolhas dos locais, bem como a instalação dos sensores de medição da precipitação, o que constitui tarefas de grande importância.

Por outro lado, conseguir medições em tempo real da quantidade da chuva que tenha caído e a previsão da média da precipitação em área, isto é, um valor médio da quantidade de chuva que cai sobre uma determinada região geográfica ao longo de um determinado período de tempo, a muito curto prazo, levam a uma melhor qualidade dos modelos de previsão. Devido, assim, à enorme variabilidade espaço-temporal da precipitação, a obtenção de medições rigorosas não é tarefa fácil de executar, apesar de hoje em dia os sensores de medida serem cada vez mais sofisticados. Uma vez que a informação meteorológica rigorosa pode proporcionar grandes benefícios para o desenvolvimento dos países, seja de forma directa ou indirecta, um enorme esforço tem sido feito com a finalidade de serem desenvolvidas metodologias que permitam combinar a informação obtida com diferentes sensores para conseguir medições meteorológicas mais eficientes.

Dizemos que há precipitação quando qualquer partícula de água sólida ou líquida que cai da atmosfera, em geral de uma nuvem, atinge o solo. A quantidade de precipitação que atinge o solo num dado intervalo de tempo exprime-se pela altura que atingiria numa superfície horizontal, à superfície do Globo sob a condição de não haver perdas nem infiltração, nem por evaporação, nem por escoamento. A precipitação tem uma grande variedade de formas. As mais usuais são a chuva, a neve e o granizo. A precipitação caída sob a forma de neve ou gelo é tratada como se estivesse fundida, e portanto, no estado líquido.

A precipitação forma-se a partir do vapor de água da atmosfera, ainda que a sua natureza dependa muito de factores externos e da dinâmica da atmosfera. O processo de precipitação começa com a formação de nuvens. Há sempre vapor de água na atmosfera, mesmo nos dias mais claros. Mas

para a formação das nuvens tem de se verificar um arrefecimento que leve o ar húmido à saturação e depois à condensação do vapor de água. O arrefecimento é produzido pelo movimento vertical do ar, movimento que pode ter origem térmica ou mecânica.

O principal objectivo de qualquer método de medição da precipitação é obter uma amostra verdadeiramente representativa da precipitação caída sobre a região, a que se refere a medição.

A precipitação é um fenómeno espacialmente distribuído de natureza contínua e tem como unidade de medida o milímetro (*mm*) a que corresponde 1 litro por metro quadrado (l / m^2).

5.1.1. Sensores de Precipitação: udómetros, udógrafos e radares meteorológicos

São utilizados fundamentalmente três tipos de aparelhos para medir a precipitação: udómetros, udógrafos e radares meteorológicos. Uma rede de udómetros ou um radar meteorológico, embora de forma distinta e com interpretações diferenciadas, permitem obter estimativas da intensidade da precipitação. A intensidade da precipitação é conhecida através da medição que dela se faz.

Os udómetros fornecem estimativas pontuais da precipitação nos locais onde se encontram instalados, sendo necessárias metodologias de interpolação para interpretação dos resultados no contexto da região geográfica onde se inserem.

O tipo mais usual de udómetros consiste num cilindro vertical onde se introduz um funil vertical (Figura 5.1). A água da chuva cai pelo funil e é depositada num cilindro graduado mais pequeno. Os udómetros mais sofisticados fornecem um registo “contínuo” da taxa de queda de chuva, durante a ocorrência de uma determinada tempestade, impresso num mapa diário movido pelo mecanismo de um relógio. Tais instrumentos têm um pequeno depósito que se volta, esvazia-se por si e faz disparar um contacto eléctrico quando captou uma certa quantidade de chuva. Se a instalação do udómetro for correcta, os registos obtidos têm de ser representativos da precipitação ocorrida numa pequena zona em redor da localização do udómetro.



Figura 5.1: Udómetro

Normalmente os udómetros são colocados em locais descampados e abrigados do vento, parcialmente enterrados no solo ou fixos a suportes metálicos. Estes requisitos são fundamentais para que as suas informações sejam o mais próximo da realidade, pois quer o vento quer obstáculos colocados na sua periferia, fazem com que as suas informações não sejam absolutamente verdadeiras. Os obstáculos podem protegê-lo da precipitação ou induzir efeitos aerodinâmicos que conduzem à subestimação ou sobreestimação da precipitação; o vento pode abater-se sobre o udómetro, o que provoca a sobreestimação. No entanto, um udómetro normal bem posicionado oferece, de uma forma geral, uma estimativa muito boa da queda de chuva num determinado ponto, mas a medição em muitos casos não é representativa de uma área mais alargada.

Devido à fraca densidade da rede udométrica nas nossas regiões, uma vez que a cobertura de uma dada região por um grande número de udómetros é não só dispendiosa como de difícil manutenção e operação, tem-se pouca informação sobre a distribuição espacial da precipitação. Este facto pode induzir erros importantes de estimação, especialmente em situações de chuvas convectivas, os aguaceiros podem ser tão locais que as medições dadas pelos udómetros não as reflectem, o que neste caso pode conduzir a uma subestimação da precipitação.

A principal característica dos udómetros, quanto à estimação da precipitação, é que estes apenas permitem obter objectivamente estimativas da precipitação no local onde se encontram instalados. A estimação da precipitação recorrendo a udómetros apresenta vantagens e inconvenientes. Por um lado, a utilização de udómetros para estimar a intensidade da precipitação na ocorrência de tempestades ou

furacões poderá ser praticamente impossível, mesmo que o equipamento sobreviva às condições extremamente adversas. Além disso, a informação disponibilizada por um udómetro é válida para a localização onde este se encontra, não sendo possível estabelecer um padrão espacial da precipitação.

Em locais onde as temperaturas podem descer a valores negativos, os udómetros poderão não ser um bom método, uma vez que, a chuva pode cair no funil do udómetro e congelar, ou alguma neve no colector pode impedir a entrada da chuva. Além de todas as condicionantes atribuídas à localização e às condições meteorológicas, há sempre os erros associados a qualquer instrumento de medida. No entanto, considera-se que as estimativas obtidas por este instrumento são, geralmente, precisas (estimativas pontuais), sendo esta a sua principal vantagem como meio de estimação.

Outro instrumento para o registo da precipitação é o udógrafo (Figura 5.2). Este instrumento permite conhecer a variação da precipitação em função do tempo (começo, duração e intensidade). Neste instrumento a precipitação é recolhida por um dispositivo de captação, sendo conduzida, na forma líquida, para uma câmara cilíndrica onde se encontra um flutuador, cujo movimento ascendente resultante da entrada de água na câmara é transmitido a uma pena de registo gráfico, com movimento produzido por uma máquina de relojoaria convencional.

Um sifão ligado à câmara provoca o esvaziamento desta quando é atingido uma determinada quantidade de precipitação, iniciando um novo período de registo.

Um udógrafo é constituído por: um funil de recepção da precipitação; um reservatório que contem um flutuador; um cilindro sobre o qual é colocado o udograma (gráfico do registo da queda pluviométrica), em que no interior existe um relógio ao qual é necessário dar corda para o fazer rodar e um depósito na parte interior do aparelho destinado a recolher a água.

À medida que o nível da água sobe no reservatório, o movimento vertical do flutuador é transmitido (por um mecanismo próprio) a um apêndice metálico, que se desloca sobre o gráfico. O udograma possui uma graduação de zero a dez *mm*, e quando atinge os 10 milímetros ocorre uma descarga automática da água para o depósito situado na parte inferior do aparelho. A bóia, após a descarga, retoma a sua posição inicial que corresponde à posição zero no udograma. A quando da colocação do gráfico deve-se escrever a data, o nome da estação, quando este é retirado, o dia e o valor da precipitação correspondente a esse gráfico. Dar corda ao relógio e verificar se o udógrafo está a registar à hora certa, são duas práticas que não se deve esquecer para se obter boas observações.



Figura 5.2: Udógrafo

O radar meteorológico funciona com base na emissão de ondas electromagnéticas. Estas ondas são emitidas pela antena do radar e os alvos que são interceptados por estas ondas devolvem para a antena uma pequena parte da potência incidente. O intervalo de tempo entre o sinal emitido e o sinal recebido indica a distância a que se encontra o alvo. Assim, o radar mede a potência retrodifundida pelas gotas de chuva, neve ou granizo presentes na atmosfera e converte a medição da energia reflectida em estimativa da precipitação utilizando uma relação clássica, conhecida como relação Z-R. O radar mede a intensidade da precipitação de forma contínua no espaço. Fornece portanto um bom padrão espacial da precipitação.

5.1.2. Rede Meteorológica

A rede meteorológica é o conjunto dos pontos onde se medem as variáveis de estado da fase atmosférica do ciclo hidrológico. Compreende estações udométricas (Figura 5.3), onde se mede apenas a precipitação, e estações mais equipadas onde se medem também outras variáveis meteorológicas como a temperatura e a humidade do ar, a velocidade e direcção do vento, a radiação solar, a insolação e a evaporação, grandezas físicas importantes para a elaboração de balanços hídricos.

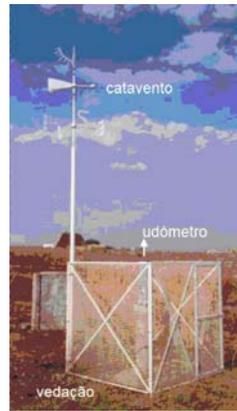


Figura 5.3: Estação Udométrica

A rede de medição de precipitação, assim, é uma particularização da rede meteorológica onde as estações de medição mais completas, as estações meteorológicas, são consideradas apenas ao nível pluviométrico.

A dependência da actual rede meteorológica da proximidade humana é um dos factores mais condicionantes da disponibilização e verificação da informação proveniente desta rede. A autonomia das medições é por isso um objectivo prioritário na modernização da rede meteorológica.

A utilização do moderno equipamento com funcionamento automático permite espaçar as visitas às estações meteorológicas, com a vantagem de fornecer a informação em intervalos de tempo que podem ir até ao minuto.

A rede meteorológica de referência tem como função a recolha de informação de base fidedigna para: o estabelecimento de relações entre os diferentes dados hidrometeorológicos, a caracterização da distribuição dos fenómenos meteorológicos no tempo e no espaço, a avaliação das disponibilidades hídricas nacionais através de balanços hídricos e a modelação dos fenómenos hidrológicos.

Há dois tipos de estações com funcionamento automático: estações de precipitação e meteorológicas.

Medições de variáveis precipitação, velocidade e direcção do vento, evaporação, radiação solar, temperatura e humidade relativa do ar nas estações meteorológicas. O equipamento utilizado consiste de um sensor para cada uma das variáveis meteorológicas, um registador de dados e um sistema de alimentação.

As estações de precipitação constituem uma simplificação da estação meteorológica tipo, onde se monitoriza apenas a precipitação, a velocidade e a direcção do vento. Os equipamentos considerados são: o sensor de precipitação, sensor de direcção do vento, registador de dados e sistema de alimentação.

5.2. A Região Geográfica

A área geográfica, deste estudo, corresponde à região da bacia hidrográfica do rio Ave. A bacia hidrográfica do rio Ave ocupa cerca de 1400 Km^2 confinando a Norte com a bacia do Cávado, a Oriente com a bacia do Douro e a Sul com a bacia do rio Leça, como mostra a Figura 5.4. O rio Ave tem como afluentes mais importantes os rios Este, na margem direita e Vizela, na margem esquerda, cujas bacias drenam 250 Km^2 e 340 Km^2 , respectivamente.

O rio Ave desenvolve-se numa direcção Este-Oeste percorrendo uma extensão de cerca de 101 Km , desde a nascente, na serra da Cabreira a 1260 m de altitude, até à foz localizada a Sul de Vila do Conde. O caudal médio do rio Ave na foz é de $40 \text{ m}^3 / \text{s}$ de acordo com dados apresentados no seu plano de bacia hidrográfica, DRAN e INAG [18] e [19].

Esta região engloba, total ou parcialmente, as áreas de 16 concelhos: Guimarães, Vila Nova de Famalicão, Barcelos, Braga, Cabeceiras de Basto, Fafe, Felgueiras, Lousada, Maia, Mondim de Basto, Paços de Ferreira, Póvoa de Lanhoso, Póvoa de Varzim, Santo Tirso, Vieira do Minho e Vila do Conde.



Figura 5.4: Localização da bacia hidrográfica do rio Ave relativamente às bacias vizinhas do Norte de Portugal

O clima da região da bacia hidrográfica do rio Ave é resultado da sua posição geográfica, proximidade do Atlântico, da forma e disposição dos principais conjuntos montanhosos do Noroeste de Portugal. Estes factores determinam que a região seja muito pluviosa, onde, nos sectores mais elevados de montante da bacia, ocorre precipitação anual da ordem de 2700 *mm*, em média, repartida em cerca de 130 dias anualmente.

Uma parte significativa da bacia (correspondente aos sectores de jusante e intermédio e às áreas expostas a barlavento do sector de montante) insere-se numa vasta região de clima de tipo marítimo, fachada atlântica.

A altitude da área abrangida pelo plano da bacia hidrográfica varia entre o nível do mar e os 1260 metros, situando-se a média em 268 metros e cerca de 60% da área do plano encontra-se a altitudes inferiores a 280 metros. Verificando-se em apenas 10% daquela área altitudes superiores a 560 metros. Cerca de 66 % da área do plano de bacia apresenta declives inferiores a 10%. Os declives mais acentuados localizam-se, sobretudo, nas regiões mais altas da cabeceira da bacia.

A maior parte da área da bacia apresenta temperatura entre 13°C e 15°C. A faixa localizada a Leste do alinhamento Póvoa do Lanhoso - Fafe, mais elevada, apresenta temperaturas entre 11°C e 13°C, mantendo os vales do rio Ave e da ribeira de Tabuaças temperaturas superiores. No local mais elevado da área, a 1262 *m* de altitude, nas nascentes do rio Ave, a temperatura média diária do ar desce a valores entre 7°C e 9°C. A faixa litoral e as áreas abrigadas dos vales, particularmente do trecho terminal dos rios Ave e Este, apresentam os maiores valores de temperatura, rondando 15°C, o mesmo sucedendo na área de Guimarães.

Os Verões são de tipo moderado, com a temperatura média máxima do mês mais quente (Julho) entre 27°C e 28°C, registando-se temperaturas superiores a 25°C entre 80 dias e 100 dias anualmente e os Invernos são do tipo fresco.

No sector de montante e nos locais de maior altitude verificam-se Invernos do tipo frio e muito frio, com temperaturas negativas em cerca de 58 dias, em média, anualmente e a temperatura mínima média do mês mais frio (Fevereiro) é de cerca de 0,4°C. A estação seca é marcada por valores muito baixos de precipitação, com destaque para Julho.

O valor da precipitação anual média na área em estudo é de 1820,3 *mm*. A precipitação na área do plano de bacia varia entre 900 e 3900 *mm*. Ocorrendo as precipitações mais elevadas na região da Serra da Cabreira, onde se observam valores de precipitações médias anuais variando entre 2700 e

3900 *mm*. Estas vão diminuindo progressivamente de montante para jusante, ao longo da bacia hidrográfica, registando-se valores inferiores a 1500 *mm* anuais nas zonas próximas da foz do rio Ave.

Para a formação de nuvens tem que se verificar um arrefecimento que leve o ar húmido à saturação e depois à condensação do vapor de água, como já foi dito anteriormente. O arrefecimento é produzido pelo movimento vertical do ar, movimento que pode ter origem térmica ou mecânica. O mecanismo envolvido na ascensão que conduz ao arrefecimento é muitas vezes utilizado para classificar o tipo de precipitação. Assim, nas nossas regiões, distinguem-se habitualmente quatro tipos de precipitação: a precipitação frontal, que acompanha as frentes em massas de ar frio e quente, a precipitação convectiva, chamada também aguaceiro, que resulta do aquecimento da atmosfera em contacto com a superfície da Terra, sobretudo nos meses de Primavera e Verão, a precipitação de convergência, associada às depressões (centros de baixas pressões) e a precipitação orográfica, que resulta da subida forçada de massas de ar húmido ao longo de barreiras naturais, como as encostas dos montes ou as linhas de montanhas.

Associada à frente polar assiste-se à passagem frequente de centros depressionários, aos quais está associada uma forte dinâmica ascendente do ar. Esta situação é responsável por chuvas por vezes abundantes (as chamadas chuvas frontais). As massas de ar vindas de oeste (massas húmidas de ar polar marítimo) descarregam progressivamente a sua humidade à medida que se deslocam para Leste. Nesta deslocação as massas de ar são parcialmente interceptadas pelas principais cadeias montanhosas, levando a um aumento da frequência, duração e intensidade das precipitações (chuvas orográficas) nas áreas mais elevadas.

Esta atenuação dos fluxos marítimos para leste é de importância crucial, não apenas na modificação das condições e humidade do ar e na ocorrência de precipitação, como também nos contrastes térmicos ao longo da bacia. O oceano, devido à sua conhecida inércia térmica (temperatura regular ao longo do ano), actua como elemento moderador dos extremos térmicos sobre o continente, tanto sobre os mínimos durante o Inverno como sobre os máximos durante o Verão. Deste modo, nas áreas continentais, onde se faz sentir o efeito dos fluxos oceânicos, torna-se menos sensível o arrefecimento e o aquecimento superficial, seja ao longo dos dias, seja durante períodos de tempo mais longos. Deste modo, os relevos da bacia do Ave, ao impedirem ou dificultarem a penetração do ar marítimo para leste, exercem a sua influência sobre toda a bacia, tornando essas áreas mais dependentes dos fluxos continentais, arrefecidos durante a estação invernal e aquecidos durante a

época estival. Este facto torna-se particularmente importante, tendo em conta o afastamento ao oceano de algumas áreas da bacia.

Por outro lado, as depressões de origem meridional (depressões subtropicais), tão importantes nos quantitativos de precipitação no sul do país, têm na bacia do Ave uma influência relativamente baixa. Mais importante será a sua influência na ocorrência de chuvas intensas nas áreas montanhosas, devido à grande instabilidade das massas de ar bastante húmidas relacionadas com os relevos da bacia.

Durante o Verão, Portugal continental encontra-se sob influência anticiclónica quase permanente. Nesta altura a frente polar está deslocada mais para Norte, e as perturbações ciclónicas não se fazem sentir às latitudes da bacia do Ave. Esta situação de grande estabilidade é apenas quebrada pela passagem ocasional das depressões atlânticas, as quais são, no entanto, suficientemente importantes para provocar alguma precipitação nesta época do ano, principalmente nas áreas de maior altitude.

As estações da Primavera e Outono funcionam como transição entre as duas anteriores. O gradiente térmico às latitudes médias do Hemisférios Norte é mais fraco e a circulação tende a diminuir a sua intensidade, tornando-se meridiana. O tempo é frequentemente instável, ora sob influência anticiclónica, ora sob influência dos centros depressionários, variando num curto período entre o céu limpo e as precipitações mais ou menos intensas; as temperaturas são amenas, mas as amplitudes térmicas diárias são geralmente elevadas. Estas situações intermédias reflectem-se, como seria de esperar, de formas diversas nas várias áreas climáticas que formam a bacia do Ave.

5.3. Apresentação da Aplicação ao Caso de Estudo

Na área da bacia hidrográfica do rio Ave existe uma rede udométrica (apenas um dos postos é udográfico), constituída por um total de 19 estações de amostragem. A Figura 5.5 apresenta o mapa com as estações pertencentes à bacia do rio Ave.

A densidade média de estações udométricas é cerca de uma estação por cada 77 Km^2 . As estações de amostragem, com mais de 30 anos de dados, são da ordem dos 32%. A informação de base utilizada incluiu precipitações associadas a cada mês do ano num período de referência de 1931 a 2008. Estes dados de precipitação descritos provêm do Instituto Nacional de Meteorologia.



Figura 5.5: Mapa da rede de estações udométricas/udográfica do plano da bacia hidrográfica do rio Ave

Um *datum* é um conjunto de parâmetros fundamentais (quantidades numéricas ou entidades geométricas) que, colectivamente, servem de referência para definir outros parâmetros.

Se esse conjunto de parâmetros fundamentais descrever a origem e a orientação dos eixos de um sistema de coordenadas relativamente à Terra, designa-se por *datum* geodésico.

Um *datum* geodésico contém na sua definição um elipsóide de revolução como modelo da Terra. A forma, dimensões e posição do centro do elipsóide relativamente ao centro de massa da Terra são determinados por forma a que a superfície do elipsóide se adapte o melhor possível à superfície terrestre num determinado país ou região.

Os *data* locais mais utilizados em Portugal Continental são o *datum* Lisboa e o *datum* 73. O *datum* Lisboa é o *datum* geodésico mais antigo e a sua origem situa-se no Castelo de S. Jorge, em Lisboa. O *datum* 73 utiliza como origem um ponto mais central à Rede Geodésica, o vértice Melriça. Ambos os *data* utilizam o elipsóide de Hayford.

Um outro *datum* geodésico interveniente na cartografia nacional é o *datum* Europeu, conhecido pelo acrónimo ED50, constituído pelo elipsóide de Hayford posicionado na Torre de Helmert em Potsdam, na Alemanha.

A cartografia das Regiões Autónomas dos Açores e da Madeira é apoiada em vários *data*: o *Datum* Base SE - Porto Santo para a Madeira, e um *Datum* para cada um dos grupos do arquipélago dos Açores. Esses *data* usam o elipsóide de Hayford para representar a terra e o sistema de projecção de Gauss-Kruger.

No nosso estudo é adoptado o sistema de coordenadas cartesianas (X,Y), em que X representa a distância (em Km) à meridiana e Y a distância (em Km) à perpendicular, que coincide com o sistema de coordenadas militares (M,P) que estão no denominado sistema de referência Hayford-Gauss *Datum* Lisboa, no qual a região em estudo se situa entre as coordenadas $X= 150 \text{ Km}$ a Este, $X= 210 \text{ Km}$ a Oeste, $Y= 522 \text{ Km}$ a Norte e $Y= 474 \text{ Km}$ a Sul.

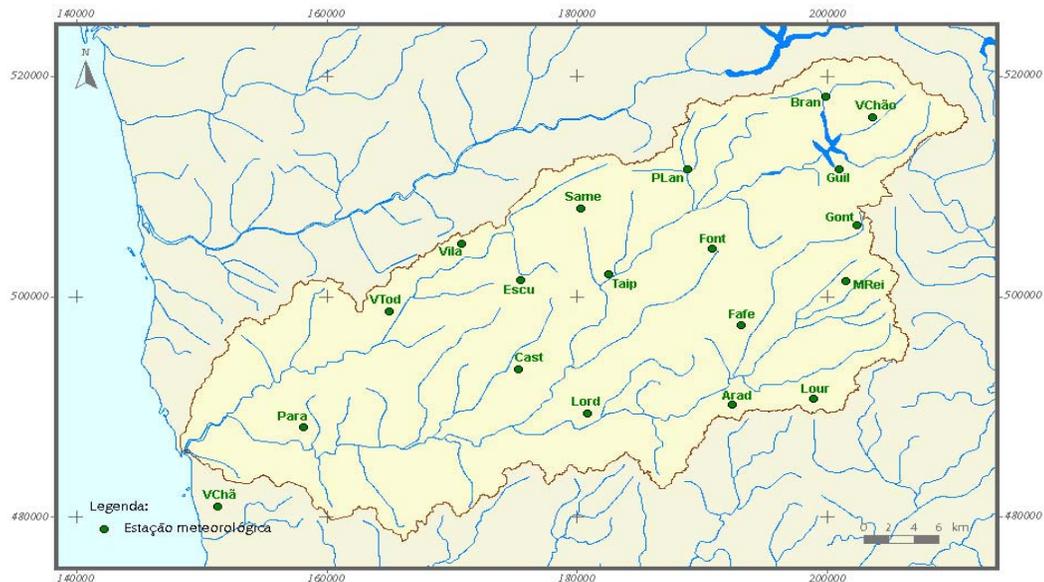


Figura 5.6: Distribuição espacial das estações de medição de precipitação na bacia hidrográfica do rio Ave

Na área da bacia hidrográfica do rio Ave existe uma rede de monitorização pluviométrica, constituída por 19 estações de amostragem cujas características e período de observação se encontra na Tabela 5.1 e a localização geográfica na Figura 5.6.

Tabela 5.1: Estações de medição de precipitação da bacia hidrográfica do rio Ave

| Estação de Amostragem | Código | Sub-bacia | Tipo de Estação | Coordenadas (km) | | Altitude (m) | Período de dados utilizados |
|---------------------------|--------|-----------|-----------------|--------------------|---------|----------------|-----------------------------|
| | | | | X | Y | | |
| Brancelhe (Bran) | 04I/02 | Ave | Udométrica | 199,864 | 518,083 | 379 | Dez 31 - Maio 08 |
| Vilar Chão (VChão) | 04I/04 | Ave | Udométrica | 203,638 | 516,264 | 592 | Jun 80 - Jun 08 |
| Guilhofrei (Guil) | 04I/01 | Ave | Udométrica | 200,953 | 511,543 | 374 | Out 39 - Jun 08 |
| Gontim (Gont) | 04I/05 | Vizela | Udométrica | 202,344 | 506,422 | 695 | Jun 80 - Jun 08 |
| Póvoa de Lanhoso (PLan) | 04H/01 | Ave | Udométrica | 188,882 | 511,490 | 173 | Mai 80 - Dez 04 |
| Fontela (Font) | 04H/02 | Selho | Udométrica | 190,773 | 504,298 | 335 | Jun 80 - Abr 08 |
| Moreira do Rei (MRei) | 05I/04 | Vizela | Udográfica | 201,511 | 501,362 | 505 | Jun 80 - Maio 08 |
| Sameiro (Same) | 04G/02 | Ave | Udométrica | 180,277 | 507,929 | 559 | Out 32 - Abr 08 |
| Fafe (Fafe) | 05H/01 | Vizela | Udométrica | 193,132 | 497,416 | 259 | Jan 32 - Nov 03 |
| Arada (Arad) | 05H/03 | Vizela | Udométrica | 192,428 | 490,167 | 196 | Abr 32 - Jun 02 |
| Loureiro (Lour) | 05I/03 | Vizela | Udométrica | 198,888 | 490,718 | 479 | Jun 80 - Maio 08 |
| Taipas (Taip) | 05G/04 | Ave | Udométrica | 182,534 | 502,031 | 115 | Mai 80 - Maio 08 |
| Vilaça (Vila) | 04G/05 | Este | Udométrica | 170,784 | 504,753 | 140 | Mai 80 - Set 07 |
| Escudeiros (Escu) | 05G/05 | Este | Udométrica | 175,550 | 501,465 | 190 | Mai 80 - Fev 08 |
| Castelões (Cast) | 05G/03 | Ave | Udométrica | 175,290 | 493,351 | 147 | Out 79 - Fev 08 |
| Lordelo (Lord) | 05G/06 | Vizela | Udométrica | 180,854 | 489,386 | 110 | Mai 80 - Abr 08 |
| Viatodos (VTod) | 05F/01 | Este | Udométrica | 165,049 | 498,607 | 83 | Out 32 - Abr 08 |
| Parada (Para) | 05F/02 | Ave | Udométrica | 158,142 | 488,123 | 59 | Out 79 - Jun 08 |
| Vila Chã - Mindelo (VChã) | 06E/03 | Ave | Udométrica | 151,190 | 480,917 | 37 | Jan 79 - Maio 08 |

Na região considerada encontram-se distribuídos 18 udómetros nas localizações de Brancelhe (Bran), Vilar Chão (VChão), Guilhofrei (Guil), Gontim (Gont), Póvoa de Lanhoso (PLan), Fontela (Font), Sameiro (Same), Fafe (Fafe), Arada (Arad), Loureiro (Lour), Taipas (Taip), Vilaça (Vila), Escudeiros (Escu), Castelões (Cast), Lordelo (Lord), Viatodos (VTod), Parada (Para), Vila Chã-Mindelo (VChã) e 1 udógrafo na localização de Moreira do Rei (MRei). A região considerada está contida num rectângulo com uma área total de $52 \times 68 \text{ km}^2$. Esta região pode ser visualizada numa grelha formada por 26×34 células e onde cada célula representa uma região de $2 \times 2 \text{ km}^2$ (Figura 5.7).

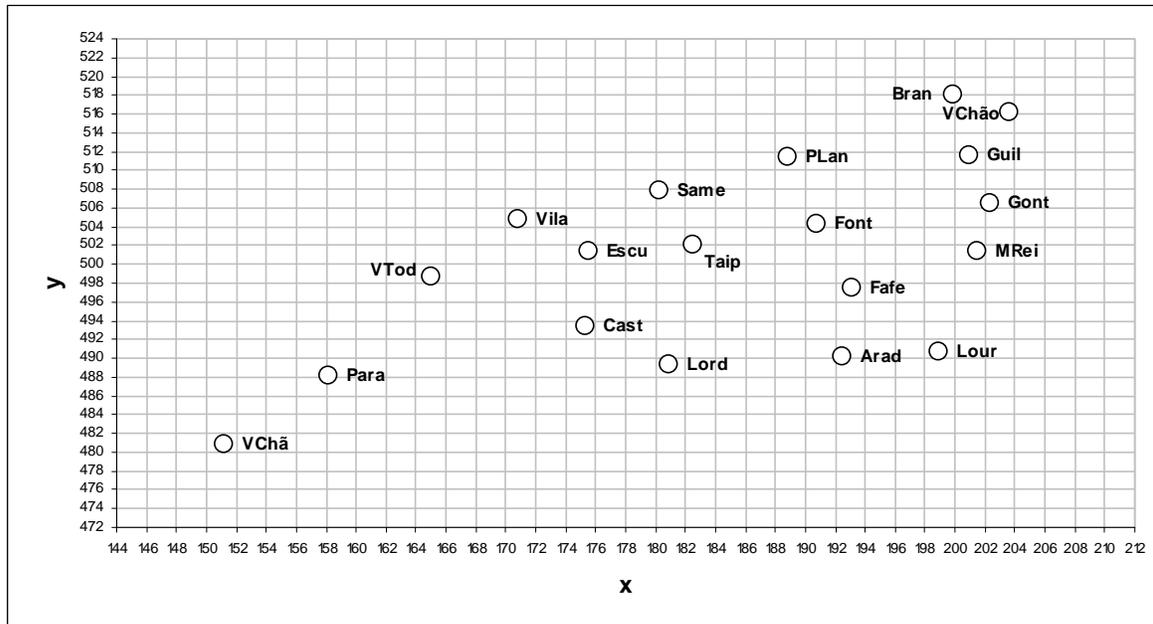


Figura 5.7: Representação esquemática da localização das 19 estações meteorológicas na malha de células que contém a região em estudo

A densidade média de estações de medição de precipitação é de cerca de uma estação por cada 73 km^2 , tendo em conta que a bacia hidrográfica do Ave tem uma superfície aproximada de 1400 km^2 , é considerada (pela Organização Meteorológica Mundial) suficiente para a representação adequada da variabilidade espacial e temporal da precipitação numa região deste tipo (região montanhosa de clima temperado) e para definir com rigor os valores médios das precipitações ocorridas na bacia.

Como forma de familiarizar-nos com os dados e descobrir as suas principais características efectuou-se uma pequena análise descritiva que se apresenta na Tabela 5.2, que nos permitiu orientar o nosso estudo e formular hipóteses sobre este processo.

Tabela 5.2: Estatísticas básicas de todas as estações de amostragem no período observado

| Estação de Amostragem | Número de meses | Valor médio (mm) | Mediana (mm) | Valor mínimo (mm) | Valor máximo (mm) | 1º Quartil (mm) | 3º Quartil (mm) | Dispersão quartal (mm) | Desvio padrão (mm) | Coefficiente de variação |
|-----------------------|-----------------|------------------|--------------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------|------------------------|--------------------|--------------------------|
| Sameiro | 889 | 149,1 | 100,0 | 0,0 | 1100,8 | 40,9 | 217,5 | 176,6 | 148,8 | 0,99 |
| Vilaça | 304 | 126,6 | 90,7 | 0,0 | 854,2 | 33,0 | 178,8 | 145,8 | 126,5 | 0,97 |
| Póvoa de Lanhoso | 285 | 143,4 | 92,1 | 0,0 | 1053,1 | 29,0 | 204,7 | 175,7 | 153,6 | 1,00 |
| Fontela | 286 | 133,0 | 94,3 | 0,0 | 667,8 | 33,0 | 195,8 | 162,8 | 128,7 | 0,95 |
| Guilhofrei | 699 | 197,4 | 124,7 | 0,0 | 1763,9 | 45,6 | 263,2 | 217,6 | 223,3 | 1,13 |
| Brancelhe | 901 | 165,2 | 110,0 | 0,0 | 1068,3 | 43,4 | 232,6 | 189,2 | 169,4 | 1,02 |
| Vilar Chão | 304 | 151,4 | 104,5 | 0,0 | 1033,6 | 41,8 | 218,2 | 176,4 | 152,3 | 0,99 |
| Gontim | 331 | 173,2 | 125,0 | 0,0 | 1193,6 | 48,4 | 237,9 | 189,5 | 171,3 | 0,99 |
| Viatodos | 906 | 131,6 | 89,9 | 0,0 | 833,1 | 36,2 | 189,8 | 153,6 | 127,5 | 0,97 |
| Parada | 330 | 105,8 | 73,7 | 0,0 | 734,1 | 35,0 | 146,7 | 111,7 | 103,5 | 0,97 |
| Castelões | 315 | 100,6 | 71,0 | 0,0 | 663,7 | 27,0 | 150,8 | 123,8 | 98,6 | 0,98 |
| Taipas | 319 | 125,2 | 86,8 | 0,0 | 994,2 | 31,9 | 177,6 | 145,7 | 133,6 | 1,04 |
| Escudeiros | 317 | 123,2 | 82,6 | 0,0 | 785,6 | 30,7 | 173,7 | 143,0 | 129,5 | 1,03 |
| Lordelo | 322 | 87,6 | 55,6 | 0,0 | 544,4 | 19,0 | 137,3 | 118,3 | 90,1 | 1,01 |
| Fafe | 847 | 138,6 | 95,3 | 0,0 | 848,5 | 37,5 | 201,3 | 163,8 | 135,0 | 0,97 |
| Arada | 842 | 118,3 | 82,0 | 0,0 | 750,8 | 32,0 | 172,0 | 140,0 | 117,7 | 0,99 |
| Moreira do Rei | 300 | 138,1 | 97,2 | 0,0 | 778,8 | 40,6 | 207,0 | 166,4 | 128,7 | 0,93 |
| Loureiro | 297 | 117,2 | 79,1 | 0,0 | 629,7 | 27,3 | 183,3 | 156,0 | 118,2 | 1,00 |
| Vila Chã | 330 | 75,8 | 48,4 | 0,0 | 442,4 | 14,8 | 112,1 | 97,3 | 79,1 | 1,05 |

Observa-se que a média mais baixa de 75,8 mm foi obtida em Vila Chã e a mais elevada em Guilhofrei (com o valor de 197,4 mm). Os desvios padrão nas várias estações de amostragem não apresentam uma flutuação muito forte, o que mostra a relativa homogeneidade do comportamento das 19 estações de amostragem de precipitação, ao longo do tempo observado. Isso permitir-nos-á englobá-las dentro do mesmo modelo do processo aleatório. Há uma relação forte entre as médias e os desvios padrão, isto é, a dispersão dos valores é maior quanto maior é o nível da precipitação.

Das estatísticas descritivas das médias de precipitação, apresentadas na Tabela 5.3, associadas aos diferentes meses do ano no período estudado (de 1931 a 2008) destaca-se:

- os mais reduzidos quantitativos de precipitação ocorrem em Julho e em Agosto, que são também os meses aos quais estão associados os menores desvios padrão;
- os meses com maior pluviosidade média são Janeiro e Dezembro;

- Maio, Outubro e Novembro são os meses em que os coeficientes de variação da precipitação são menores;
- os meses que, em média, apresentam os valores médios máximos mais elevados são Dezembro e Janeiro.

Tabela 5.3: Estatísticas descritivas das médias mensais de precipitação nas 19 estações de amostragem

| Precipitação observada | Número de médias | Valor médio (mm) | Mediana (mm) | Valor mínimo (mm) | Valor máximo (mm) | Desvio padrão (mm) | Coefficiente de variação (mm) |
|-------------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------------------|
| Média Janeiro | 760 | 206,4 | 181,2 | 0 | 1467,8 | 48,6 | 0,24 |
| Média Fevereiro | 761 | 164,6 | 145,5 | 0,2 | 1061,4 | 55,0 | 0,33 |
| Média Março | 755 | 138,3 | 86,8 | 0 | 1193,6 | 53,6 | 0,39 |
| Média Abril | 753 | 140,0 | 113,6 | 0,7 | 612 | 21,9 | 0,16 |
| Média Maio | 761 | 119,2 | 111,5 | 0 | 513,4 | 11,1 | 0,09 |
| Média Junho | 769 | 56,0 | 42,6 | 0 | 443,7 | 13,0 | 0,23 |
| Média Julho | 758 | 25,3 | 18,3 | 0 | 233,7 | 7,7 | 0,31 |
| Média Agosto | 732 | 33,0 | 22,8 | 0 | 174,2 | 6,0 | 0,18 |
| Média Setembro | 759 | 83,7 | 65,5 | 0 | 407,7 | 14,8 | 0,18 |
| Média Outubro | 762 | 177,7 | 150,5 | 0 | 1008,7 | 24,8 | 0,14 |
| Média Novembro | 758 | 201,2 | 179,3 | 0 | 1105,3 | 31,1 | 0,15 |
| Média Dezembro | 764 | 236,2 | 205,9 | 0 | 1763,9 | 53,1 | 0,23 |

A distribuição da precipitação ao longo do ano caracteriza-se por uma concentração de 75 % no semestre húmido (Novembro a Abril), com máximos localizados em Dezembro e Janeiro. A partir de Abril a precipitação diminui consideravelmente, atingindo o valor mínimo no mês de Agosto. Nos meses de Verão verificam-se, quase sempre, valores médios muito baixos, com uma grande quantidade de valores iguais ou próximos de zero. Não há uma forte diferença entre os valores médios e os valores medianos.

A legenda, que se encontra na Figura 5.8, refere-se às caixas com bigodes aqui apresentadas.

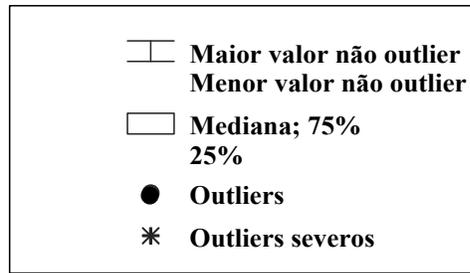


Figura 5.8: Legenda das caixas com bigodes

Uma caixa-com-bigodes ou *boxplot* é um gráfico em que, à escala, se representam o menor valor que não seja *outlier* (extremo inferior do bigode), o quartal inferior (fundo da caixa), a mediana (a linha vertical na caixa), o quartal superior (o topo da caixa) e o maior valor que não seja *outlier* (extremo superior do bigode).

Os *outliers* e os *outliers* severos são marcados com os símbolos ● e *, respectivamente.

As caixas com bigodes dos valores observados referentes às 19 localizações, ao longo dos 12 meses do ano hidrológico, vão ser apresentadas.

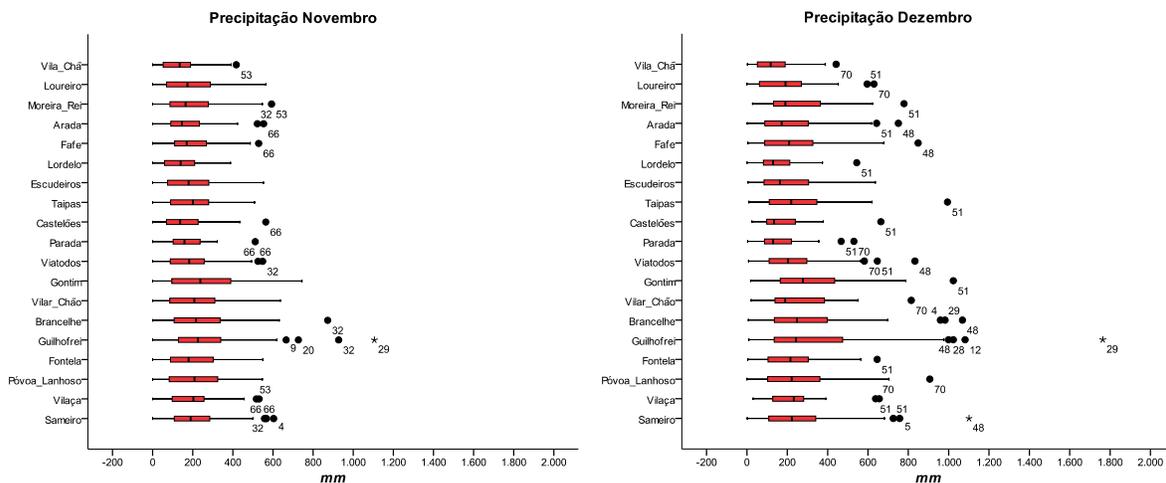


Figura 5.9: Caixas com bigodes das observações em Novembro e Dezembro

As caixas-com-bigodes da Figura 5.9, referentes aos meses de Outubro e Novembro, apresentam muitos *outliers*. A estação de amostragem Guilhofrei é a única estação que apresenta *outliers* severos observados no mês de Novembro e Dezembro, ambos no ano de 1959, (em Dezembro deste ano

observou-se o maior valor de precipitação, de 1763,9 mm, no período observado) que deve ter sido um ano excepcional em termos de precipitação.

Novembro e Dezembro, na maioria das estações de amostragem, são os dois meses do ano que apresentam maior variabilidade nos valores de precipitação e com valores muito elevados, mesmo extremos.

Nos sectores mais pluviosos da bacia (na zona mais a montante), Janeiro constitui o mês mais pluvioso, com um máximo de 1467,8 mm, novamente, em Guilhofrei. O mesmo acontece em Sameiro, Vilar Chão, Gontim e Fafe, em que se verificam os maiores valores de precipitação (Figura 5.10). Guilhofrei, em Fevereiro, continua a ser a estação de amostragem com maior precipitação, com um máximo de 1061,4 mm. Fevereiro é o mês do ano que apresenta o menor número de outliers, apenas dois, observados em Brancelhe e Sameiro.

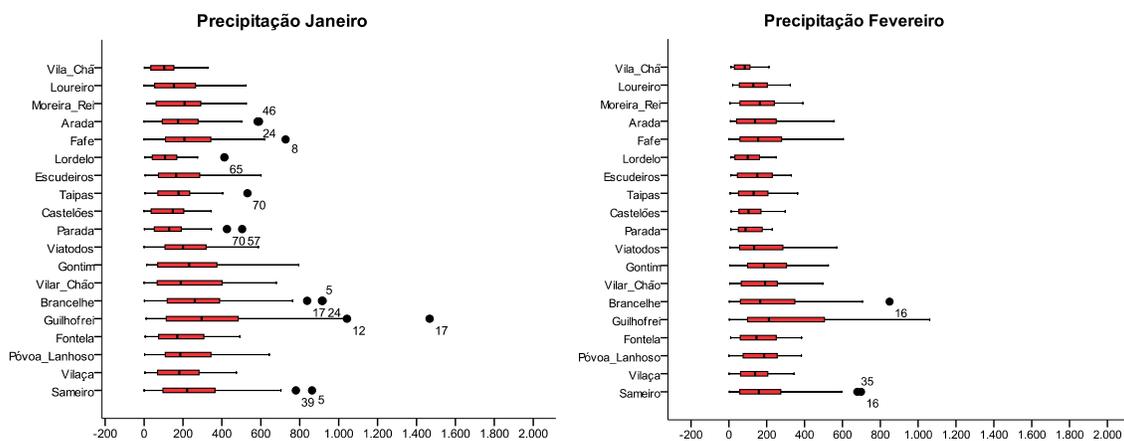


Figura 5.10: Caixas com bigodes das observações em Janeiro e Fevereiro

A precipitação em Março ainda é bastante elevada, comparada com a do mês de Abril. Março apresenta muitos valores extremos, nomeadamente, muitos outliers severos (como podemos observar na Figura 5.11). No mês de Março, a precipitação atinge o valor máximo de 1193,6 mm em Gontim.

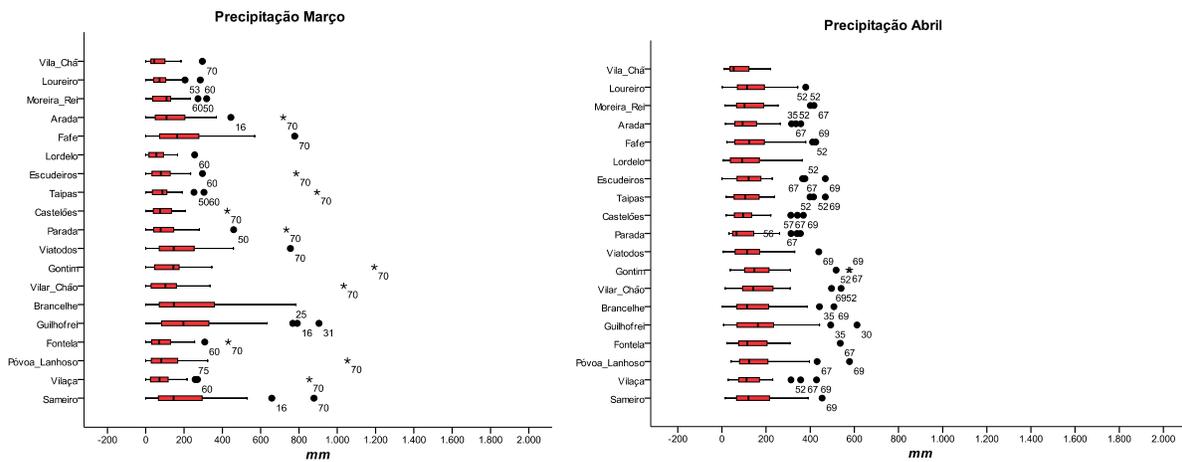


Figura 5.11: Caixas com bigodes das observações em Março e Abril

Nos meses de Maio e Junho, Figura 5.12, os valores de precipitação reduzem-se bastante, a variabilidade dos valores é também bem menor, bem como o número de valores extremos. O mês de Junho em Vila Chã, na estação de amostragem mais a jusante da bacia, apresenta já neste mês valores muito pequenos de precipitação, observou-se o valor de 82,4 mm.

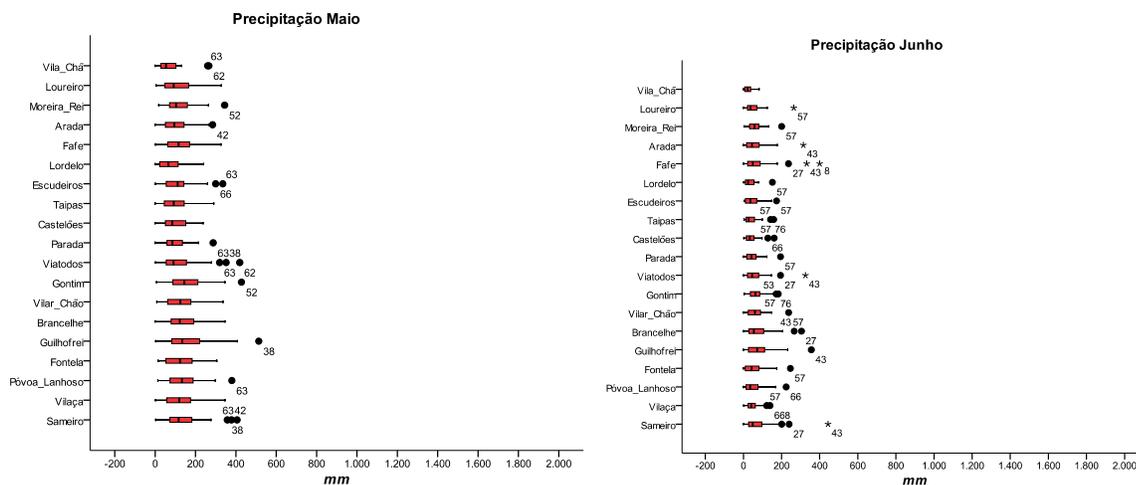


Figura 5.12: Caixas com bigodes das observações em Maio e Junho

A estação seca é marcada por valores muito baixos de precipitação, com destaque para o mês de Julho, ocorrendo o mínimo observado nas 19 estações de 46,9 mm em Lordelo e o máximo de 233,7 mm em Guilhofrei (Figura 5.13). Nos meses de Julho e Agosto há uma muito menor dispersão dos

dados, comparativamente com os restantes meses do ano. É de salientar que o mês de Julho é o mês que apresenta os valores mais baixos de precipitação.

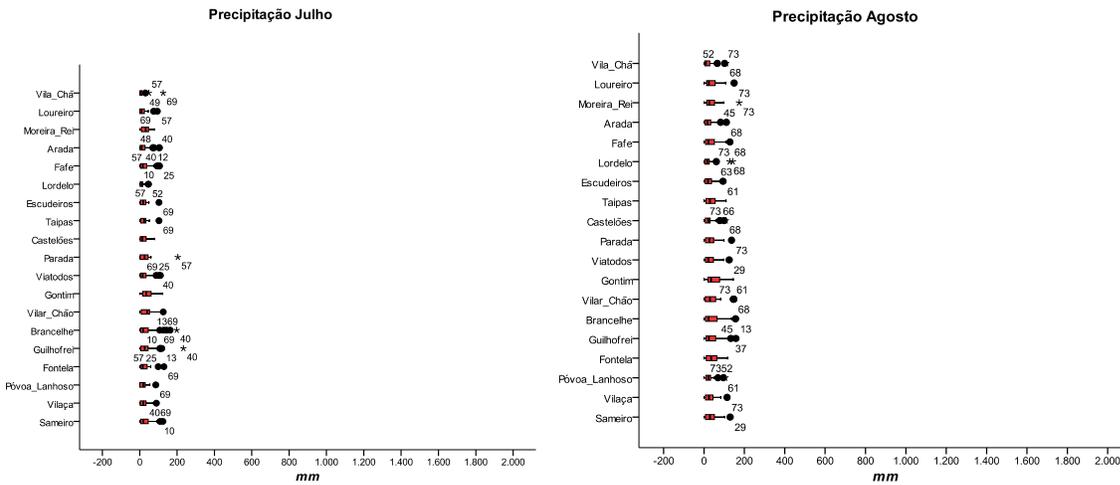


Figura 5.13: Caixas com bigodes das observações em Julho e Agosto

A precipitação, nos meses de Setembro e Outubro, atinge novamente valores mais elevados, como podemos observar na Figura 5.14. Também a partir destes meses aumenta a variabilidade dos valores de precipitação.

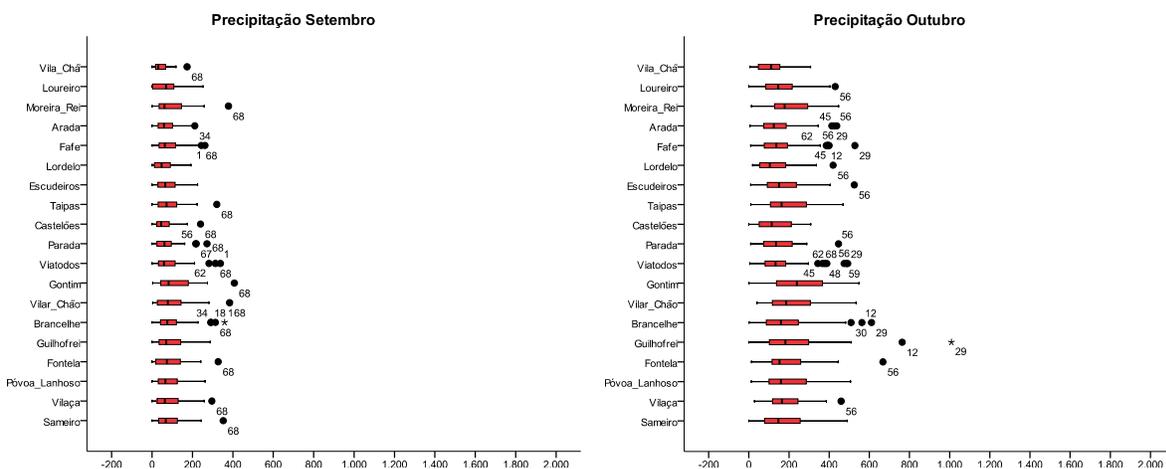


Figura 5.14: Caixas com bigodes das observações em Setembro e Outubro

No Anexo I, a Tabela I e a Tabela II apresentam as estatísticas descritivas básicas mensais da precipitação das 19 estações de medição, que confirmam a interpretação e leitura dos valores que os gráficos anteriores nos indicaram.

Regista-se grande variabilidade inter-anual nas precipitações, sendo frequentes as sequências de anos secos e de anos húmidos e também uma grande variabilidade intra-anual traduzida pela concentração da quase totalidade das precipitações, em alguns meses do ano.

Nos últimos trinta anos os valores da precipitação na zona das cabeceiras do Ave sofreram reduções acentuadas; tais reduções correspondem a um efeito permanente, uma vez que se fazem sentir a nível semestral e sazonal, e na sua origem poderá estar o forte desmatamento nas cabeceiras provocado quer por incêndios quer por corte. O clima na bacia pode considerar-se na sua generalidade muito húmido, variando desde húmido no litoral a super-húmido nas regiões montanhosas (PGIRH/N e NATO PO-RIVERS [34]).

5.4. Aplicação do *Kriging* às Medições da Precipitação

Os dados dos fenómenos naturais abordados (medições de precipitação) no nosso estudo são distribuídos no tempo e no espaço. Será importante formalizar, neste momento, a noção de processo aleatório espaço-temporal.

Um processo aleatório espaço-temporal é um conjunto de variáveis aleatórias

$$\{Z(x, t) : x \in D; t = 0, \pm 1, \dots\}, \quad (5.1)$$

onde D é uma região em \mathbb{R}^d , i. e., no espaço real de dimensão finita positiva ($d \geq 1$).

Assim, para cada t , $\{Z(x, t), x \in D\} = \{Z_t(x), x \in D\}$ é um processo (puramente) espacial, como já foi definido (em que $D \subset \mathbb{R}^2$ ou $D \subset \mathbb{R}^3$), e para cada local $x \in D$, $\{Z(x, t), t = 0, \pm 1, \dots\} = \{Z_x(t), t = 0, \pm 1, \dots\}$ é uma série temporal.

Para n pontos x_1, x_2, \dots, x_n (fixos) em D , o conjunto $\{Z(t), t = 0, \pm 1, \dots\}$, quando $Z(t) = \{Z(x_1, t), Z(x_2, t), \dots, Z(x_n, t)\}$ é uma série temporal multivariada (n-dimensional) e é também uma trajectória parcial do processo definido em (5.1). O conjunto de vectores $\{Z(x), x \in D\}$, com

$Z(x) = \{Z(x, t_1), Z(x, t_2), \dots, Z(x, t_T)\}$ para os instantes de tempo t_1, t_2, \dots, t_T (fixos) é também uma trajectória parcial (espacial) do mesmo processo.

A família finita de variáveis aleatórias $\{Z(x_j, t_k) : j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, T\}$ é uma trajectória parcial total do processo (5.1). Quando $t_k = k$, $k = 1, \dots, T$, a trajectória parcial total é, usualmente representada, indexando o parâmetro t do tempo, isto é, $\{Z_t(x_j) : j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T\}$.

Definindo desta maneira, o processo espaço-temporal pode ser considerado simplesmente uma infinita, possivelmente correlacionada, sucessão de processos espaciais.

No nosso caso, quando pretendemos obter estimativas de boa qualidade da precipitação média mensal em diferentes localizações geográficas da bacia hidrográfica do rio Ave (não amostradas), o nosso objectivo é obter expressões para os estimadores de $Z_t(x_0)$ ou $Z_t(B)$, para determinado $x_0 \in D$ ou $B \subset D$ (com $D \subset \mathbb{R}^2$), baseadas nos valores observados $\{Z_1(x_1), \dots, Z_1(x_n), \dots, Z_T(x_1), \dots, Z_T(x_n)\}$ do processo espaço-temporal $Z(.,.)$, onde este pode ser representado por $\{Z(x, t), x \in \mathbb{R}^2, t = 1, 2, \dots, T\}$.

Além disso, considera-se que a variabilidade espacial da Precipitação é constante ao longo do tempo, isto quer dizer que a covariância espacial do processo espacial em estudo $\{Z_t(x), x \in D\}$ é invariante no tempo, isto acontece quando

$$Cov[Z_t(x), Z_t(u)] = C_Z(x, u), \forall x, u \in D, \forall t \in \mathbf{Z} \text{ e}$$

$$Cov[Z_{t+t'}(x), Z_t(u)] = Cov[Z_t(x), Z_{t-t'}(u)], \forall x, u \in D, \forall t, t' \in \mathbf{Z}.$$

A estimação espaço-temporal, no nosso caso, reduz-se à estimação espacial sobre o domínio geográfico de interesse ($x_0 \in D$ ou $B \subset D$, t_0 (fixo) $\leq T$). Isto é, o processo $\{Z(x, t), x \in \mathbb{R}^2, t = 1, 2, \dots, T\}$ pode ser considerado um processo aleatório espacial $\{Z(x), x \in \mathbb{R}^2\}$ e pode ser objecto de modelação espacial, com estrutura de segunda ordem caracterizada pelo semivariograma.

Vamos considerar que os valores obtidos ao longo do tempo são réplicas aproximadas do mesmo processo, que é válido se a correlação temporal é fraca (Severino [35]). A estimação em $r \times r$ pontos

do domínio geográfico (plano) de interesse pode ser realizada recorrendo ao estimador linear óptimo *Kriging*.

No nosso estudo, por esta razão, os valores observados da precipitação ao longo dos anos vão ser separados pelos doze meses do ano, o que faz com que a correlação temporal seja fraca.

Vamos aplicar o método de *Kriging* às medições médias mensais da precipitação dadas pelos udómetros nas 19 estações de amostragem de precipitação, com o objectivo de obter estimativas pontuais e globais da intensidade da precipitação na região da bacia hidrográfica do rio Ave, para um determinado período (mês).

A estimação da precipitação vai ser desenvolvida por recurso a um método que apenas utiliza as observações de precipitação disponíveis, em cada mês, e as coordenadas geográficas dos locais onde estas foram observadas.

Assim, para cada $j = 1, \dots, 19$ e $t = 1, \dots, 75$ ou 76 ou 77 (76 é o número de observações nos meses de Fevereiro, Abril, Junho e Julho; 77 é o número de observações de Janeiro, Maio e Dezembro, 75 nos restantes 5 meses do ano), $Z_t(x_j)$ é a variável que corresponde à medição obtida na estação meteorológica j , no instante (mês) t .

O conjunto de observações de precipitação utilizadas dizem respeito a períodos entre 1931 e 2008. No entanto, estes dados não foram recolhidos sempre de forma sistemática. As séries de dados possuem falhas, isto é, há meses em que não há o registo do valor da precipitação. Assim, com a aplicação do método de *Kriging* pretendemos, em primeiro lugar obter estimativas da precipitação para o preenchimento de falhas nas séries de precipitação nas 19 estações de amostragem, i.e., completar as séries de precipitação mensal nas 19 estações de amostragem Meteorológicas.

Em seguida, novamente com a aplicação de *Kriging*, obtêm-se estimativas da intensidade da precipitação, num determinado mês, nos lugares onde não há medições de precipitação (estimação pontual da precipitação) e estimativas da intensidade média mensal da precipitação em toda a região considerada ou, em particular, numa sub-bacia hidrográfica da região (estimação global da precipitação).

5.4.1 Análise e Modelação da Continuidade Espacial da Precipitação

A estimação por recurso a técnicas do âmbito da Geoestatística pressupõe a prévia modelação da continuidade espacial dos fenómenos.

O problema da estimação da precipitação é muitas vezes abordado após a subdivisão do domínio espacial em áreas homogéneas. Tal acontece quando existe suspeição ou evidência da necessidade de modelar separadamente zonas do domínio que apresentam comportamentos muito dissemelhantes.

No âmbito da nossa investigação, pelo facto da modelação da variabilidade espacial da precipitação ter sido desenvolvida separadamente para cada mês do ano e estar associada a uma área em análise de pequena dimensão, não se observou anisotropia. Não é de estranhar se investigarmos um pouco acerca da literatura sobre este assunto.

Num estudo realizado por Hevesi e alguns colaboradores (Hevesi [23], [24]) sobre a precipitação média anual associada a uma bacia hidrográfica do estado de Nevada, os autores assumiram que a estrutura espacial da pluviosidade não variava com a direcção. A precipitação anual foi assumida como isotrópica. Para distâncias superiores a 90 km , os autores constataram a existência de uma tendência que se exprimia através do crescimento da auto-correlação espacial acima da variância da amostra. Este estudo onde se efectuou a estimação da precipitação média anual, teve também em vista a sua posterior utilização em cálculos de balanço hídrico. Os autores assumiram que a altitude teria um comportamento isotrópico quando analisada dentro duma vizinhança local com um raio de $36,6 \text{ km}$.

Num estudo dedicado ao mapeamento da variabilidade espacial da precipitação ocorrida na região do Algarve, Goovaerts [22] adoptou o modelo cúbico para ajustar aos variogramas experimentais das precipitações mensais e anuais e estes fenómenos foram qualificados como isotrópicos.

Da análise de vários estudos, desde as aplicações mais antigas de análise da correlação da pluviosidade dos anos 60, destaca-se que a precipitação evidencia uma maior continuidade espacial para períodos de análise mais longos. Deste modo, a precipitação anual revela uma maior continuidade espacial do que a precipitação mensal e esta do que a precipitação horária.

Observa-se também (acontece também com os nossos dados) que a precipitação associada aos meses mais secos apresenta menor continuidade espacial do que a relativa aos meses mais chuvosos, a taxa de decréscimo da correlação espacial da pluviosidade no Verão é muito mais acentuada do que no Inverno. No que concerne à variabilidade do fenómeno com a direcção, não existe consenso porque

tal depende de diversos factores, de entre os quais se destacam o tipo de precipitação, a extensão geográfica da área analisada e a zona do Globo em apreciação.

Num estudo realizado em 2002 (Nicolau [32]) sobre a distribuição espacial de precipitação em Portugal continental, o fenómeno da precipitação evidenciou anisotropia com a direcção Sul-Norte (90°) e Oeste-Este (0°). A primeira direcção foi a de maior continuidade, pois está associado à existência de um maior contraste em termos de pluviosidade entre o Norte e o Sul do território. O ajustamento dos modelos variográficos teóricos foi desenvolvido com maior rigor até aos 60-90 *km*, porque a influência regional dos intervalos de totalização da precipitação estudados não excedeu esta distância e porque se pretendia que a estimação se baseasse nas observações mais próximas.

Relativamente ao modelo de continuidade espacial que é inferido a partir das observações da precipitação nas 19 estações de amostragem, vamos assumir algumas hipóteses de homogeneidade do processo: na região em estudo o processo é estacionário de segunda ordem, logo intrinsecamente estacionário (para um determinado tempo fixo t^*) e é isotrópico.

Assim, os dados foram estudados com diferentes medidas de continuidade espacial (o covariograma, o semivariograma e o correlograma empíricos), mas só são apresentados os semivariogramas pois, de facto, a análise da continuidade espacial do processo deu melhores resultados trabalhando com os semivariogramas do que com os covariogramas.

O método para o cálculo do semivariograma empírico é o dos momentos (Matheron [29]), numa variante para um processo aleatório espaço-temporal $\{Z(x,t), x \in \mathbb{R}^2, t = 1, 2, \dots, T\}$. Processo, que no nosso caso, vai ser encarado como um processo aleatório espacial $\{Z(x), x \in \mathbb{R}^2\}$ isotrópico e de segunda ordem.

A amostra do processo é $\{Z_t(x_i), i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T\}$ recolhida nos n locais ($n = 19$ estações de amostragem) na região considerada em \mathbb{R}^2 , em T meses.

Assim, para um mês t^* (fixo), o estimador do semivariograma empírico é

$$\hat{\gamma}_Z(h, t^*) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{(i,j) \in N(h)} \left[(Z_{t^*}(x_i) - Z_{t^*}(x_j))^2 \right], \text{ onde}$$

$N(h) = \{(i, j) : \|x_i - x_j\| = \|h\|, 1 \leq i \leq j \leq n\}$, isto é, $N(h)$ é o conjunto de todos os pares de

localizações das estações udométricas que estão $\|h\|$ distância entre si e $|N(h)| = \# N(h)$.

O estimador do semivariograma empírico final calcula-se fazendo a média dos $\hat{\gamma}_Z(h, t^*)$ nos T meses, o procedimento corresponde a considerar o processo espaço-temporal como uma família de T réplicas independentes de um processo espacial (puro) $\{Z(x), x \in D\}$, em que o semivariograma espacial $\hat{\gamma}_Z(h)$ caracteriza toda a variabilidade espaço-temporal. Sob esta hipótese, duas realizações no mesmo local mas em tempos diferentes (meses diferentes) são independentes e o padrão da variabilidade espacial permanece o mesmo (Kyriakidis e Journel [28]). Esta é uma maneira usual de estimar o semivariograma em aplicações meteorológicas.

Assim, o estimador final do semivariograma empírico é dado por

$$\hat{\gamma}_Z(h) = \frac{1}{2T|N(h)|} \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in N(h)} [(Z_t(x_i) - Z_t(x_j))]^2, \text{ com } T \leq 77 \text{ (pois as séries de precipitação}$$

podem ter falhas).

Às vezes, tal como no nosso caso, com o objectivo de se calcular um semivariograma empírico que se possa analisar, é necessário especificar-se uma certa “tolerância” ℓ para os cálculos, isto é, não se faz qualquer distinção quanto à distância entre dois locais com uma distância real $\leq \ell$.

Neste caso, o semivariograma empírico é dado por

$$\hat{\gamma}_Z(h|\ell) = \frac{1}{2T|N(h|\ell)|} \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in N(h|\ell)} [(Z_t(x_i) - Z_t(x_j))]^2 \quad (5.2)$$

com $T \leq 77$, onde

$$N(h|\ell) = \{(i, j) : \|x_i - x_j\| - \|h\| \leq \ell; 1 \leq i \leq j \leq n\} \text{ e } |N(h|\ell)| = \# N(h|\ell).$$

Note-se que $\hat{\gamma}_Z(h) = \hat{\gamma}_Z(h|0)$.

Os semivariogramas empíricos (ou experimentais) dos 12 meses foram obtidos usando o estimador definido em (5.2).

Para cada mês, foram calculados os semivariogramas (covariogramas) empíricos admitindo uma tolerância de $\ell = 2$, $\ell = 3$ e $\ell = 4$ km, para se definirem os conjuntos $N(h)$ e, assim, o número de pares de dados que, em cada valor de h , entra na estimação de $\hat{\gamma}_Z(h|\ell)$. Só é apresentado o caso

para uma tolerância de $\ell = 3 \text{ km}$, bem como os resultados finais que correspondem ao modelo mais satisfatório e que foi adoptado no final.

Para os diferentes meses do ano, as Tabelas 5.4, 5.6, 5.8, 5.10, 5.12, 5.14, 5.16, 5.18, 5.20, 5.22, 5.24 e 5.26 apresentam os valores obtidos para a construção dos semivariogramas empíricos.

Tabela 5.4: Valores do semivariograma empírico de Janeiro; $N^*(\|h\|)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma

| $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ | $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ |
|---------|--------------|-------------------------|---------|--------------|-------------------------|
| 0,00 | 760 | 0,000 | 28,50 | 497 | 5971,633 |
| 4,50 | 109 | 2695,043 | 31,50 | 257 | 4762,547 |
| 7,50 | 387 | 3694,355 | 34,5 | 147 | 6163,144 |
| 10,50 | 402 | 3315,426 | 37,5 | 232 | 11231,74 |
| 13,50 | 316 | 3739,131 | 40,5 | 127 | 7683,891 |
| 16,50 | 578 | 5621,000 | 45,5 | 146 | 5838,611 |
| 19,50 | 449 | 6402,208 | 50,8 | 118 | 7690,394 |
| 22,50 | 611 | 8531,961 | 59,7 | 123 | 12604,96 |
| 25,50 | 191 | 2333,500 | | | |

Obtido o semivariograma empírico é necessário ajustar o modelo teórico que melhor se adapte a ele. Esta etapa consiste em estimar os parâmetros desconhecidos dos modelos teóricos. Foram considerados os modelos de transição Exponencial, Gaussiano, Racional Quadrático e Esférico. Nas Figuras 5.15 e 5.16 apresentam-se graficamente, para o mês de Janeiro, o semivariograma estimado, bem como os ajustamentos para cada um dos modelos de transição anteriores.

O ajustamento do semivariograma teórico foi realizado através do método de mínimos quadrados. Existem vários critérios de ajustamento, entre os quais o método das discrepâncias sucessivas - tentativa e erro, o método de mínimos quadrados ponderados (Cressie [10]) e outros métodos podem ser encontrados em Cressie [11].

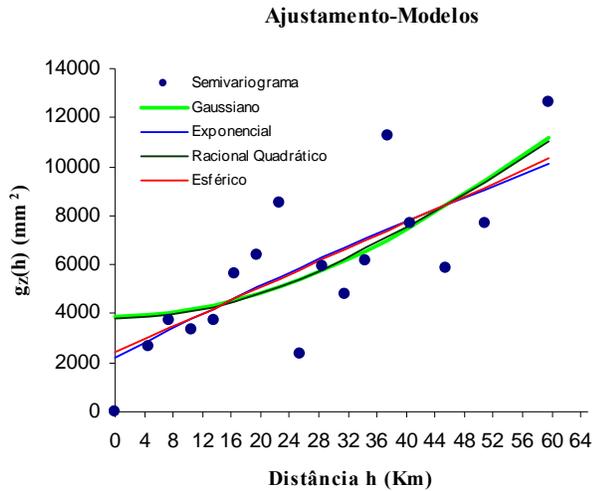


Figura 5.15: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Janeiro)

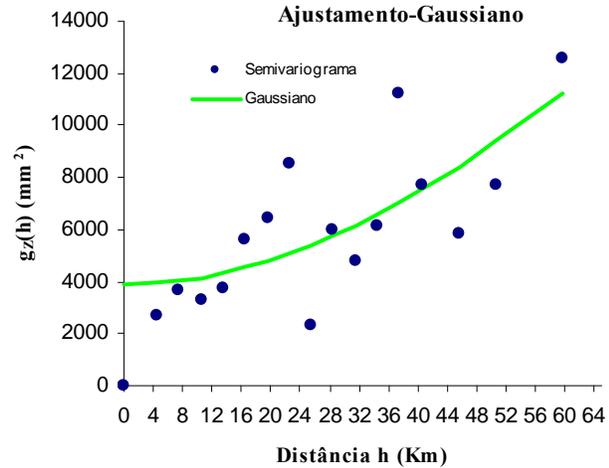


Figura 5.16: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Janeiro)

Aplicamos os métodos de mínimos quadrados ponderados e o de mínimos quadrados. O método de mínimos quadrados foi o nosso escolhido, pois foi o de mais fácil aplicação e interpretação, como também o que nos deu melhores resultados. Este consiste em medir a qualidade do ajustamento com base na soma de quadrados das diferenças entre o valor do semivariograma empírico e o do semivariograma teórico (soma de quadrados dos resíduos, SSE – Sum Square Error), obtida para cada modelo. O estimador de mínimos quadrados dos parâmetros desconhecidos (c_0 , c_1 e c_2 , parâmetros correspondentes ao efeito de pepita, amplitude e patamar) é obtido minimizando SSE.

O ajustamento, de todos os modelos de transição, pelo método de mínimos quadrados foi efectuado com a condição adicional de que a variância do ajustamento (c_2 , o patamar, o valor de $\gamma_z(h)$ para o qual o semivariograma se estabiliza) coincida com a variância empírica de $Z(s)$, pois como se sabe é o melhor estimador da variância.

Verificamos em todos os semivariogramas a existência de efeito de pepita, isto é, exibem uma ordenada na origem não nula que expressa a variabilidade associada a erros de medição do fenómeno ou a variabilidade da amostra associada a uma escala mais detalhada do que a informação disponível.

Tal como já foi referido, foram ajustados os quatro modelos teóricos aos semivariogramas. O modelo Gaussiano acompanhado de efeito de pepita foi seleccionado no presente contexto para

modelar todos os dados de precipitação, para todos os meses, cujos parâmetros do modelo, para o semivariograma de Janeiro, constam na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Janeiro

| Modelo | SSE (mm^4) | c_0 - Efeito de Pepita (mm^2) | c_1 - Amplitude (km) | c_2 - Patamar (mm^2) |
|----------------------------|------------------------------------|---|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Exponencial | 5,914E+07 | 2232,222 | 205,4722 | 31260,903 |
| Gaussiano | 5,911E+07 | 3893,785 | 111,935 | 29599,341 |
| Racional Quadrático | 5,924E+07 | 3795,831 | 105,460 | 29697,294 |
| Esférico | 5,855E+07 | 2406,410 | 348,406 | 31086,715 |

A seguir vamos apresentar as tabelas e gráficos correspondentes aos restantes meses do ano, onde se apresentam os valores obtidos para a construção dos semivariogramas empíricos mensais, os semivariogramas estimados, bem como os ajustamentos para cada um dos modelos de transição e os parâmetros dos modelos de semivariograma que melhor se ajustaram.

Tabela 5.6: Valores do semivariograma empírico de Fevereiro; $N^*(\|h\|)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma

| $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ | $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ |
|---------|--------------|-------------------------|---------|--------------|-------------------------|
| 0,00 | 761 | 0,000 | 28,50 | 498 | 3428,095 |
| 4,50 | 107 | 1590,242 | 31,50 | 260 | 2357,120 |
| 7,50 | 391 | 2386,360 | 34,5 | 150 | 2799,08 |
| 10,50 | 404 | 1704,071 | 37,5 | 230 | 7808,991 |
| 13,50 | 313 | 1804,836 | 40,5 | 130 | 4855,449 |
| 16,50 | 580 | 3553,708 | 45,5 | 145 | 3791,245 |
| 19,50 | 450 | 3752,776 | 50,8 | 119 | 4518,387 |
| 22,50 | 612 | 5190,920 | 59,8 | 122 | 6991,734 |
| 25,50 | 194 | 1137,886 | | | |

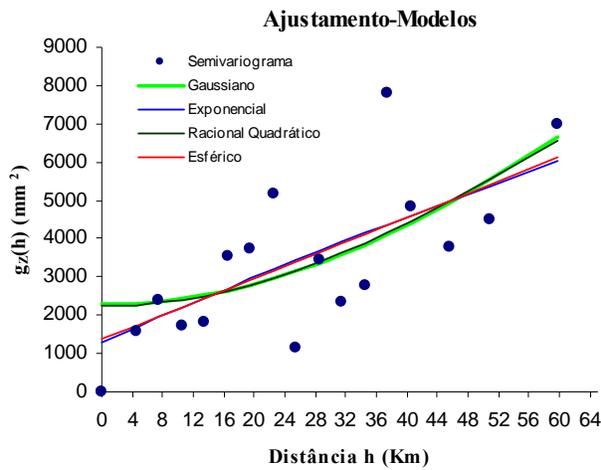


Figura 5.17: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Fevereiro)

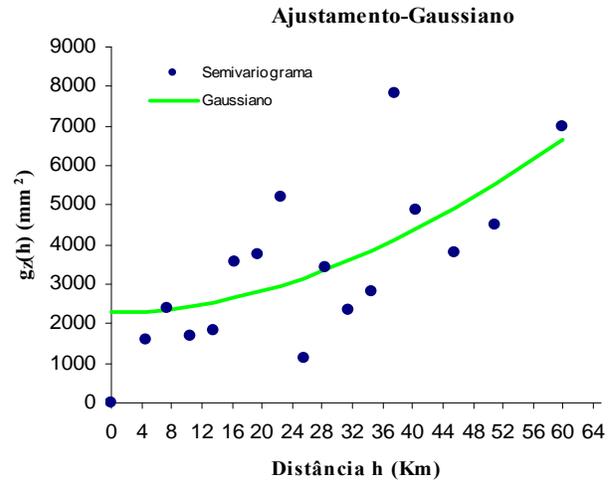


Figura 5.18: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Fevereiro)

Tabela 5.7: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Fevereiro

| Modelo | SSE (mm^4) | C_0 - Efeito de Pepita (mm^2) | C_1 - Amplitude (km) | C_2 - Patamar (mm^2) |
|---------------------|-------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| Exponencial | 3,074E+07 | 1301,750 | 288,859 | 25248,934 |
| Gaussiano | 3,125E+07 | 2290,523 | 134,100 | 24260,163 |
| Racional Quadrático | 3,115E+07 | 2242,178 | 128,174 | 24308,508 |
| Esférico | 3,064E+07 | 1381,511 | 475,089 | 25169,175 |

Tabela 5.8: Valores do semivariograma empírico de Março; $N^*(\|h\|)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma

| $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_Z(\ h\)$ | $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_Z(\ h\)$ |
|---------|--------------|-------------------------|---------|--------------|-------------------------|
| 0,00 | 755 | 0,000 | 28,50 | 489 | 3973,539 |
| 4,50 | 110 | 1477,119 | 31,50 | 256 | 3932,607 |
| 7,50 | 386 | 2899,655 | 34,5 | 142 | 5665,051 |
| 10,50 | 396 | 3695,148 | 37,5 | 225 | 6901,232 |
| 13,50 | 313 | 4282,316 | 40,5 | 124 | 5484,155 |
| 16,50 | 566 | 3047,822 | 45,5 | 143 | 4268,132 |
| 19,50 | 446 | 4581,919 | 50,8 | 115 | 4831,17 |
| 22,50 | 596 | 4981,064 | 59,8 | 122 | 8868,583 |
| 25,50 | 181 | 1159,633 | | | |

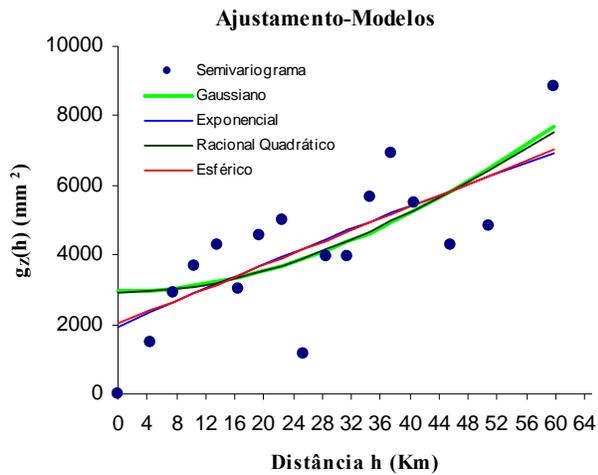


Figura 5.19: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Março)

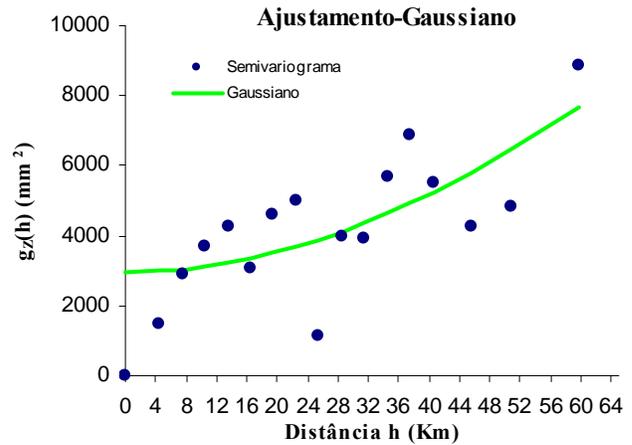


Figura 5.20: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Março)

Tabela 5.9: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Março

| Modelo | SSE (mm ⁴) | c ₀ - Efeito de Pepita (mm ²) | c ₁ - Amplitude (km) | c ₂ - Patamar (mm ²) |
|---------------------|---------------------------|---|------------------------------------|--|
| Exponencial | 2,648E+07 | 1933,683 | 265,664 | 24782,364 |
| Gaussiano | 2,580E+07 | 2953,458 | 127,079 | 23762,589 |
| Racional Quadrático | 2,595E+07 | 2910,186 | 121,522 | 23805,861 |
| Esférico | 2,622E+07 | 2013,881 | 438,201 | 24702,165 |

Tabela 5.10: Valores do semivariograma empírico de Abril; $N^*(\|h\|)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma

| $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ | $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ |
|---------|--------------|-------------------------|---------|--------------|-------------------------|
| 0,00 | 753 | 0,000 | 28,50 | 486 | 1872,800 |
| 4,50 | 111 | 1321,908 | 31,50 | 254 | 2273,844 |
| 7,50 | 377 | 1831,579 | 34,5 | 143 | 2482,699 |
| 10,50 | 389 | 1685,894 | 37,5 | 227 | 3696,141 |
| 13,50 | 311 | 1826,509 | 40,5 | 122 | 2703,649 |
| 16,50 | 561 | 2149,085 | 45,5 | 142 | 3147,562 |
| 19,50 | 439 | 2250,564 | 50,8 | 114 | 3317,138 |
| 22,50 | 592 | 2152,460 | 59,8 | 122 | 6202,052 |
| 25,50 | 178 | 1292,564 | | | |

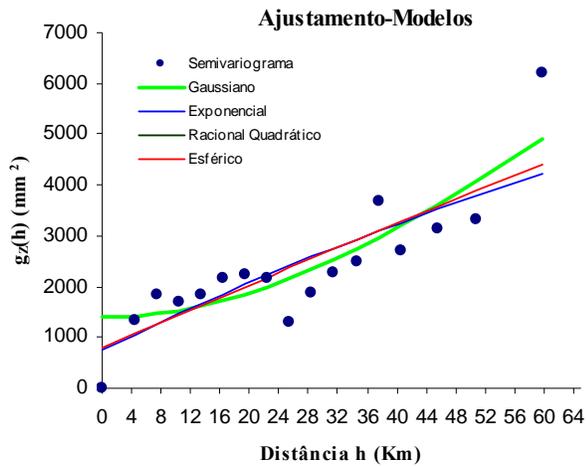


Figura 5.21: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Abril)

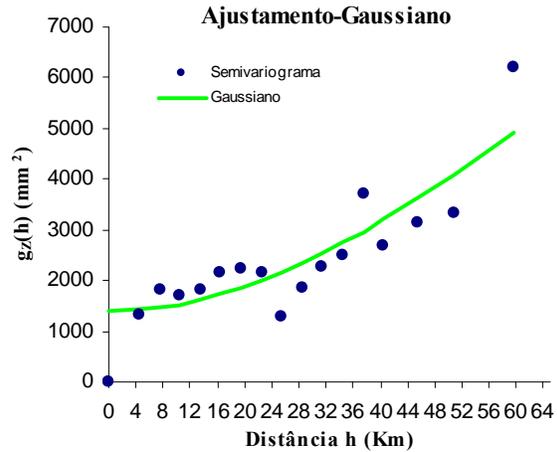


Figura 5.22: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Abril)

Tabela 5.11: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Abril

| Modelo | SSE (mm^4) | C_0 - Efeito de Pepita (mm^2) | C_1 - Amplitude (km) | C_2 - Patamar (mm^2) |
|---------------------|-------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| Exponencial | 7,699E+06 | 750,224 | 149,461 | 10564,030 |
| Gaussiano | 4,942E+06 | 1397,408 | 90,324 | 9916,846 |
| Racional Quadrático | 5,575E+06 | 1371,697 | 84,535 | 9942,557 |
| Esférico | 7,052E+06 | 800,250 | 256,256 | 10514,004 |

Tabela 5.12: Valores do semivariograma empírico de Maio; $N^*(\|h\|)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma

| $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ | $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ |
|---------|--------------|-------------------------|---------|--------------|-------------------------|
| 0,00 | 761 | 0,000 | 28,50 | 497 | 1496,032 |
| 4,50 | 111 | 1095,503 | 31,50 | 260 | 1606,956 |
| 7,50 | 384 | 1166,583 | 34,5 | 145 | 1723,691 |
| 10,50 | 396 | 1471,566 | 37,5 | 226 | 2435,123 |
| 13,50 | 319 | 1390,746 | 40,5 | 122 | 1931,872 |
| 16,50 | 564 | 1530,871 | 45,5 | 141 | 2425,121 |
| 19,50 | 450 | 1577,471 | 50,8 | 118 | 2201,257 |
| 22,50 | 601 | 1544,870 | 59,8 | 121 | 3697,114 |
| 25,50 | 179 | 1238,384 | | | |

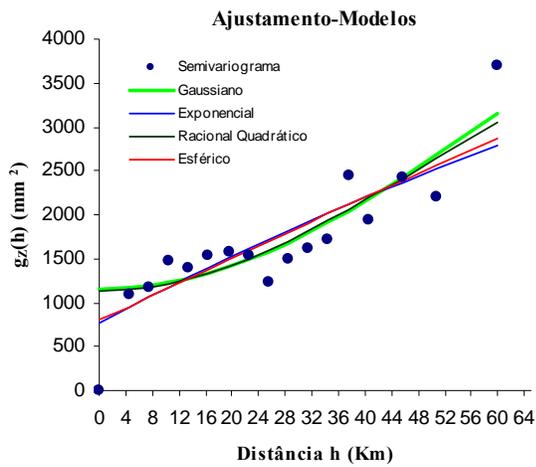


Figura 5.23: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Maio)

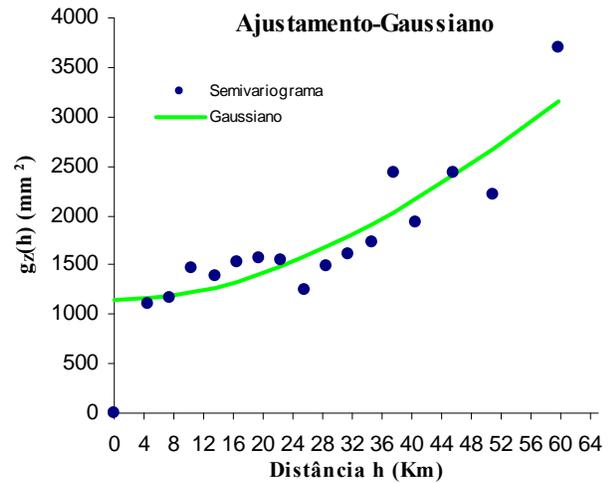


Figura 5.24: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Maio)

Tabela 5.13: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Maio

| Modelo | SSE (mm^4) | C_0 - Efeito de Pepita (mm^2) | C_1 - Amplitude (km) | C_2 - Patamar (mm^2) |
|---------------------|-------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| Exponencial | 1,805E+06 | 765,381 | 161,095 | 6523,714 |
| Gaussiano | 1,104E+06 | 1151,800 | 94,893 | 6137,295 |
| Racional Quadrático | 1,240E+06 | 1131,928 | 88,806 | 6157,167 |
| Esférico | 1,641E+06 | 799,292 | 275,567 | 6489,803 |

Tabela 5.14: Valores do semivariograma empírico de Junho; $N^*(\|h\|)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma

| $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ | $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ |
|---------|--------------|-------------------------|---------|--------------|-------------------------|
| 0,00 | 770 | 0,000 | 28,50 | 504 | 660,364 |
| 4,50 | 116 | 457,589 | 31,50 | 271 | 624,402 |
| 7,50 | 397 | 564,012 | 34,50 | 150 | 628,204 |
| 10,50 | 409 | 513,998 | 37,50 | 233 | 795,387 |
| 13,50 | 327 | 487,421 | 40,50 | 126 | 887,671 |
| 16,50 | 578 | 569,138 | 45,50 | 146 | 1028,605 |
| 19,50 | 463 | 551,720 | 50,80 | 120 | 949,893 |
| 22,50 | 617 | 632,481 | 59,80 | 123 | 1539,302 |
| 25,50 | 195 | 582,702 | | | |

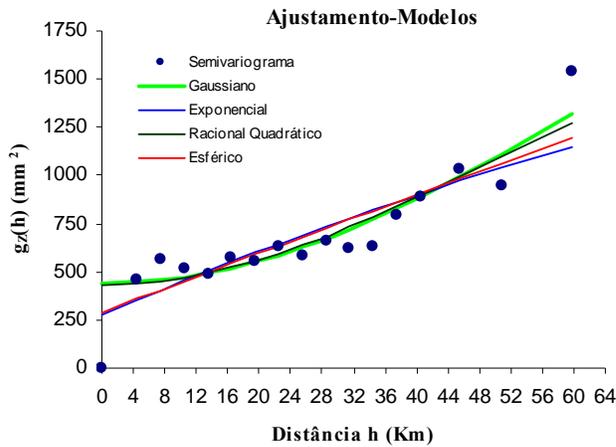


Figura 5.25: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Junho)

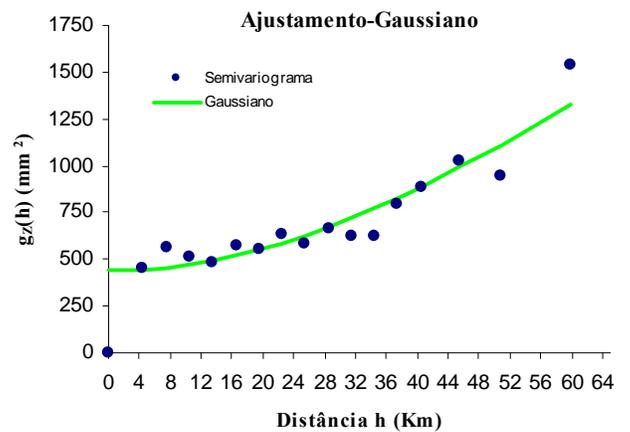


Figura 5.26: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Junho)

Tabela 5.15: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Junho

| Modelo | SSE (mm^4) | C_0 - Efeito de Pepita (mm^2) | C_1 - Amplitude (km) | C_2 - Patamar (mm^2) |
|---------------------|-------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| Exponencial | 2,847E+05 | 278,680 | 168,959 | 2931,940 |
| Gaussiano | 1,250E+05 | 440,537 | 96,500 | 2770,083 |
| Racional Quadrático | 1,529E+05 | 432,931 | 90,644 | 2777,689 |
| Esférico | 2,508E+05 | 290,660 | 286,260 | 2919,961 |

Tabela 5.16: Valores do semivariograma empírico de Julho; $N^*(\|h\|)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma

| $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ | $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ |
|---------|--------------|-------------------------|---------|--------------|-------------------------|
| 0,00 | 758 | 0,000 | 28,50 | 490 | 303,319 |
| 4,50 | 102 | 129,223 | 31,50 | 257 | 243,768 |
| 7,50 | 388 | 124,005 | 34,50 | 148 | 379,0903 |
| 10,50 | 403 | 175,279 | 37,5 | 228 | 379,3376 |
| 13,50 | 314 | 241,934 | 40,5 | 126 | 319,4295 |
| 16,50 | 573 | 200,368 | 45,5 | 147 | 369,6987 |
| 19,50 | 446 | 224,694 | 50,8 | 115 | 505,1168 |
| 22,50 | 609 | 253,733 | 59,8 | 116 | 379,0903 |
| 25,50 | 195 | 177,234 | | | |

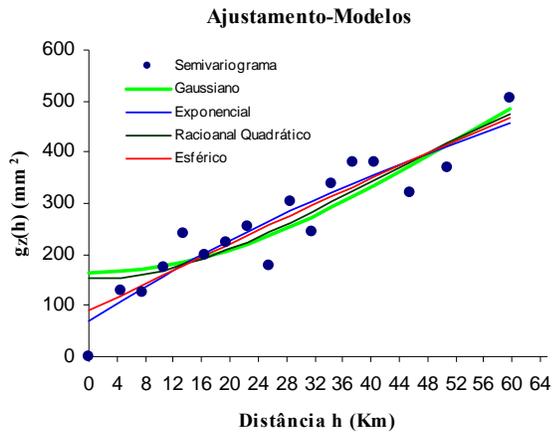


Figura 5.27: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Julho)

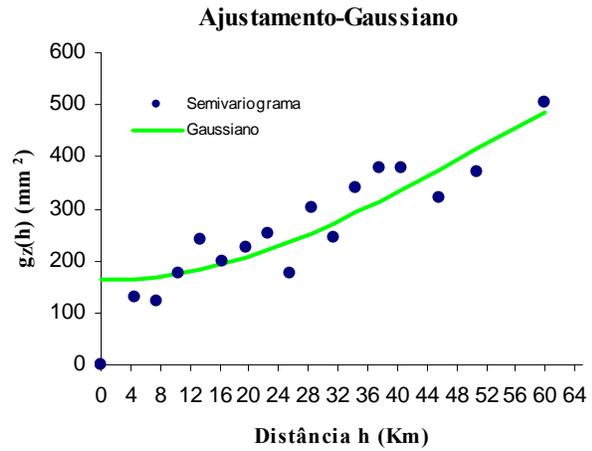


Figura 5.28: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Julho)

Tabela 5.17: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Julho

| Modelo | SSE (mm ⁴) | C ₀ - Efeito de Pepita (mm ²) | C ₁ - Amplitude (km) | C ₂ - Patamar (mm ²) |
|---------------------|---------------------------|---|------------------------------------|--|
| Exponencial | 2,721E+04 | 70,891 | 94,586 | 821,852 |
| Gaussiano | 2,861E+04 | 163,287 | 78,173 | 729,456 |
| Racional Quadrático | 2,692E+04 | 151,806 | 68,089 | 740,937 |
| Esférico | 2,545E+04 | 90,888 | 183,835 | 801,855 |

Tabela 5.18: Valores do semivariograma empírico de Agosto; N* (||h||) representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma

| h | N* (h) | γ̂ _Z (h) | h | N* (h) | γ̂ _Z (h) |
|-------|------------|-------------------------|-------|------------|-------------------------|
| 0,00 | 758 | 0,000 | 28,50 | 496 | 312,937 |
| 4,50 | 105 | 308,887 | 31,50 | 258 | 359,6791 |
| 7,50 | 392 | 188,474 | 34,50 | 146 | 299,370 |
| 10,50 | 405 | 231,315 | 37,50 | 229 | 385,498 |
| 13,50 | 317 | 316,081 | 40,50 | 126 | 271,8914 |
| 16,50 | 576 | 250,482 | 45,50 | 146 | 375,2522 |
| 19,50 | 450 | 306,703 | 50,80 | 116 | 319,1107 |
| 22,50 | 609 | 334,158 | 59,80 | 118 | 586,876 |
| 25,50 | 195 | 417,414 | | | |

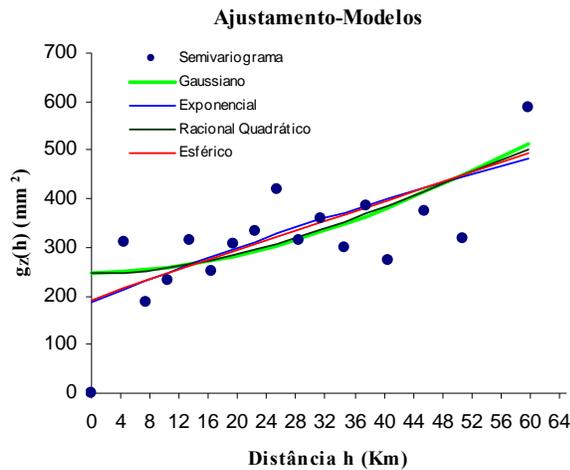


Figura 5.29: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Agosto)

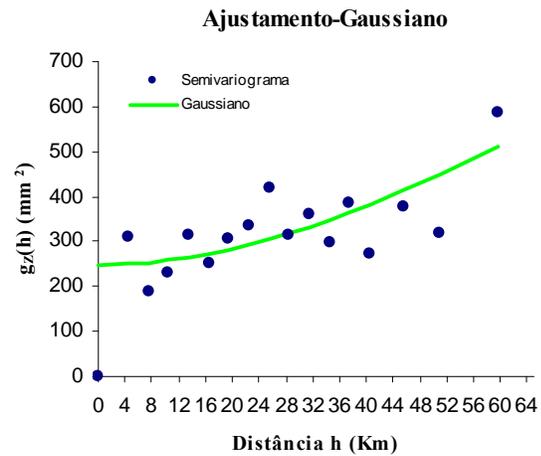


Figura 5.30: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Agosto)

Tabela 5.19: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Agosto

| Modelo | SSE (mm^4) | c_0 - Efeito de Pepita (mm^2) | c_1 - Amplitude (km) | c_2 - Patamar (mm^2) |
|---------------------|-------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| Exponencial | 7,518E+04 | 186,169 | 149,497 | 901,841 |
| Gaussiano | 6,636E+04 | 248,257 | 97,144 | 839,753 |
| Racional Quadrático | 6,813E+04 | 246,047 | 90,239 | 841,963 |
| Esférico | 7,355E+04 | 192,462 | 262,859 | 895,548 |

Tabela 5.20: Valores do semivariograma empírico de Setembro; $N^*(\|h\|)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma

| $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ | $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ |
|---------|--------------|-------------------------|---------|--------------|-------------------------|
| 0,00 | 759 | 0,000 | 28,50 | 498 | 1107,703 |
| 4,50 | 105 | 683,142 | 31,50 | 264 | 1682,611 |
| 7,50 | 391 | 586,345 | 34,50 | 146 | 1435,373 |
| 10,50 | 405 | 910,013 | 37,5 | 227 | 1649,992 |
| 13,50 | 320 | 1004,289 | 40,5 | 127 | 1415,44 |
| 16,50 | 574 | 901,575 | 45,6 | 144 | 1988,129 |
| 19,50 | 452 | 1009,621 | 50,8 | 116 | 1585,214 |
| 22,50 | 613 | 990,596 | 59,7 | 118 | 3793,895 |
| 25,50 | 193 | 1060,345 | | | |

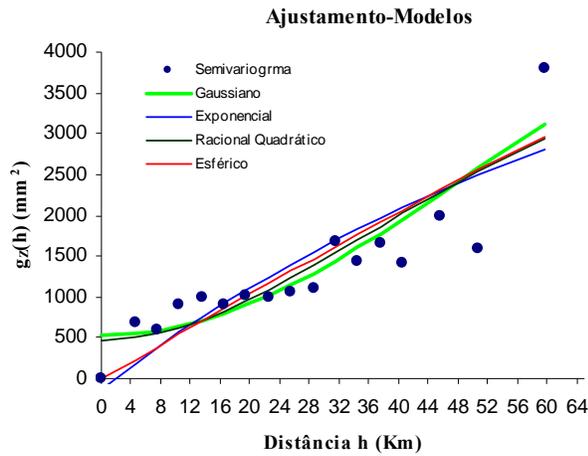


Figura 5.31: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Setembro)

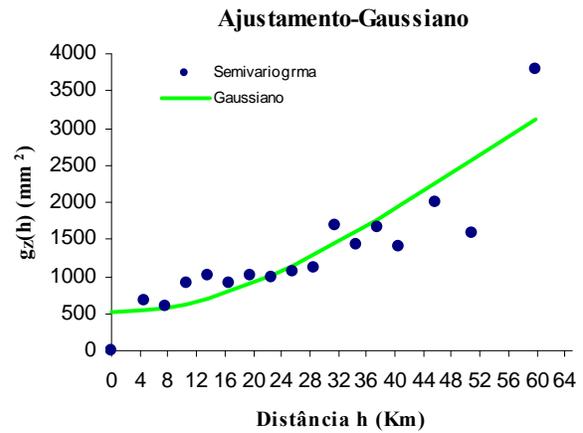


Figura 5.32: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Setembro)

Tabela 5.21: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Setembro

| Modelo | SSE (mm^4) | C_0 - Efeito de Pepita (mm^2) | C_1 - Amplitude (km) | C_2 - Patamar (mm^2) |
|---------------------|-------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| Exponencial | 3,483E+06 | -122,553 | 80,534 | 5613,495 |
| Gaussiano | 2,157E+06 | 523,707 | 69,517 | 4967,235 |
| Racional Quadrático | 2,561E+06 | 473,860 | 60,573 | 5017,082 |
| Esférico | 3,046E+06 | -7,246 | 157,591 | 5498,188 |

Tabela 5.22: Valores do semivariograma empírico de Outubro; $N^*(\|h\|)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma

| $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_Z(\ h\)$ | $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_Z(\ h\)$ |
|---------|--------------|-------------------------|---------|--------------|-------------------------|
| 0,00 | 762 | 0,000 | 28,50 | 499 | 3493,128 |
| 4,50 | 111 | 3237,588 | 31,50 | 263 | 4317,205 |
| 7,50 | 388 | 2382,063 | 34,50 | 151 | 4300,352 |
| 10,50 | 404 | 2669,103 | 37,5 | 229 | 6830,389 |
| 13,50 | 321 | 3101,115 | 40,5 | 126 | 4752,832 |
| 16,50 | 580 | 3108,292 | 45,5 | 146 | 6384,436 |
| 19,50 | 451 | 3418,283 | 50,8 | 121 | 6461,625 |
| 22,50 | 612 | 3344,701 | 59,8 | 124 | 9933,568 |
| 25,50 | 196 | 2877,771 | | | |

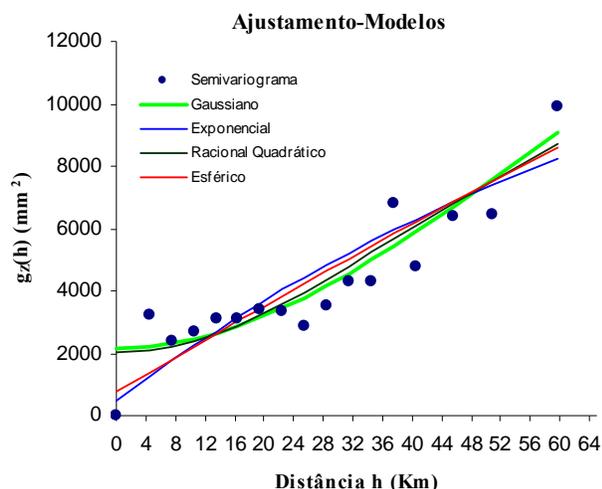


Figura 5.33: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Outubro)

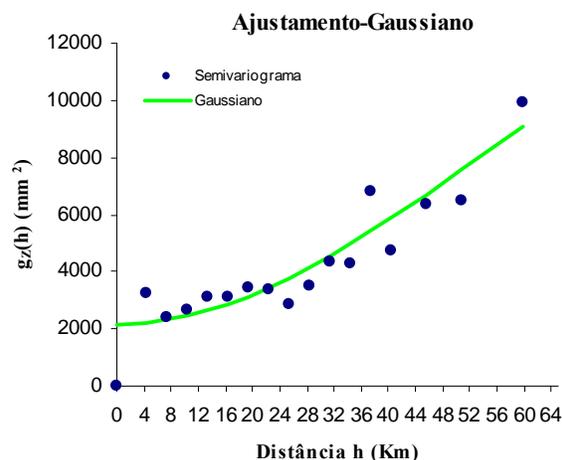


Figura 5.34: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Outubro)

Tabela 5.23: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Outubro

| Modelo | SSE (mm^4) | C_0 - Efeito de Pepita (mm^2) | C_1 - Amplitude (km) | C_2 - Patamar (mm^2) |
|---------------------|-------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| Exponencial | 1,889E+07 | 477,209 | 89,320 | 15959,035 |
| Gaussiano | 8,620E+06 | 2167,163 | 73,500 | 14269,081 |
| Racional Quadrático | 1,097E+07 | 2003,391 | 64,336 | 14432,854 |
| Esférico | 1,559E+07 | 775,057 | 171,773 | 15661,187 |

Tabela 5.24: Valores do semivariograma empírico de Novembro; $N^*(\|h\|)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma

| $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ | $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_z(\ h\)$ |
|---------|--------------|-------------------------|---------|--------------|-------------------------|
| 0,00 | 758 | 0,000 | 28,50 | 498 | 3783,765 |
| 4,50 | 109 | 2400,193 | 31,50 | 261 | 3612,982 |
| 7,50 | 388 | 2365,213 | 34,50 | 148 | 4096,738 |
| 10,50 | 401 | 2860,552 | 37,5 | 230 | 6948,488 |
| 13,50 | 320 | 3389,700 | 40,5 | 124 | 4688,59 |
| 16,50 | 577 | 3465,109 | 45,5 | 145 | 5115,831 |
| 19,50 | 446 | 4174,735 | 50,8 | 117 | 5748,122 |
| 22,50 | 611 | 4707,591 | 59,8 | 123 | 7218,096 |
| 25,50 | 190 | 1804,278 | | | |

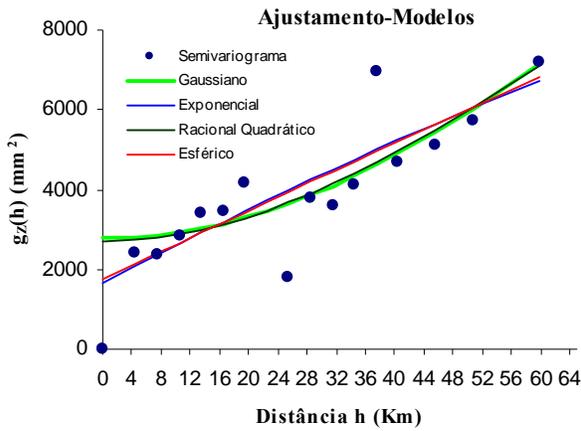


Figura 5.35: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Novembro)

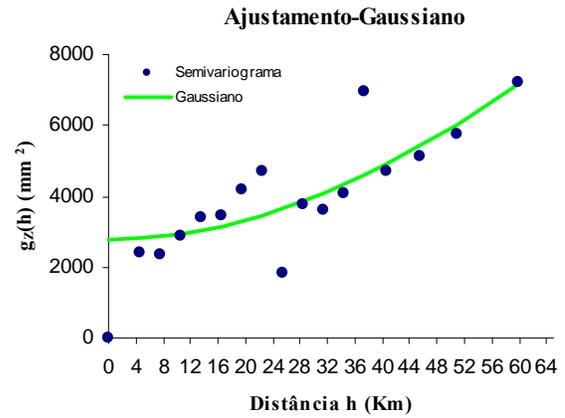


Figura 5.36: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Novembro)

Tabela 5.25: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Novembro

| Modelo | SSE (mm^4) | C_0 - Efeito de Pepita (mm^2) | C_1 - Amplitude (km) | C_2 - Patamar (mm^2) |
|---------------------|-------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| Exponencial | 1,284E+07 | 1644,602 | 220,296 | 21450,674 |
| Gaussiano | 1,235E+07 | 2774,687 | 121,571 | 20320,590 |
| Racional Quadrático | 1,226E+07 | 2707,482 | 114,418 | 20387,794 |
| Esférico | 1,258E+07 | 1760,385 | 374,597 | 21334,891 |

Tabela 5.26: Valores do semivariograma empírico de Dezembro; $N^*(\|h\|)$ representa o número de pares de observações em que se baseou a estimação do semivariograma

| $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_Z(\ h\)$ | $\ h\ $ | $N^*(\ h\)$ | $\hat{\gamma}_Z(\ h\)$ |
|---------|--------------|-------------------------|---------|--------------|-------------------------|
| 0,00 | 764 | 0,000 | 28,50 | 498 | 6171,573 |
| 4,50 | 110 | 4205,111 | 31,50 | 263 | 6249,453 |
| 7,50 | 387 | 5578,959 | 34,50 | 151 | 7354,078 |
| 10,50 | 406 | 4941,468 | 37,5 | 233 | 17416,24 |
| 13,50 | 318 | 5803,630 | 40,5 | 128 | 7191,385 |
| 16,50 | 584 | 7639,459 | 45,5 | 149 | 8681,952 |
| 19,50 | 445 | 9763,974 | 50,8 | 120 | 10073,92 |
| 22,50 | 616 | 9821,398 | 59,8 | 124 | 15443,81 |
| 25,50 | 196 | 3976,920 | | | |

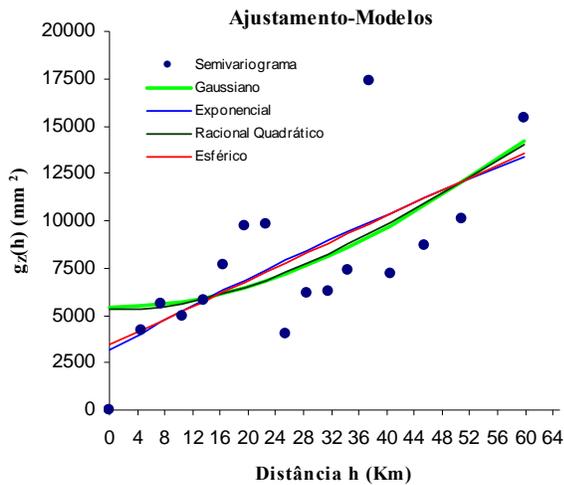


Figura 5.37: Representação gráfica do semivariograma estimado e dos ajustamentos dos modelos de transição teóricos (Dezembro)

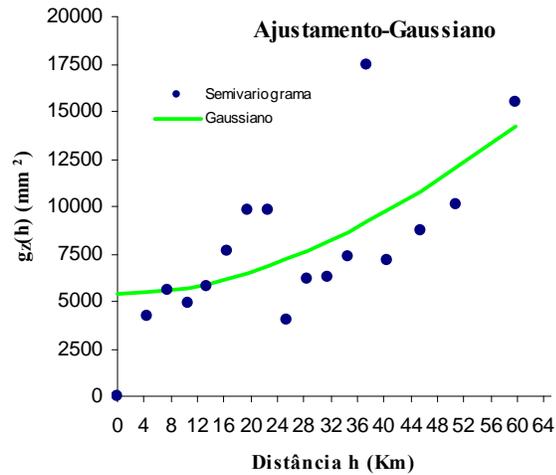


Figura 5.38: Representação gráfica do semivariograma estimado e do ajustamento do modelo Gaussiano (Dezembro)

Tabela 5.27: Parâmetros dos modelos teóricos para o semivariograma de Dezembro

| Modelo | SSE (mm^4) | c_0 - Efeito de Pepita (mm^2) | c_1 - Amplitude (km) | c_2 - Patamar (mm^2) |
|----------------------------|-------------------|--|-------------------------------|-------------------------------|
| Exponencial | 1,303E+08 | 3168,704 | 190,636 | 37888,699 |
| Gaussiano | 1,262E+08 | 5417,679 | 112,370 | 35639,724 |
| Racional Quadrático | 1,268E+08 | 5282,184 | 105,043 | 35775,219 |
| Esférico | 1,290E+08 | 3419,915 | 329,0403 | 37637,488 |

Como nota final, em relação ao modelo do semivariograma, não se pretende que este seja um estimador ergódico de um segundo momento de uma função aleatória $Z(x)$. Pretende-se, acima de tudo, que ele reflecta, em termos médios, os principais padrões de continuidade/variabilidade do conjunto de amostras $Z(x_j)$ e proporcione o conhecimento (muitas vezes qualitativo, não mensurável) do fenómeno em estudo (Soares [36]).

Estimados os modelos de continuidade espacial para os doze meses do ano passamos à etapa de estimação propriamente dita. É o cálculo dos estimadores lineares de *Kriging* com base no semivariograma estimado, cujos ponderadores respeitam as condições de não enviesamento e de optimabilidade.

Os modelos de continuidade espacial estimados são utilizados para a modelação por *Kriging*, que para além da intenção interpoladora inerente, há ainda o interesse em que a modelação sirva propósitos extrapoladores, ou seja, possibilite a estimação dos valores nas estações de amostragem nos diversos meses em que não houve medições, bem como em locais ou regiões onde não há observações.

5.4.2 Estimação da Precipitação: pontual e em área

Temos, então, como objectivos obter uma “boa” estimativa da intensidade da precipitação num determinado local, nomeadamente, em lugares onde não há estações de amostragem meteorológicas, bem como obter uma “boa” estimativa da intensidade média da precipitação em toda a área considerada, i.e., na bacia hidrográfica do rio Ave e, em particular, em qualquer sua sub-bacia.

Para isso será aplicado o método de *Kriging* Ordinário às medições mensais observadas nos 19 pontos de amostragem.

A noção de continuidade espacial vem da hipótese de que observações próximas no espaço tendem a ser mais parecidas do que as observações tomadas em lugares mais afastados. Assim, começamos por calcular a distância entre cada par de udómetros/udógrafo (Tabela 5.28) que é calculada a partir das coordenadas apresentadas na Tabela 5.1. A definição de distância aplicada neste trabalho é a distância Euclidiana. A menor distância, de 4,19 Km, é entre as estações de amostragem Vilar Chão e Brancelhe e a maior distância, de 63,25 Km, é entre Vilar Chão e Vila Chã (Mindelo).

Tabela 5.28: Distâncias euclidianas entre as 19 estações de amostragem Meteorológicas

| | Sam | Vila | Plan | Font | Guil | Bran | Vchão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | Vchã |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Sam | 0,00 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Vila | 10,01 | 0,00 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Plan | 9,31 | 19,31 | 0,00 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Font | 11,11 | 19,99 | 7,44 | 0,00 | | | | | | | | | | | | | | | |
| Guil | 20,99 | 30,92 | 12,07 | 12,49 | 0,00 | | | | | | | | | | | | | | |
| Bran | 22,06 | 31,99 | 12,81 | 16,51 | 6,63 | 0,00 | | | | | | | | | | | | | |
| Vchão | 24,80 | 34,81 | 15,51 | 17,57 | 5,43 | 4,19 | 0,00 | | | | | | | | | | | | |
| Gont | 22,12 | 31,60 | 14,38 | 11,76 | 5,31 | 11,92 | 9,93 | 0,00 | | | | | | | | | | | |
| Vtod | 17,85 | 8,41 | 27,09 | 26,35 | 38,16 | 39,89 | 42,44 | 38,11 | 0,00 | | | | | | | | | | |
| Para | 29,70 | 20,89 | 38,61 | 36,42 | 48,80 | 51,36 | 53,50 | 47,84 | 12,55 | 0,00 | | | | | | | | | |
| Cast | 15,41 | 12,26 | 22,67 | 18,96 | 31,46 | 34,86 | 36,45 | 30,05 | 11,51 | 17,93 | 0,00 | | | | | | | | |
| Taip | 6,32 | 12,06 | 11,39 | 8,55 | 20,73 | 23,62 | 25,46 | 20,29 | 17,82 | 28,08 | 11,31 | 0,00 | | | | | | | |
| Escu | 8,01 | 5,79 | 16,68 | 15,48 | 27,33 | 29,45 | 31,75 | 27,25 | 10,88 | 21,93 | 8,12 | 7,01 | 0,00 | | | | | | |
| Lord | 18,55 | 18,37 | 23,52 | 17,91 | 29,91 | 34,42 | 35,24 | 27,42 | 18,30 | 22,75 | 6,83 | 12,76 | 13,19 | 0,00 | | | | | |
| Fafe | 16,61 | 23,52 | 14,70 | 7,28 | 16,15 | 21,74 | 21,58 | 12,88 | 28,11 | 36,20 | 18,30 | 11,56 | 18,04 | 14,67 | 0,00 | | | | |
| Arad | 21,52 | 26,10 | 21,62 | 14,23 | 23,01 | 28,89 | 28,40 | 19,04 | 28,65 | 34,35 | 17,43 | 15,45 | 20,31 | 11,60 | 7,28 | 0,00 | | | |
| Mrei | 22,23 | 30,91 | 16,19 | 11,13 | 10,20 | 16,80 | 15,05 | 5,13 | 36,57 | 45,34 | 27,42 | 18,99 | 25,96 | 23,88 | 9,26 | 14,42 | 0,00 | | |
| Lour | 25,35 | 31,41 | 23,06 | 15,82 | 20,93 | 27,38 | 25,98 | 16,08 | 34,75 | 40,83 | 23,74 | 19,89 | 25,69 | 18,08 | 8,83 | 6,48 | 10,96 | 0,00 | 48,69 |
| Vchã | 39,70 | 30,86 | 48,53 | 45,97 | 58,43 | 61,24 | 63,25 | 57,16 | 22,47 | 10,01 | 27,12 | 37,79 | 31,87 | 30,85 | 45,07 | 42,26 | 54,32 | 48,69 | 0,00 |

O modelo Gaussiano acompanhado de efeito de pepita, foi o selecionado para modelar todos os dados de precipitação, para todos os meses, como já foi dito. Assim, antes de utilizar este modelo de continuidade espacial, convém validar o modelo obtido. O método de validação aplicado foi a validação cruzada, tal como foi descrito no Capítulo 4.

Aplicando o método de validação cruzada, o valor em cada udómetro/udógrafo, em cada mês, será previsto a partir das observações feitas nos outros 18 udómetros/udógrafo, utilizando o método de *Kriging* a partir do modelo do semi-variograma estimado. Assim, resolvendo o sistema de *Kriging* sucessivamente para cada um das 19 estações de amostragem, e para cada um dos 12 meses do ano, obtemos os pesos correspondentes aos outros 18 pontos de amostragem assim como o valor da variância da estimação (Tabelas 5.29, 5.30, 5.31 e 5.32).

Tabela 5.29: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para as 19 estações de amostragem, aplicando o método de validação cruzada (para Janeiro, Fevereiro e Março)

| Janeiro | Sam | Vila | Plan | Font | Gui | Bran | VChão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | VChã |
|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Sam | | 0,12 | 0,10 | 0,06 | 0,06 | 0,10 | 0,07 | 0,04 | 0,10 | 0,06 | 0,06 | 0,08 | 0,09 | 0,03 | 0,03 | 0,00 | 0,02 | -0,02 | 0,03 |
| Vila | 0,14 | | 0,09 | 0,05 | 0,03 | 0,06 | 0,03 | 0,00 | 0,15 | 0,13 | 0,07 | 0,08 | 0,11 | 0,03 | 0,01 | -0,02 | -0,01 | -0,05 | 0,13 |
| Plan | 0,12 | 0,09 | | 0,07 | 0,10 | 0,14 | 0,13 | 0,07 | 0,06 | 0,01 | 0,03 | 0,07 | 0,07 | 0,01 | 0,04 | 0,00 | 0,05 | 0,00 | -0,03 |
| Font | 0,06 | 0,05 | 0,08 | | 0,08 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,04 | 0,02 | 0,05 | 0,06 | 0,06 | 0,05 | 0,07 | 0,06 | 0,08 | 0,07 | -0,01 |
| Gui | 0,04 | 0,03 | 0,10 | 0,08 | | 0,17 | 0,18 | 0,13 | 0,00 | -0,04 | 0,00 | 0,05 | 0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,11 | 0,07 | -0,07 |
| Bran | 0,08 | 0,06 | 0,13 | 0,08 | 0,16 | | 0,22 | 0,12 | 0,01 | -0,04 | -0,01 | 0,05 | 0,04 | -0,03 | 0,04 | -0,01 | 0,08 | 0,01 | -0,08 |
| VChão | 0,05 | 0,03 | 0,11 | 0,08 | 0,17 | 0,22 | | 0,14 | -0,01 | -0,05 | -0,01 | 0,04 | 0,02 | -0,02 | 0,05 | 0,01 | 0,11 | 0,04 | -0,08 |
| Gont | 0,00 | 0,00 | 0,07 | 0,07 | 0,13 | 0,13 | 0,15 | | -0,02 | -0,04 | 0,01 | 0,04 | 0,02 | 0,03 | 0,08 | 0,08 | 0,13 | 0,12 | -0,06 |
| Vtod | 0,14 | 0,15 | 0,06 | 0,04 | 0,00 | 0,01 | -0,01 | -0,02 | | 0,18 | 0,09 | 0,07 | 0,11 | 0,06 | 0,01 | 0,00 | -0,02 | -0,03 | 0,23 |
| Para | 0,08 | 0,12 | 0,01 | 0,01 | -0,04 | -0,04 | -0,05 | -0,03 | 0,17 | | 0,11 | 0,05 | 0,09 | 0,10 | 0,02 | 0,04 | -0,02 | 0,01 | 0,41 |
| Cast | 0,07 | 0,08 | 0,03 | 0,05 | 0,00 | -0,01 | -0,02 | 0,01 | 0,10 | 0,13 | | 0,07 | 0,08 | 0,10 | 0,06 | 0,08 | 0,03 | 0,07 | 0,17 |
| Taip | 0,10 | 0,09 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,08 | 0,06 | 0,07 | | 0,08 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,05 |
| Escu | 0,12 | 0,12 | 0,07 | 0,05 | 0,03 | 0,04 | 0,02 | 0,02 | 0,12 | 0,11 | 0,08 | 0,08 | | 0,06 | 0,04 | 0,03 | 0,01 | 0,01 | 0,11 |
| Lord | 0,02 | 0,03 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | -0,03 | -0,02 | 0,03 | 0,06 | 0,11 | 0,10 | 0,06 | 0,06 | | 0,09 | 0,13 | 0,06 | 0,14 | 0,15 |
| Fafe | 0,01 | 0,01 | 0,04 | 0,07 | 0,07 | 0,04 | 0,06 | 0,09 | 0,01 | 0,02 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,09 | | 0,12 | 0,10 | 0,14 | 0,01 |
| Arad | -0,03 | -0,02 | 0,00 | 0,06 | 0,04 | -0,01 | 0,02 | 0,08 | 0,00 | 0,04 | 0,08 | 0,05 | 0,02 | 0,13 | 0,12 | | 0,12 | 0,20 | 0,06 |
| Mrei | -0,01 | -0,01 | 0,05 | 0,07 | 0,11 | 0,09 | 0,12 | 0,13 | -0,02 | -0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,01 | 0,06 | 0,10 | 0,12 | | 0,16 | -0,04 |
| Lour | -0,03 | -0,04 | 0,00 | 0,06 | 0,06 | 0,01 | 0,04 | 0,11 | -0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,00 | 0,12 | 0,13 | 0,19 | 0,15 | | 0,03 |
| VChã | 0,05 | 0,09 | -0,02 | -0,01 | -0,05 | -0,07 | -0,07 | -0,04 | 0,17 | 0,33 | 0,12 | 0,03 | 0,08 | 0,11 | 0,01 | 0,05 | -0,03 | 0,02 | |
| Variância | 4515,75 | 4500,54 | 4333,24 | 4165,70 | 4443,80 | 4763,83 | 4767,44 | 4408,49 | 4534,72 | 4898,97 | 4272,73 | 4169,57 | 4262,73 | 4396,05 | 4264,31 | 4571,67 | 4421,07 | 4817,01 | 4515,75 |
| Fevereiro | Sam | Vila | Plan | Font | Gui | Bran | VChão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | VChã |
| Sam | | 0,12 | 0,10 | 0,06 | 0,06 | 0,10 | 0,08 | 0,04 | 0,10 | 0,07 | 0,05 | 0,07 | 0,09 | 0,02 | 0,03 | 0,00 | 0,02 | -0,02 | 0,04 |
| Vila | 0,14 | | 0,09 | 0,05 | 0,03 | 0,06 | 0,03 | 0,00 | 0,15 | 0,13 | 0,07 | 0,08 | 0,11 | 0,03 | 0,01 | -0,02 | -0,01 | -0,05 | 0,13 |
| Plan | 0,12 | 0,09 | | 0,07 | 0,10 | 0,14 | 0,13 | 0,07 | 0,06 | 0,01 | 0,03 | 0,07 | 0,07 | 0,01 | 0,04 | 0,00 | 0,05 | 0,00 | -0,03 |
| Font | 0,06 | 0,05 | 0,07 | | 0,08 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,04 | 0,02 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,07 | 0,06 | 0,08 | 0,07 | -0,01 |
| Gui | 0,04 | 0,03 | 0,10 | 0,08 | | 0,17 | 0,17 | 0,12 | 0,00 | -0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,11 | 0,07 | -0,08 |
| Bran | 0,08 | 0,06 | 0,13 | 0,08 | 0,16 | | 0,21 | 0,12 | 0,02 | -0,05 | -0,01 | 0,05 | 0,04 | -0,03 | 0,04 | -0,01 | 0,08 | 0,01 | -0,10 |
| VChão | 0,05 | 0,03 | 0,12 | 0,08 | 0,16 | 0,21 | | 0,14 | -0,01 | -0,06 | -0,01 | 0,04 | 0,03 | -0,02 | 0,05 | 0,02 | 0,11 | 0,04 | -0,10 |
| Gont | 0,00 | 0,00 | 0,07 | 0,07 | 0,13 | 0,13 | 0,15 | | -0,02 | -0,04 | 0,02 | 0,04 | 0,02 | 0,04 | 0,08 | 0,09 | 0,13 | 0,12 | -0,07 |
| Vtod | 0,14 | 0,15 | 0,06 | 0,04 | 0,00 | 0,02 | -0,01 | -0,02 | | 0,18 | 0,09 | 0,07 | 0,11 | 0,06 | 0,01 | 0,00 | -0,02 | -0,03 | 0,23 |
| Para | 0,08 | 0,12 | 0,01 | 0,02 | -0,04 | -0,05 | -0,06 | -0,03 | 0,17 | | 0,11 | 0,06 | 0,09 | 0,10 | 0,02 | 0,04 | -0,02 | 0,01 | 0,39 |
| Cast | 0,07 | 0,08 | 0,03 | 0,04 | 0,01 | -0,01 | -0,01 | 0,02 | 0,10 | 0,13 | | 0,06 | 0,08 | 0,10 | 0,06 | 0,08 | 0,03 | 0,07 | 0,18 |
| Taip | 0,10 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,06 |
| Escu | 0,12 | 0,11 | 0,07 | 0,05 | 0,03 | 0,05 | 0,03 | 0,02 | 0,11 | 0,11 | 0,08 | 0,07 | | 0,05 | 0,03 | 0,03 | 0,01 | 0,01 | 0,12 |
| Lord | 0,02 | 0,03 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | -0,03 | -0,02 | 0,04 | 0,06 | 0,11 | 0,10 | 0,05 | 0,05 | | 0,08 | 0,13 | 0,07 | 0,13 | 0,16 |
| Fafe | 0,01 | 0,01 | 0,04 | 0,06 | 0,07 | 0,04 | 0,06 | 0,09 | 0,01 | 0,02 | 0,06 | 0,05 | 0,03 | 0,09 | | 0,12 | 0,10 | 0,14 | 0,02 |
| Arad | -0,03 | -0,02 | 0,00 | 0,06 | 0,04 | -0,01 | 0,02 | 0,08 | 0,00 | 0,04 | 0,08 | 0,04 | 0,02 | 0,13 | 0,11 | | 0,12 | 0,20 | 0,07 |
| Mrei | -0,01 | -0,01 | 0,05 | 0,07 | 0,11 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | -0,02 | -0,03 | 0,03 | 0,04 | 0,01 | 0,07 | 0,10 | 0,12 | | 0,16 | -0,04 |
| Lour | -0,03 | -0,04 | 0,00 | 0,06 | 0,06 | 0,01 | 0,04 | 0,11 | -0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,00 | 0,12 | 0,13 | 0,19 | 0,15 | | 0,03 |
| VChã | 0,05 | 0,10 | -0,02 | 0,00 | -0,06 | -0,08 | -0,08 | -0,05 | 0,17 | 0,32 | 0,13 | 0,04 | 0,08 | 0,12 | 0,01 | 0,05 | -0,03 | 0,02 | |
| Variância | 2665,37 | 2636,98 | 2544,45 | 2446,92 | 2607,59 | 2787,58 | 2784,67 | 2587,69 | 2660,67 | 2869,53 | 2505,53 | 2445,38 | 2499,17 | 2575,64 | 2504,51 | 2681,87 | 2596,50 | 2826,36 | 3505,54 |
| Março | Sam | Vila | Plan | Font | Gui | Bran | VChão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | VChã |
| Sam | | 0,12 | 0,10 | 0,06 | 0,06 | 0,09 | 0,07 | 0,04 | 0,10 | 0,06 | 0,05 | 0,07 | 0,09 | 0,03 | 0,03 | 0,00 | 0,02 | -0,01 | 0,04 |
| Vila | 0,13 | | 0,09 | 0,05 | 0,03 | 0,06 | 0,03 | 0,00 | 0,14 | 0,13 | 0,07 | 0,08 | 0,11 | 0,03 | 0,01 | -0,01 | -0,01 | -0,04 | 0,13 |
| Plan | 0,11 | 0,09 | | 0,07 | 0,10 | 0,14 | 0,12 | 0,07 | 0,06 | 0,01 | 0,03 | 0,07 | 0,07 | 0,01 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | -0,03 |
| Font | 0,06 | 0,05 | 0,07 | | 0,08 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,04 | 0,02 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,07 | 0,06 | 0,08 | 0,07 | 0,00 |
| Gui | 0,04 | 0,03 | 0,10 | 0,08 | | 0,16 | 0,17 | 0,12 | 0,00 | -0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,05 | 0,10 | 0,07 | -0,07 |
| Bran | 0,08 | 0,06 | 0,12 | 0,08 | 0,15 | | 0,20 | 0,12 | 0,02 | -0,04 | -0,01 | 0,05 | 0,04 | -0,02 | 0,04 | 0,00 | 0,08 | 0,01 | -0,09 |
| VChão | 0,05 | 0,03 | 0,11 | 0,08 | 0,16 | 0,20 | | 0,14 | -0,01 | -0,06 | -0,01 | 0,04 | 0,03 | -0,01 | 0,05 | 0,02 | 0,11 | 0,05 | -0,09 |
| Gont | 0,01 | 0,00 | 0,07 | 0,07 | 0,12 | 0,13 | 0,14 | | -0,01 | -0,04 | 0,02 | 0,04 | 0,02 | 0,04 | 0,08 | 0,08 | 0,12 | 0,12 | -0,06 |
| Vtod | 0,13 | 0,14 | 0,06 | 0,04 | 0,00 | 0,02 | -0,01 | -0,01 | | 0,18 | 0,09 | 0,07 | 0,11 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | -0,02 | -0,02 | 0,22 |
| Para | 0,08 | 0,12 | 0,01 | 0,02 | -0,04 | -0,04 | -0,05 | -0,03 | 0,16 | | 0,11 | 0,06 | 0,09 | 0,10 | 0,02 | 0,04 | -0,02 | 0,01 | 0,37 |
| Cast | 0,07 | 0,08 | 0,03 | 0,04 | 0,01 | -0,01 | -0,01 | 0,02 | 0,10 | 0,13 | | 0,06 | 0,07 | 0,10 | 0,06 | 0,08 | 0,03 | 0,07 | 0,17 |
| Taip | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,06 |
| Escu | 0,11 | 0,11 | 0,07 | 0,05 | 0,03 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,11 | 0,11 | 0,08 | 0,07 | | 0,06 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,11 |
| Lord | 0,02 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | -0,02 | -0,01 | 0,04 | 0,06 | 0,11 | 0,09 | 0,06 | 0,05 | | 0,08 | 0,12 | 0,06 | 0,13 | 0,15 |
| Fafe | 0,02 | 0,02 | 0,04 | 0,06 | 0,07 | 0,05 | 0,06 | 0,09 | 0,02 | 0,02 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,08 | | 0,12 | 0,10 | 0,14 | 0,02 |
| Arad | -0,02 | -0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,00 | 0,02 | 0,08 | 0,01 | 0,04 | 0,07 | 0,05 | 0,03 | 0,12 | 0,11 | | 0,11 | 0,19 | 0,07 |
| Mrei | -0,01 | -0,01 | 0,05 | 0,07 | 0,11 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | -0,02 | -0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,02 | 0,06 | 0,10 | 0,12 | | 0,15 | -0,04 |
| Lour | -0,02 | -0,04 | 0,01 | 0,06 | 0,06 | 0,01 | 0,05 | 0,11 | -0,02 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,01 | 0,12 | 0,12 | 0,18 | 0,14 | | 0,03 |
| VChã | 0,05 | 0,10 | -0,02 | 0,00 | -0,06 | -0,07 | -0,07 | -0,05 | 0,17 | 0,31 | 0,12 | 0,04 | 0,08 | 0,11 | 0,01 | 0,05 | -0,03 | 0,02 | |
| Variância | 3403,52 | 3380,46 | 3270,14 | 3154,01 | 3353,96 | 3567,78 | 3568,33 | 3329,09 | 3416,54 | 3681,44 | 3226,81 | 3150,94 | 3216,65 | 3307,44 | 3221,89 | 3429,30 | 3336,26 | 3598,90 | 4444,58 |

Tabela 5.30: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para as 19 estações de amostragem, aplicando o método de validação cruzada (para Abril, Maio e Junho)

| Abril | Sam | Vila | Plan | Font | Gui | Bran | VChão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | VChã |
|------------------|------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Sam | | 0,14 | 0,11 | 0,07 | 0,06 | 0,10 | 0,07 | 0,03 | 0,11 | 0,05 | 0,06 | 0,09 | 0,11 | 0,02 | 0,03 | -0,01 | 0,01 | -0,03 | 0,00 |
| Vila | 0,16 | | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,06 | 0,02 | -0,01 | 0,17 | 0,12 | 0,08 | 0,09 | 0,13 | 0,03 | 0,01 | -0,02 | -0,02 | -0,06 | 0,11 |
| Plan | 0,14 | 0,10 | | 0,08 | 0,10 | 0,15 | 0,13 | 0,07 | 0,07 | 0,00 | 0,03 | 0,07 | 0,08 | 0,01 | 0,04 | 0,00 | 0,04 | -0,01 | -0,06 |
| Font | 0,07 | 0,06 | 0,08 | | 0,08 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,07 | 0,07 | 0,08 | 0,07 | -0,03 |
| Gui | 0,04 | 0,02 | 0,10 | 0,08 | | 0,19 | 0,20 | 0,14 | -0,01 | -0,04 | 0,00 | 0,04 | 0,02 | 0,00 | 0,06 | 0,03 | 0,11 | 0,06 | -0,06 |
| Bran | 0,09 | 0,05 | 0,14 | 0,07 | 0,17 | | 0,25 | 0,13 | 0,01 | -0,04 | -0,02 | 0,04 | 0,03 | -0,04 | 0,03 | -0,03 | 0,08 | -0,01 | -0,06 |
| VChão | 0,04 | 0,02 | 0,12 | 0,07 | 0,18 | 0,25 | | 0,15 | -0,02 | -0,05 | -0,03 | 0,03 | 0,01 | -0,04 | 0,04 | 0,00 | 0,11 | 0,03 | -0,05 |
| Gont | 0,00 | -0,01 | 0,07 | 0,07 | 0,14 | 0,14 | 0,17 | | -0,02 | -0,04 | 0,01 | 0,04 | 0,01 | 0,03 | 0,09 | 0,08 | 0,14 | 0,13 | -0,05 |
| Vtod | 0,15 | 0,17 | 0,06 | 0,04 | -0,01 | 0,01 | -0,02 | -0,02 | | 0,19 | 0,10 | 0,08 | 0,12 | 0,06 | 0,01 | 0,00 | -0,03 | -0,04 | 0,24 |
| Para | 0,07 | 0,11 | 0,00 | 0,01 | -0,03 | -0,04 | -0,04 | -0,03 | 0,17 | | 0,11 | 0,05 | 0,09 | 0,09 | 0,01 | 0,03 | -0,02 | 0,01 | 0,48 |
| Cast | 0,07 | 0,08 | 0,03 | 0,05 | 0,00 | -0,02 | -0,03 | 0,01 | 0,10 | 0,13 | | 0,07 | 0,09 | 0,12 | 0,06 | 0,09 | 0,03 | 0,07 | 0,17 |
| Taip | 0,11 | 0,10 | 0,08 | 0,07 | 0,04 | 0,05 | 0,03 | 0,04 | 0,09 | 0,06 | 0,08 | | 0,09 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,02 |
| Escu | 0,13 | 0,13 | 0,08 | 0,06 | 0,02 | 0,03 | 0,01 | 0,01 | 0,13 | 0,10 | 0,09 | 0,09 | | 0,06 | 0,04 | 0,03 | 0,01 | 0,00 | 0,09 |
| Lord | 0,01 | 0,03 | 0,00 | 0,05 | 0,00 | -0,05 | -0,04 | 0,03 | 0,06 | 0,11 | 0,11 | 0,06 | 0,06 | | 0,09 | 0,15 | 0,06 | 0,15 | 0,15 |
| Fafe | 0,00 | 0,01 | 0,04 | 0,07 | 0,06 | 0,03 | 0,05 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,06 | 0,04 | 0,10 | | 0,14 | 0,11 | 0,16 | 0,00 |
| Arad | -0,04 | -0,02 | 0,00 | 0,06 | 0,03 | -0,03 | 0,00 | 0,08 | 0,00 | 0,04 | 0,08 | 0,05 | 0,02 | 0,15 | 0,13 | | 0,12 | 0,23 | 0,05 |
| Mrei | -0,03 | -0,02 | 0,04 | 0,07 | 0,11 | 0,09 | 0,12 | 0,14 | -0,03 | -0,03 | 0,03 | 0,04 | 0,01 | 0,06 | 0,11 | 0,13 | | 0,18 | -0,03 |
| Lour | -0,03 | -0,06 | -0,01 | 0,06 | 0,06 | -0,01 | 0,03 | 0,11 | -0,04 | 0,01 | 0,06 | 0,03 | 0,00 | 0,14 | 0,14 | 0,22 | 0,16 | | 0,03 |
| VChã | 0,02 | 0,08 | -0,04 | -0,02 | -0,04 | -0,04 | -0,04 | -0,03 | 0,17 | 0,36 | 0,11 | 0,01 | 0,06 | 0,10 | 0,00 | 0,04 | -0,02 | 0,02 | |
| Variância | 1614,98 | 1648,62 | 1571,49 | 1501,69 | 1610,89 | 1754,75 | 1759,46 | 1597,11 | 1649,95 | 1791,85 | 1549,21 | 1510,02 | 1547,57 | 1606,52 | 1542,52 | 1676,04 | 1603,33 | 1779,24 | 2389,87 |
| Maio | Sam | Vila | Plan | Font | Gui | Bran | VChão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | VChã |
| Sam | | 0,13 | 0,10 | 0,07 | 0,06 | 0,09 | 0,07 | 0,03 | 0,10 | 0,06 | 0,06 | 0,08 | 0,10 | 0,03 | 0,03 | 0,00 | 0,02 | -0,02 | 0,02 |
| Vila | 0,14 | | 0,09 | 0,05 | 0,02 | 0,05 | 0,03 | 0,00 | 0,15 | 0,12 | 0,08 | 0,08 | 0,11 | 0,04 | 0,01 | -0,01 | -0,01 | -0,04 | 0,12 |
| Plan | 0,12 | 0,09 | | 0,07 | 0,10 | 0,14 | 0,12 | 0,07 | 0,06 | 0,01 | 0,03 | 0,07 | 0,07 | 0,01 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,00 | -0,04 |
| Font | 0,06 | 0,06 | 0,08 | | 0,08 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,06 | 0,06 | 0,05 | 0,07 | 0,06 | 0,08 | 0,07 | -0,02 |
| Gui | 0,04 | 0,02 | 0,10 | 0,08 | | 0,17 | 0,18 | 0,13 | 0,00 | -0,04 | 0,00 | 0,04 | 0,03 | 0,00 | 0,06 | 0,04 | 0,11 | 0,07 | -0,06 |
| Bran | 0,08 | 0,05 | 0,13 | 0,08 | 0,16 | | 0,22 | 0,12 | 0,01 | -0,04 | -0,01 | 0,05 | 0,03 | -0,03 | 0,04 | -0,01 | 0,08 | 0,01 | -0,07 |
| VChão | 0,04 | 0,02 | 0,11 | 0,08 | 0,17 | 0,22 | | 0,14 | -0,01 | -0,05 | -0,02 | 0,04 | 0,02 | -0,02 | 0,05 | 0,01 | 0,11 | 0,04 | -0,06 |
| Gont | 0,00 | 0,00 | 0,07 | 0,07 | 0,13 | 0,13 | 0,15 | | -0,02 | -0,03 | 0,01 | 0,04 | 0,01 | 0,03 | 0,08 | 0,08 | 0,13 | 0,12 | -0,05 |
| Vtod | 0,13 | 0,15 | 0,06 | 0,04 | 0,00 | 0,01 | -0,01 | -0,02 | | 0,18 | 0,09 | 0,07 | 0,11 | 0,06 | 0,01 | 0,00 | -0,02 | -0,03 | 0,23 |
| Para | 0,07 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | -0,03 | -0,04 | -0,05 | -0,03 | 0,17 | | 0,11 | 0,05 | 0,09 | 0,10 | 0,02 | 0,04 | -0,02 | 0,01 | 0,42 |
| Cast | 0,07 | 0,08 | 0,03 | 0,05 | 0,00 | -0,01 | -0,02 | 0,01 | 0,10 | 0,13 | | 0,07 | 0,08 | 0,10 | 0,06 | 0,08 | 0,03 | 0,07 | 0,16 |
| Taip | 0,10 | 0,09 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,08 | 0,06 | 0,07 | | 0,08 | 0,06 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,04 |
| Escu | 0,12 | 0,12 | 0,07 | 0,06 | 0,03 | 0,04 | 0,02 | 0,01 | 0,12 | 0,10 | 0,08 | 0,08 | | 0,06 | 0,04 | 0,03 | 0,01 | 0,01 | 0,10 |
| Lord | 0,02 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | -0,03 | -0,02 | 0,03 | 0,06 | 0,11 | 0,10 | 0,06 | 0,06 | | 0,09 | 0,13 | 0,06 | 0,13 | 0,15 |
| Fafe | 0,01 | 0,01 | 0,04 | 0,07 | 0,07 | 0,04 | 0,05 | 0,09 | 0,01 | 0,02 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,09 | | 0,12 | 0,10 | 0,14 | 0,01 |
| Arad | -0,02 | -0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | -0,01 | 0,01 | 0,08 | 0,00 | 0,04 | 0,08 | 0,05 | 0,03 | 0,13 | 0,12 | | 0,11 | 0,20 | 0,06 |
| Mrei | -0,01 | -0,01 | 0,05 | 0,07 | 0,11 | 0,09 | 0,12 | 0,13 | -0,02 | -0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,01 | 0,06 | 0,10 | 0,12 | | 0,16 | -0,03 |
| Lour | -0,03 | -0,04 | 0,00 | 0,06 | 0,06 | 0,01 | 0,04 | 0,11 | -0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,01 | 0,12 | 0,13 | 0,19 | 0,15 | | 0,03 |
| VChã | 0,04 | 0,09 | -0,03 | -0,01 | -0,04 | -0,05 | -0,05 | -0,04 | 0,17 | 0,33 | 0,11 | 0,03 | 0,07 | 0,10 | 0,01 | 0,04 | -0,02 | 0,02 | |
| Variância | 327,35 | 1333,86 | 1282,89 | 1233,97 | 1316,53 | 1412,44 | 1416,04 | 1305,88 | 1343,23 | 1453,19 | 1267,49 | 1236,73 | 1264,29 | 1303,94 | 1262,47 | 1352,27 | 1308,49 | 1422,61 | 1827,32 |
| Junho | Sam | Vila | Plan | Font | Gui | Bran | VChão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | VChã |
| Sam | | 0,13 | 0,11 | 0,07 | 0,06 | 0,09 | 0,07 | 0,03 | 0,11 | 0,06 | 0,06 | 0,08 | 0,06 | 0,03 | 0,03 | 0,00 | 0,02 | -0,02 | 0,02 |
| Vila | 0,14 | | 0,09 | 0,05 | 0,02 | 0,06 | 0,02 | 0,00 | 0,16 | 0,12 | 0,08 | 0,08 | 0,08 | 0,03 | 0,01 | -0,02 | -0,02 | -0,05 | 0,12 |
| Plan | 0,12 | 0,10 | | 0,07 | 0,10 | 0,14 | 0,13 | 0,07 | 0,06 | 0,01 | 0,03 | 0,07 | 0,03 | 0,01 | 0,04 | 0,00 | 0,05 | 0,00 | -0,04 |
| Font | 0,07 | 0,06 | 0,08 | | 0,08 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,07 | 0,07 | 0,08 | 0,07 | -0,02 |
| Gui | 0,04 | 0,02 | 0,10 | 0,08 | | 0,18 | 0,19 | 0,13 | 0,00 | -0,04 | 0,00 | 0,04 | 0,00 | 0,00 | 0,06 | 0,04 | 0,11 | 0,07 | -0,06 |
| Bran | 0,08 | 0,05 | 0,13 | 0,08 | 0,17 | | 0,23 | 0,13 | 0,01 | -0,04 | -0,02 | 0,05 | -0,02 | -0,03 | 0,03 | -0,01 | 0,08 | 0,00 | -0,07 |
| VChão | 0,04 | 0,02 | 0,11 | 0,08 | 0,17 | 0,23 | | 0,15 | -0,01 | -0,05 | -0,02 | 0,04 | -0,02 | -0,03 | 0,05 | 0,01 | 0,11 | 0,04 | -0,06 |
| Gont | 0,00 | 0,00 | 0,07 | 0,07 | 0,13 | 0,14 | 0,16 | | -0,02 | -0,04 | 0,01 | 0,04 | 0,01 | 0,03 | 0,08 | 0,08 | 0,13 | 0,12 | -0,05 |
| Vtod | 0,14 | 0,16 | 0,06 | 0,04 | 0,00 | 0,01 | -0,01 | -0,02 | | 0,18 | 0,09 | 0,08 | 0,09 | 0,06 | 0,01 | 0,00 | -0,02 | -0,03 | 0,23 |
| Para | 0,07 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | -0,03 | -0,04 | -0,05 | -0,03 | 0,17 | | 0,11 | 0,05 | 0,11 | 0,10 | 0,01 | 0,04 | -0,02 | 0,01 | 0,43 |
| Cast | 0,07 | 0,08 | 0,03 | 0,05 | 0,00 | -0,02 | -0,02 | 0,01 | 0,10 | 0,13 | | 0,07 | 0,07 | 0,11 | 0,06 | 0,09 | 0,03 | 0,07 | 0,17 |
| Taip | 0,10 | 0,09 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,08 | 0,06 | 0,07 | | 0,08 | 0,06 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,04 |
| Escu | 0,12 | 0,12 | 0,08 | 0,06 | 0,03 | 0,04 | 0,02 | 0,01 | 0,12 | 0,10 | 0,08 | 0,08 | | 0,06 | 0,04 | 0,03 | 0,01 | 0,00 | 0,10 |
| Lord | 0,02 | 0,03 | 0,01 | 0,05 | 0,00 | -0,04 | -0,03 | 0,03 | 0,06 | 0,11 | 0,10 | 0,06 | 0,10 | | 0,09 | 0,14 | 0,06 | 0,14 | 0,15 |
| Fafe | 0,01 | 0,01 | 0,04 | 0,07 | 0,06 | 0,04 | 0,05 | 0,09 | 0,01 | 0,02 | 0,06 | 0,05 | 0,06 | 0,09 | | 0,13 | 0,11 | 0,15 | 0,01 |
| Arad | -0,03 | -0,02 | 0,00 | 0,06 | 0,04 | -0,02 | 0,01 | 0,08 | 0,00 | 0,04 | 0,08 | 0,05 | 0,08 | 0,14 | 0,12 | | 0,12 | 0,21 | 0,06 |
| Mrei | -0,02 | -0,02 | 0,05 | 0,07 | 0,11 | 0,09 | 0,12 | 0,13 | -0,02 | -0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,03 | 0,06 | 0,10 | 0,12 | | 0,16 | -0,03 |
| Lour | -0,03 | -0,05 | 0,00 | 0,06 | 0,06 | 0,00 | 0,04 | 0,11 | -0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,06 | 0,13 | 0,13 | 0,20 | 0,15 | | 0,03 |
| VChã | 0,04 | 0,09 | -0,03 | -0,01 | -0,04 | -0,05 | -0,05 | -0,04 | 0,17 | 0,34 | 0,11 | 0,02 | 0,11 | 0,10 | 0,00 | 0,04 | -0,02 | 0,02 | |
| Variância | 510,00 | 512,98 | 492,10 | 472,25 | 504,78 | 544,10 | 545,28 | 500,60 | 515,65 | 558,42 | 485,58 | 473,65 | 484,63 | 500,82 | 483,88 | 520,84 | 502,00 | 549,73 | 713,36 |

5.31: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para as 19 estações de amostragem, aplicando o método de validação cruzada (para Julho, Agosto e Setembro)

| Julho | Sam | Vila | Plan | Font | Gui | Bran | VChão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | VChã |
|------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| Sam | | 0,14 | 0,11 | 0,07 | 0,06 | 0,09 | 0,06 | 0,03 | 0,11 | 0,05 | 0,06 | 0,09 | 0,11 | 0,03 | 0,03 | 0,00 | 0,01 | -0,02 | 0,00 |
| Vila | 0,15 | | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,05 | 0,02 | -0,01 | 0,16 | 0,12 | 0,08 | 0,09 | 0,12 | 0,04 | 0,01 | -0,02 | -0,02 | -0,05 | 0,10 |
| Plan | 0,13 | 0,10 | | 0,08 | 0,10 | 0,15 | 0,13 | 0,07 | 0,06 | 0,00 | 0,03 | 0,07 | 0,08 | 0,01 | 0,04 | 0,00 | 0,05 | -0,01 | -0,05 |
| Font | 0,07 | 0,06 | 0,08 | | 0,08 | 0,09 | 0,08 | 0,08 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,07 | 0,07 | 0,08 | 0,07 | -0,03 |
| Gui | 0,04 | 0,02 | 0,10 | 0,08 | | 0,19 | 0,20 | 0,14 | -0,01 | -0,03 | 0,00 | 0,04 | 0,02 | 0,00 | 0,06 | 0,04 | 0,11 | 0,06 | -0,05 |
| Bran | 0,08 | 0,05 | 0,13 | 0,07 | 0,17 | | 0,24 | 0,13 | 0,01 | -0,03 | -0,02 | 0,04 | 0,03 | -0,04 | 0,03 | -0,02 | 0,08 | 0,00 | -0,04 |
| VChão | 0,04 | 0,02 | 0,11 | 0,07 | 0,18 | 0,24 | | 0,15 | -0,02 | -0,04 | -0,03 | 0,03 | 0,01 | -0,03 | 0,04 | 0,00 | 0,11 | 0,04 | -0,03 |
| Gont | 0,00 | -0,01 | 0,07 | 0,07 | 0,14 | 0,14 | 0,16 | | -0,02 | -0,03 | 0,01 | 0,04 | 0,01 | 0,03 | 0,08 | 0,08 | 0,13 | 0,12 | -0,04 |
| Vtod | 0,14 | 0,16 | 0,06 | 0,03 | -0,01 | 0,01 | -0,02 | -0,02 | | 0,19 | 0,10 | 0,08 | 0,12 | 0,06 | 0,01 | 0,00 | -0,02 | -0,03 | 0,23 |
| Para | 0,07 | 0,11 | 0,00 | 0,01 | -0,03 | -0,03 | -0,04 | -0,03 | 0,17 | | 0,11 | 0,05 | 0,09 | 0,09 | 0,01 | 0,03 | -0,02 | 0,01 | 0,47 |
| Cast | 0,07 | 0,09 | 0,03 | 0,05 | 0,00 | -0,02 | -0,03 | 0,01 | 0,10 | 0,13 | | 0,07 | 0,09 | 0,12 | 0,06 | 0,09 | 0,02 | 0,07 | 0,16 |
| Taip | 0,11 | 0,10 | 0,08 | 0,07 | 0,04 | 0,05 | 0,03 | 0,04 | 0,08 | 0,05 | 0,08 | | 0,09 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,02 |
| Escu | 0,13 | 0,13 | 0,08 | 0,06 | 0,02 | 0,03 | 0,01 | 0,13 | 0,10 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | | 0,06 | 0,04 | 0,03 | 0,01 | 0,00 | 0,08 |
| Lord | 0,02 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,00 | -0,04 | -0,04 | 0,03 | 0,06 | 0,10 | 0,11 | 0,06 | 0,06 | | 0,09 | 0,15 | 0,06 | 0,14 | 0,14 |
| Fafe | 0,01 | 0,01 | 0,04 | 0,07 | 0,06 | 0,03 | 0,05 | 0,09 | 0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,06 | 0,04 | 0,10 | | 0,13 | 0,11 | 0,15 | -0,01 |
| Arad | -0,03 | -0,02 | 0,00 | 0,06 | 0,03 | -0,02 | 0,00 | 0,08 | 0,00 | 0,04 | 0,08 | 0,05 | 0,03 | 0,14 | 0,12 | | 0,12 | 0,22 | 0,05 |
| Mrei | -0,02 | -0,02 | 0,04 | 0,07 | 0,11 | 0,09 | 0,12 | 0,13 | -0,02 | -0,02 | 0,02 | 0,04 | 0,01 | 0,06 | 0,10 | 0,12 | | 0,17 | -0,03 |
| Lour | -0,03 | -0,05 | -0,01 | 0,06 | 0,06 | 0,00 | 0,04 | 0,11 | -0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,03 | 0,00 | 0,13 | 0,13 | 0,21 | 0,15 | | 0,02 |
| VChã | 0,02 | 0,07 | -0,03 | -0,02 | -0,03 | -0,03 | -0,02 | -0,03 | 0,16 | 0,36 | 0,10 | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,00 | 0,03 | -0,02 | 0,02 | |
| Variância | 187,28 | 191,77 | 183,25 | 175,62 | 187,99 | 203,71 | 204,55 | 186,42 | 192,35 | 209,03 | 181,21 | 176,60 | 180,80 | 187,37 | 179,98 | 194,31 | 186,86 | 205,21 | 274,83 |
| Agosto | Sam | Vila | Plan | Font | Gui | Bran | VChão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | VChã |
| Sam | | 0,11 | 0,09 | 0,06 | 0,06 | 0,09 | 0,07 | 0,04 | 0,09 | 0,06 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,03 | 0,04 | 0,01 | 0,03 | 0,00 | 0,04 |
| Vila | 0,12 | | 0,08 | 0,05 | 0,03 | 0,05 | 0,03 | 0,01 | 0,13 | 0,12 | 0,07 | 0,08 | 0,10 | 0,04 | 0,02 | 0,00 | 0,00 | -0,02 | 0,12 |
| Plan | 0,10 | 0,08 | | 0,07 | 0,09 | 0,12 | 0,11 | 0,07 | 0,06 | 0,01 | 0,03 | 0,07 | 0,07 | 0,02 | 0,04 | 0,02 | 0,05 | 0,02 | -0,02 |
| Font | 0,06 | 0,05 | 0,07 | | 0,08 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,04 | 0,02 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,07 | 0,06 | 0,07 | 0,07 | 0,00 |
| Gui | 0,05 | 0,03 | 0,09 | 0,08 | | 0,15 | 0,16 | 0,12 | 0,00 | -0,03 | 0,01 | 0,05 | 0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,05 | 0,10 | 0,07 | -0,05 |
| Bran | 0,07 | 0,05 | 0,12 | 0,08 | 0,15 | | 0,19 | 0,12 | 0,01 | -0,03 | 0,00 | 0,05 | 0,04 | -0,01 | 0,05 | 0,01 | 0,09 | 0,02 | -0,06 |
| VChão | 0,05 | 0,03 | 0,10 | 0,08 | 0,15 | 0,19 | | 0,13 | 0,00 | -0,04 | -0,01 | 0,04 | 0,02 | -0,01 | 0,06 | 0,03 | 0,10 | 0,05 | -0,07 |
| Gont | 0,02 | 0,01 | 0,07 | 0,07 | 0,12 | 0,12 | 0,14 | | -0,01 | -0,03 | 0,02 | 0,04 | 0,02 | 0,04 | 0,08 | 0,08 | 0,12 | 0,11 | -0,04 |
| Vtod | 0,11 | 0,13 | 0,05 | 0,04 | 0,00 | 0,01 | 0,00 | -0,01 | | 0,17 | 0,09 | 0,07 | 0,10 | 0,06 | 0,02 | 0,02 | -0,01 | -0,01 | 0,21 |
| Para | 0,07 | 0,11 | 0,01 | 0,02 | -0,03 | -0,03 | -0,04 | -0,02 | 0,16 | | 0,11 | 0,05 | 0,09 | 0,09 | 0,02 | 0,04 | -0,01 | 0,01 | 0,34 |
| Cast | 0,07 | 0,08 | 0,03 | 0,05 | 0,01 | 0,00 | -0,01 | 0,02 | 0,10 | 0,12 | | 0,06 | 0,08 | 0,09 | 0,06 | 0,07 | 0,03 | 0,06 | 0,15 |
| Taip | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,08 | 0,06 | 0,07 | | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 |
| Escu | 0,10 | 0,11 | 0,07 | 0,05 | 0,03 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,11 | 0,10 | 0,08 | 0,07 | | 0,06 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,10 |
| Lord | 0,03 | 0,04 | 0,02 | 0,05 | 0,01 | -0,01 | -0,01 | 0,04 | 0,06 | 0,10 | 0,09 | 0,06 | 0,06 | | 0,08 | 0,11 | 0,06 | 0,11 | 0,14 |
| Fafe | 0,03 | 0,02 | 0,04 | 0,06 | 0,07 | 0,05 | 0,06 | 0,08 | 0,02 | 0,02 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,08 | | 0,11 | 0,09 | 0,12 | 0,02 |
| Arad | 0,00 | 0,00 | 0,02 | 0,06 | 0,05 | 0,01 | 0,03 | 0,08 | 0,02 | 0,04 | 0,07 | 0,05 | 0,03 | 0,11 | 0,10 | | 0,10 | 0,16 | 0,06 |
| Mrei | 0,01 | 0,00 | 0,05 | 0,07 | 0,10 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | -0,01 | -0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,02 | 0,06 | 0,09 | 0,10 | | 0,13 | -0,03 |
| Lour | -0,01 | -0,02 | 0,02 | 0,06 | 0,07 | 0,03 | 0,05 | 0,10 | -0,01 | 0,02 | 0,06 | 0,04 | 0,02 | 0,10 | 0,11 | 0,16 | 0,13 | | 0,03 |
| VChã | 0,05 | 0,09 | -0,01 | 0,00 | -0,04 | -0,05 | -0,05 | -0,03 | 0,16 | 0,29 | 0,12 | 0,04 | 0,08 | 0,10 | 0,01 | 0,05 | -0,02 | 0,02 | |
| Variância | 280,02 | 281,45 | 273,33 | 265,19 | 280,70 | 295,94 | 296,95 | 278,72 | 285,07 | 306,47 | 271,12 | 265,04 | 269,98 | 276,38 | 269,81 | 283,86 | 278,57 | 295,25 | 363,71 |
| Setembro | Sam | Vila | Plan | Font | Gui | Bran | VChão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | VChã |
| Sam | | 0,19 | 0,14 | 0,08 | 0,05 | 0,10 | 0,05 | 0,01 | 0,13 | 0,03 | 0,07 | 0,11 | 0,13 | 0,02 | 0,03 | -0,02 | -0,01 | -0,06 | -0,08 |
| Vila | 0,19 | | 0,12 | 0,06 | 0,01 | 0,04 | 0,00 | -0,02 | 0,21 | 0,12 | 0,08 | 0,11 | 0,16 | 0,02 | 0,00 | -0,04 | -0,04 | -0,08 | 0,05 |
| Plan | 0,20 | 0,12 | | 0,09 | 0,10 | 0,18 | 0,14 | 0,06 | 0,07 | -0,02 | 0,03 | 0,09 | 0,09 | 0,00 | 0,03 | -0,02 | 0,03 | -0,04 | -0,11 |
| Font | 0,08 | 0,06 | 0,09 | | 0,08 | 0,08 | 0,07 | 0,08 | 0,03 | -0,01 | 0,06 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,08 | 0,07 | 0,08 | 0,07 | -0,09 |
| Gui | 0,04 | 0,01 | 0,10 | 0,07 | | 0,23 | 0,25 | 0,16 | -0,02 | -0,03 | -0,02 | 0,03 | 0,01 | -0,02 | 0,05 | 0,02 | 0,12 | 0,06 | -0,02 |
| Bran | 0,12 | 0,04 | 0,15 | 0,07 | 0,20 | | 0,32 | 0,14 | -0,01 | -0,03 | -0,04 | 0,03 | 0,01 | -0,06 | 0,01 | -0,05 | 0,07 | -0,04 | 0,01 |
| VChão | 0,04 | 0,00 | 0,12 | 0,06 | 0,22 | 0,32 | | 0,17 | -0,03 | -0,02 | -0,05 | 0,01 | -0,01 | -0,06 | 0,02 | -0,03 | 0,12 | 0,01 | 0,05 |
| Gont | -0,01 | -0,02 | 0,06 | 0,07 | 0,16 | 0,16 | 0,20 | | -0,03 | -0,03 | -0,01 | 0,02 | -0,01 | 0,01 | 0,09 | 0,08 | 0,16 | 0,15 | -0,01 |
| Vtod | 0,18 | 0,21 | 0,06 | 0,03 | -0,02 | -0,01 | -0,03 | -0,03 | | 0,21 | 0,10 | 0,08 | 0,14 | 0,05 | 0,00 | -0,02 | -0,03 | -0,05 | 0,26 |
| Para | 0,04 | 0,11 | -0,02 | -0,01 | -0,03 | -0,03 | -0,02 | -0,02 | 0,19 | | 0,11 | 0,03 | 0,08 | 0,09 | 0,00 | 0,02 | -0,02 | 0,00 | 0,70 |
| Cast | 0,07 | 0,09 | 0,03 | 0,05 | -0,02 | -0,05 | -0,06 | -0,01 | 0,11 | 0,13 | | 0,09 | 0,10 | 0,16 | 0,07 | 0,11 | 0,01 | 0,07 | 0,15 |
| Taip | 0,15 | 0,12 | 0,09 | 0,08 | 0,03 | 0,03 | 0,01 | 0,02 | 0,09 | 0,03 | 0,09 | | 0,11 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,03 | 0,03 | -0,06 |
| Escu | 0,16 | 0,17 | 0,09 | 0,07 | 0,01 | 0,02 | -0,02 | -0,01 | 0,15 | 0,09 | 0,10 | 0,11 | | 0,07 | 0,04 | 0,02 | -0,01 | -0,02 | 0,02 |
| Lord | -0,02 | 0,02 | 0,00 | 0,06 | -0,02 | -0,07 | -0,07 | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,08 | 0,07 | | 0,11 | 0,20 | 0,05 | 0,17 | 0,14 |
| Fafe | -0,02 | 0,00 | 0,03 | 0,08 | 0,06 | 0,01 | 0,03 | 0,09 | 0,00 | 0,00 | 0,07 | 0,07 | 0,04 | 0,12 | | 0,17 | 0,12 | 0,19 | -0,05 |
| Arad | -0,08 | -0,04 | -0,02 | 0,06 | 0,02 | -0,06 | -0,03 | 0,08 | -0,02 | 0,02 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,19 | 0,15 | | 0,13 | 0,30 | 0,03 |
| Mrei | -0,06 | -0,04 | 0,03 | 0,07 | 0,12 | 0,08 | 0,13 | 0,16 | -0,03 | -0,02 | 0,01 | 0,03 | -0,01 | 0,05 | 0,12 | 0,14 | | 0,22 | -0,02 |
| Lour | -0,03 | -0,07 | -0,03 | 0,06 | 0,05 | -0,04 | 0,01 | 0,12 | -0,05 | 0,00 | 0,06 | 0,02 | -0,02 | 0,15 | 0,16 | 0,27 | 0,19 | | 0,03 |
| VChã | -0,04 | 0,03 | -0,06 | -0,05 | -0,01 | 0,01 | 0,03 | -0,01 | 0,15 | 0,44 | 0,08 | -0,03 | 0,01 | 0,08 | -0,02 | 0,02 | -0,01 | 0,02 | |
| Variância | 499,56 | 649,57 | 605,07 | 570,20 | 616,16 | 697,98 | 699,94 | 613,17 | 641,22 | 700,70 | 596,94 | 578,65 | 594,75 | 633,40 | 588,25 | 657,60 | 618,09 | 714,14 | 1108,80 |

Tabela 5.32: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para as 19 estações de amostragem, aplicando o método de validação cruzada (para Outubro, Novembro e Dezembro)

| Outubro | Sam | Vila | Plan | Font | Gui | Bran | VChão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | VChã |
|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Sam | | 0,16 | 0,13 | 0,08 | 0,05 | 0,09 | 0,06 | 0,02 | 0,14 | 0,04 | 0,06 | 0,10 | 0,12 | 0,03 | 0,03 | -0,01 | 0,00 | -0,04 | -0,04 |
| Vila | 0,17 | | 0,11 | 0,05 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | -0,02 | 0,22 | 0,12 | 0,08 | 0,10 | 0,14 | 0,03 | 0,01 | -0,03 | -0,03 | -0,07 | 0,08 |
| Plan | 0,16 | 0,11 | | 0,08 | 0,10 | 0,16 | 0,13 | 0,07 | 0,07 | -0,01 | 0,03 | 0,08 | 0,08 | 0,00 | 0,03 | -0,01 | 0,04 | -0,02 | -0,08 |
| Font | 0,07 | 0,06 | 0,09 | | 0,08 | 0,08 | 0,08 | 0,08 | 0,04 | 0,00 | 0,05 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,08 | 0,07 | 0,08 | 0,07 | -0,06 |
| Gui | 0,04 | 0,01 | 0,10 | 0,07 | | 0,21 | 0,22 | 0,15 | -0,02 | -0,03 | -0,01 | 0,03 | 0,01 | -0,01 | 0,06 | 0,03 | 0,12 | 0,06 | -0,03 |
| Bran | 0,10 | 0,04 | 0,14 | 0,07 | 0,19 | | 0,28 | 0,13 | -0,01 | -0,03 | -0,03 | 0,03 | 0,02 | -0,05 | 0,02 | -0,04 | 0,08 | -0,02 | -0,02 |
| VChão | 0,04 | 0,01 | 0,12 | 0,07 | 0,20 | 0,28 | | 0,16 | -0,03 | -0,03 | -0,04 | 0,02 | 0,00 | -0,05 | 0,03 | -0,01 | 0,11 | 0,02 | 0,00 |
| Gont | -0,01 | -0,02 | 0,06 | 0,07 | 0,15 | 0,15 | 0,18 | | -0,03 | -0,03 | 0,00 | 0,03 | 0,00 | 0,02 | 0,09 | 0,08 | 0,15 | 0,13 | -0,03 |
| Vtod | 0,16 | 0,19 | 0,06 | 0,03 | -0,01 | 0,00 | -0,02 | -0,03 | | 0,20 | 0,10 | 0,08 | 0,10 | 0,05 | 0,01 | -0,01 | -0,03 | -0,04 | 0,25 |
| Para | 0,06 | 0,11 | -0,01 | 0,00 | -0,03 | -0,03 | -0,03 | -0,03 | 0,19 | | 0,11 | 0,04 | 0,08 | 0,09 | 0,00 | 0,03 | -0,02 | 0,00 | 0,58 |
| Cast | 0,07 | 0,09 | 0,03 | 0,05 | -0,01 | -0,04 | -0,05 | 0,00 | 0,11 | 0,13 | | 0,08 | 0,10 | 0,13 | 0,07 | 0,10 | 0,02 | 0,07 | 0,16 |
| Taip | 0,13 | 0,11 | 0,09 | 0,07 | 0,04 | 0,04 | 0,02 | 0,03 | 0,09 | 0,04 | 0,08 | | 0,10 | 0,08 | 0,06 | 0,06 | 0,03 | 0,03 | -0,02 |
| Escu | 0,15 | 0,15 | 0,09 | 0,06 | 0,01 | 0,02 | 0,00 | 0,00 | 0,15 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | | 0,07 | 0,04 | 0,03 | 0,00 | -0,01 | 0,05 |
| Lord | 0,00 | 0,03 | 0,00 | 0,05 | -0,01 | -0,06 | -0,06 | 0,02 | 0,04 | 0,10 | 0,13 | 0,07 | 0,07 | | 0,10 | 0,17 | 0,06 | 0,16 | 0,14 |
| Fafe | 0,00 | 0,01 | 0,04 | 0,07 | 0,06 | 0,02 | 0,04 | 0,09 | 0,00 | 0,00 | 0,07 | 0,06 | 0,04 | 0,11 | | 0,15 | 0,11 | 0,18 | -0,03 |
| Arad | -0,06 | -0,03 | -0,01 | 0,06 | 0,03 | -0,04 | -0,01 | 0,08 | -0,02 | 0,03 | 0,09 | 0,05 | 0,02 | 0,17 | 0,14 | | 0,13 | 0,26 | 0,04 |
| Mrei | -0,04 | -0,03 | 0,04 | 0,07 | 0,12 | 0,09 | 0,13 | 0,15 | -0,04 | -0,03 | 0,02 | 0,03 | 0,00 | 0,06 | 0,11 | 0,14 | | 0,19 | -0,03 |
| Lour | -0,03 | -0,06 | -0,02 | 0,06 | 0,05 | -0,02 | 0,02 | 0,12 | -0,05 | 0,00 | 0,06 | 0,03 | -0,01 | 0,14 | 0,15 | 0,24 | 0,17 | | 0,03 |
| VChã | -0,01 | 0,05 | -0,05 | -0,04 | -0,02 | -0,01 | 0,00 | -0,02 | 0,15 | 0,40 | 0,09 | -0,01 | 0,03 | 0,09 | -0,01 | 0,03 | -0,02 | 0,02 | |
| Variância | 2399,69 | 2615,87 | 2467,56 | 2343,82 | 2524,39 | 2796,78 | 2808,19 | 2504,84 | 1454,29 | 2839,80 | 2435,44 | 2368,63 | 2431,55 | 2549,36 | 2412,56 | 2654,14 | 2517,47 | 2840,43 | 4091,43 |
| Novembro | Sam | Vila | Plan | Font | Gui | Bran | VChão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | VChã |
| Sam | | 0,12 | 0,10 | 0,06 | 0,06 | 0,09 | 0,07 | 0,04 | 0,10 | 0,06 | 0,05 | 0,07 | 0,09 | 0,03 | 0,03 | 0,00 | 0,02 | -0,01 | 0,04 |
| Vila | 0,13 | | 0,09 | 0,05 | 0,03 | 0,06 | 0,03 | 0,00 | 0,14 | 0,13 | 0,07 | 0,08 | 0,11 | 0,04 | 0,01 | -0,01 | -0,01 | -0,04 | 0,13 |
| Plan | 0,11 | 0,09 | | 0,07 | 0,10 | 0,14 | 0,12 | 0,07 | 0,06 | 0,01 | 0,03 | 0,07 | 0,07 | 0,01 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | -0,03 |
| Font | 0,06 | 0,05 | 0,07 | | 0,08 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,04 | 0,02 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,07 | 0,06 | 0,08 | 0,07 | 0,00 |
| Gui | 0,04 | 0,03 | 0,10 | 0,08 | | 0,16 | 0,17 | 0,12 | 0,00 | -0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,10 | 0,07 | -0,07 |
| Bran | 0,08 | 0,06 | 0,12 | 0,08 | 0,15 | | 0,20 | 0,12 | 0,02 | -0,04 | -0,01 | 0,05 | 0,04 | -0,02 | 0,04 | 0,00 | 0,08 | 0,01 | -0,09 |
| VChão | 0,05 | 0,03 | 0,11 | 0,08 | 0,16 | 0,20 | | 0,14 | -0,01 | -0,05 | -0,01 | 0,04 | 0,03 | -0,01 | 0,05 | 0,02 | 0,11 | 0,05 | -0,09 |
| Gont | 0,01 | 0,00 | 0,07 | 0,07 | 0,12 | 0,13 | 0,15 | | -0,01 | -0,03 | 0,02 | 0,04 | 0,02 | 0,04 | 0,08 | 0,08 | 0,12 | 0,12 | -0,06 |
| Vtod | 0,13 | 0,14 | 0,06 | 0,04 | 0,00 | 0,02 | -0,01 | -0,01 | | 0,18 | 0,09 | 0,07 | 0,11 | 0,06 | 0,02 | 0,01 | -0,02 | -0,02 | 0,22 |
| Para | 0,08 | 0,11 | 0,01 | 0,02 | -0,03 | -0,04 | -0,05 | -0,03 | 0,16 | | 0,11 | 0,06 | 0,09 | 0,10 | 0,02 | 0,04 | -0,02 | 0,01 | 0,37 |
| Cast | 0,07 | 0,08 | 0,03 | 0,04 | 0,01 | -0,01 | -0,01 | 0,02 | 0,10 | 0,13 | | 0,06 | 0,08 | 0,10 | 0,06 | 0,08 | 0,03 | 0,07 | 0,17 |
| Taip | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,08 | 0,07 | 0,07 | | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,06 |
| Escu | 0,11 | 0,11 | 0,07 | 0,05 | 0,03 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,11 | 0,11 | 0,08 | 0,07 | | 0,06 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,11 |
| Lord | 0,02 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | -0,02 | -0,01 | 0,04 | 0,06 | 0,11 | 0,09 | 0,06 | 0,05 | | 0,08 | 0,12 | 0,06 | 0,13 | 0,15 |
| Fafe | 0,02 | 0,02 | 0,04 | 0,06 | 0,07 | 0,05 | 0,06 | 0,09 | 0,02 | 0,02 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,08 | | 0,12 | 0,10 | 0,14 | 0,02 |
| Arad | -0,02 | -0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,00 | 0,02 | 0,08 | 0,01 | 0,04 | 0,07 | 0,05 | 0,03 | 0,12 | 0,11 | | 0,11 | 0,19 | 0,07 |
| Mrei | -0,01 | -0,01 | 0,05 | 0,07 | 0,11 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | -0,02 | -0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,02 | 0,06 | 0,10 | 0,11 | | 0,15 | -0,04 |
| Lour | -0,02 | -0,04 | 0,01 | 0,06 | 0,06 | 0,01 | 0,05 | 0,11 | -0,02 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,01 | 0,12 | 0,12 | 0,18 | 0,14 | | 0,03 |
| VChã | 0,05 | 0,10 | -0,02 | 0,00 | -0,05 | -0,07 | -0,07 | -0,04 | 0,17 | 0,31 | 0,12 | 0,04 | 0,08 | 0,11 | 0,01 | 0,05 | -0,03 | 0,02 | |
| Variância | 3193,88 | 3176,96 | 3072,57 | 2963,86 | 3151,89 | 3353,41 | 3355,35 | 3128,36 | 3210,42 | 3460,16 | 3033,08 | 2961,79 | 3023,53 | 3108,73 | 3027,33 | 3221,62 | 3134,50 | 3379,79 | 4187,57 |
| Dezembro | Sam | Vila | Plan | Font | Gui | Bran | VChão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | VChã |
| Sam | | 0,12 | 0,10 | 0,06 | 0,06 | 0,09 | 0,07 | 0,04 | 0,10 | 0,06 | 0,06 | 0,07 | 0,09 | 0,03 | 0,03 | 0,00 | 0,02 | -0,01 | 0,04 |
| Vila | 0,13 | | 0,09 | 0,05 | 0,03 | 0,06 | 0,03 | 0,00 | 0,14 | 0,12 | 0,07 | 0,08 | 0,11 | 0,04 | 0,01 | -0,01 | -0,01 | -0,04 | 0,13 |
| Plan | 0,11 | 0,09 | | 0,07 | 0,10 | 0,14 | 0,12 | 0,07 | 0,06 | 0,01 | 0,03 | 0,07 | 0,07 | 0,01 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,00 | -0,03 |
| Font | 0,06 | 0,05 | 0,07 | | 0,08 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,04 | 0,02 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,07 | 0,06 | 0,08 | 0,07 | -0,01 |
| Gui | 0,04 | 0,03 | 0,10 | 0,08 | | 0,17 | 0,17 | 0,12 | 0,00 | -0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,11 | 0,07 | -0,07 |
| Bran | 0,08 | 0,05 | 0,13 | 0,08 | 0,16 | | 0,21 | 0,12 | 0,01 | -0,04 | -0,01 | 0,05 | 0,04 | -0,02 | 0,04 | 0,00 | 0,08 | 0,01 | -0,08 |
| VChão | 0,05 | 0,03 | 0,11 | 0,08 | 0,16 | 0,21 | | 0,14 | -0,01 | -0,05 | -0,01 | 0,04 | 0,02 | -0,02 | 0,05 | 0,02 | 0,11 | 0,05 | -0,08 |
| Gont | 0,01 | 0,00 | 0,07 | 0,07 | 0,13 | 0,13 | 0,15 | | -0,02 | -0,03 | 0,02 | 0,04 | 0,02 | 0,04 | 0,08 | 0,08 | 0,12 | 0,12 | -0,06 |
| Vtod | 0,13 | 0,14 | 0,06 | 0,04 | 0,00 | 0,01 | -0,01 | -0,01 | | 0,18 | 0,09 | 0,07 | 0,11 | 0,06 | 0,01 | 0,01 | -0,02 | -0,03 | 0,22 |
| Para | 0,08 | 0,11 | 0,01 | 0,01 | -0,03 | -0,04 | -0,05 | -0,03 | 0,16 | | 0,11 | 0,06 | 0,09 | 0,10 | 0,02 | 0,04 | -0,02 | 0,01 | 0,38 |
| Cast | 0,07 | 0,08 | 0,03 | 0,05 | 0,01 | -0,01 | -0,01 | 0,02 | 0,10 | 0,13 | | 0,06 | 0,08 | 0,10 | 0,06 | 0,08 | 0,03 | 0,07 | 0,17 |
| Taip | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,08 | 0,06 | 0,07 | | 0,08 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,05 |
| Escu | 0,11 | 0,11 | 0,07 | 0,05 | 0,03 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,11 | 0,11 | 0,08 | 0,07 | | 0,06 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,11 |
| Lord | 0,02 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | -0,03 | -0,02 | 0,04 | 0,06 | 0,11 | 0,10 | 0,06 | 0,06 | | 0,08 | 0,13 | 0,06 | 0,13 | 0,15 |
| Fafe | 0,02 | 0,02 | 0,04 | 0,07 | 0,07 | 0,04 | 0,06 | 0,09 | 0,02 | 0,02 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,09 | | 0,12 | 0,10 | 0,14 | 0,02 |
| Arad | -0,02 | -0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,00 | 0,02 | 0,08 | 0,01 | 0,04 | 0,08 | 0,05 | 0,03 | 0,12 | 0,11 | | 0,11 | 0,19 | 0,06 |
| Mrei | -0,01 | -0,01 | 0,05 | 0,07 | 0,11 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | -0,02 | -0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,01 | 0,06 | 0,10 | 0,12 | | 0,15 | -0,04 |
| Lour | -0,02 | -0,04 | 0,00 | 0,06 | 0,06 | 0,01 | 0,05 | 0,11 | -0,02 | 0,01 | | | | | | | | | |

Como seria de esperar, relativamente aos pesos, como é lógico são as estações de amostragem mais próximas que recebem o maior peso; as estações de amostragem que trazem a maior contribuição é sempre aquela que está mais próxima do lugar de estimação e as estações mais distantes têm menor influência no valor a estimar. Por outro lado, os valores mais pequenos são negativos e correspondem aos pontos mais afastados do local de estimação e aparecem relacionados com o efeito de “cortina” (*Screen effect*, no original em Inglês, quando pontos amostrais perdem influência devido à presença de outros pontos amostrais entre ele mesmo e o ponto de estimação).

É também curioso verificar que a precisão da estimação é superior para as estações de amostragem que se encontram espacialmente mais entre todas as outras estações e piora à medida que nos aproximamos dos extremos da região.

Relativamente à variância de predição, assinalamos os maiores valores obtidos a sublinhado (Tabela 5.29, 5.30, 5.31 e 5.32) e os menores valores a negrito (Tabela 5.29, 5.30, 5.31 e 5.32) das 19 estações de amostragem, em cada mês. A estimação em Taipas (Taip) e Fontela (Font) são quase sempre as mais precisas, nos diferentes meses, enquanto que as menos precisas são Vila Chã – Mindelo (VChã) e Parada (Para).

Os valores estimados $\hat{Z}_t(x_i)$ são calculados a partir dos valores observados nas outras 18 estações de amostragem e os pesos obtidos (os pesos encontram-se na Tabela 5.29, 5.30, 5.31 e

5.32), utilizando a expressão
$$\hat{Z}_t(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{19} \lambda_j Z_t(x_j).$$

A comparação com os valores observados $Z_t(x_i)$ é realizada através das diferenças normalizadas $\frac{\hat{Z}_t(x_i) - Z_t(x_i)}{\sigma(x_i)}$. A análise destas diferenças permite julgar a qualidade do modelo de continuidade espacial/temporal obtido (esta comparação foi efectuada para cada mês do ano e com os valores observados em cada estação de amostragem).

Foram calculadas as estatísticas valor médio das diferenças normalizadas e diferença quadrática média que permitem fazer o diagnóstico da qualidade do modelo, tal como já foi explicado no Capítulo 4. O valor destas estatísticas é calculado, para cada mês, com as observações/estimativas nas 19 estações de amostragem e os respectivos valores observados. Obtivemos assim 12 valores médios das diferenças normalizadas e 12 diferenças quadráticas médias, correspondentes aos 12 meses, os

primeiros são próximos de zero e as diferenças próximas de um, permitindo-nos concluir sobre a boa qualidade dos 12 modelos de continuidade espacial estimados (modelos Gaussianos acompanhados de efeito de pepita). No entanto, há que referir, que os melhores ajustamentos foram conseguidos para os meses de Junho, Julho e Agosto, e os ajustamentos referentes aos meses de Dezembro, Janeiro, Fevereiro e Março, os piores.

Uma vez validados os modelos, passamos à etapa de estimação propriamente dita.

5.4.2.1 Estimação pontual da Precipitação

Os modelos de continuidade espacial estimados são utilizados, para obter a expressão do estimador da intensidade da precipitação, primeiro com o objectivo de completar as observações de precipitação mensal omissas (falhas) nas séries de precipitação mensal das 19 estações de amostragem e, depois, para se obter a expressão do estimador da intensidade da precipitação nos lugares onde não há estações de amostragem, isto é, onde não há valores observados.

O primeiro objectivo foi conseguido, logo depois da validação cruzada (efectuada apenas com os valores existentes), usando os pesos obtidos nas Tabelas 5.29, 5.30, 5.31 e 5.32. Assim, para um determinado mês do ano t , se não houver um valor observado numa determinada estação de amostragem i , esse valor é estimado a partir dos valores observados nas outras 18 estações de amostragem e os pesos são obtidos utilizando, novamente, a expressão

$$\hat{Z}_t(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{19} \lambda_j Z_t(x_j).$$

Quanto ao segundo objectivo, i.e., obter o estimador da intensidade média mensal da precipitação num lugar x_0 e num instante t^* (mês), $\hat{Z}_{t^*}(x_0)$, este é uma combinação linear dos valores observados nos 19 udómetros/udógrafo das estações Meteorológicas no mesmo instante:

$$\hat{Z}_{t^*}(x_0) = \sum_{j=1}^{19} \lambda_j Z_{t^*}(x_j),$$

em que os ponderadores são obtidos pela resolução do sistema de *Kriging*

Ordinário.

A precisão associada ao estimador vem dada pela variância de estimação $\sigma_{KO}^2(x_0) = \lambda^T \mathbf{V}_0 + \phi$.

Os pesos λ_j e o parâmetro do multiplicador de Lagrange ϕ são solução de um sistema (ver Capítulo 4)

linear de 20 equações (associado a um determinado mês). No nosso caso, é preciso resolver 19 x 12 sistemas de *Kriging*, para se obterem todos os parâmetros dos 12 modelos de estimação, correspondentes a cada mês, num determinado lugar.

Face à extensão dos resultados obtidos optou-se, a título de exemplo, por apenas se apresentar uma das doze matrizes estimadas $\hat{\Lambda}$ de semivariogramas de dimensão 19x19, obtidas a partir das distâncias euclidianas entre os udómetros/udógrafo U_i e U_j ($i, j = 1, \dots, 19$), estimadas utilizando o modelo de semivariograma para cada mês. Será apresentada a matriz referente ao mês de Janeiro (Tabela 5.33). Cada entrada da matriz $\hat{\Lambda}$ é o valor de $\gamma_z(d_{ij})$, o valor do semivariograma da distância euclidiana entre os udómetros/udógrafo U_i e U_j .

Tabela 5.33: Matriz $\hat{\Lambda}$ referente ao mês de Janeiro

| Janeiro | Sam | Vila | Plan | Font | Guil | Bran | Vchão | Gont | Vtod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | Mrei | Lour | Vchá |
|---------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|------|
| Sam | 0,0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Vila | 4129,6 | 0,0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Plan | 4098,0 | 4761,8 | 0,0 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Font | 4183,8 | 4823,3 | 4024,1 | 0,0 | | | | | | | | | | | | | | | |
| Guil | 4916,5 | 6068,8 | 4236,0 | 4260,3 | 0,0 | | | | | | | | | | | | | | |
| Bran | 5021,6 | 6215,2 | 4278,9 | 4531,0 | 3997,4 | 0,0 | | | | | | | | | | | | | |
| Vchão | 5312,0 | 6622,6 | 4456,6 | 4614,1 | 3963,4 | 3935,2 | 0,0 | | | | | | | | | | | | |
| Gont | 5027,2 | 6161,8 | 4378,6 | 4218,9 | 3960,2 | 4227,6 | 4125,7 | 0,0 | | | | | | | | | | | |
| Vtod | 4637,4 | 4060,2 | 5577,9 | 5488,9 | 7142,0 | 7424,3 | 7856,5 | 7132,6 | 0,0 | | | | | | | | | | |
| Para | 5906,3 | 4906,9 | 7214,5 | 6867,1 | 9017,0 | 9514,0 | 9937,9 | 8835,4 | 4263,8 | 0,0 | | | | | | | | | |
| Cast | 4449,3 | 4246,7 | 5082,9 | 4731,1 | 6141,5 | 6630,5 | 6871,8 | 5951,4 | 4205,2 | 4643,4 | 0,0 | | | | | | | | |
| Taip | 3987,8 | 4235,5 | 4198,8 | 4065,8 | 4891,8 | 5183,1 | 5385,6 | 4850,6 | 4634,3 | 5698,9 | 4194,2 | 0,0 | | | | | | | |
| Escu | 4044,9 | 3972,9 | 4543,9 | 4454,8 | 5606,6 | 5873,4 | 6181,7 | 5596,9 | 4172,3 | 5008,7 | 4049,1 | 4009,5 | 0,0 | | | | | | |
| Lord | 4695,8 | 4680,6 | 5171,8 | 4641,9 | 5934,1 | 6564,7 | 6686,1 | 5618,1 | 4674,3 | 5091,2 | 4003,9 | 4275,7 | 4302,1 | 0,0 | | | | | |
| Fafe | 4538,1 | 5172,4 | 4400,0 | 4018,6 | 4503,4 | 4989,1 | 4973,6 | 4283,3 | 5702,6 | 6833,6 | 4674,4 | 4207,8 | 4652,9 | 4397,9 | 0,0 | | | | |
| Arad | 4967,9 | 5460,1 | 4977,3 | 4368,1 | 5118,8 | 5801,2 | 5739,5 | 4738,0 | 5770,8 | 6553,5 | 4603,0 | 4452,2 | 4852,4 | 4210,0 | 4018,8 | 0,0 | | | |
| Mrei | 5038,1 | 6067,4 | 4506,5 | 4185,1 | 4138,4 | 4553,2 | 4424,3 | 3955,8 | 6889,7 | 8373,5 | 5617,4 | 4733,5 | 5443,9 | 5210,5 | 4095,7 | 4380,7 | 0,0 | | |
| Lour | 5373,5 | 6135,6 | 5123,3 | 4479,1 | 4910,5 | 5613,1 | 5446,6 | 4498,3 | 6612,8 | 7581,1 | 5196,2 | 4813,4 | 5413,0 | 4656,3 | 4077,5 | 3992,9 | 4176,3 | 0,0 | |
| Vchá | 7391,6 | 6059,6 | 8966,4 | 8488,2 | 10954,0 | 11550,7 | 11983,7 | 10687,9 | 5063,1 | 4129,7 | 5581,1 | 7082,6 | 6198,4 | 6058,7 | 8323,8 | 7826,3 | 10103,5 | 8997,2 | 0,0 |

O modelo de semivariograma estimado para descrever a continuidade espacial do processo, no mês de Janeiro, foi o semivariograma isotrópico de tipo Gaussiano (acompanhado de efeito de pepita), obtido na secção 5.4.1:

$$\gamma_z(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ 3893,785 + 111,935 \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{\|h\|}{29599,341} \right)^2 \right) \right), & h \neq 0 \end{cases}$$

A estimativa do vector \mathbf{v}_0 de dimensão 19 é diferente para cada lugar x_0 . Cada elemento i ($i=1, \dots, 19$) de $\hat{\mathbf{v}}_0$ é $\gamma_z(d_{0i})$, onde d_{0i} é a distância euclidiana entre o lugar x_0 e o udómetro/udógrafo U_i .

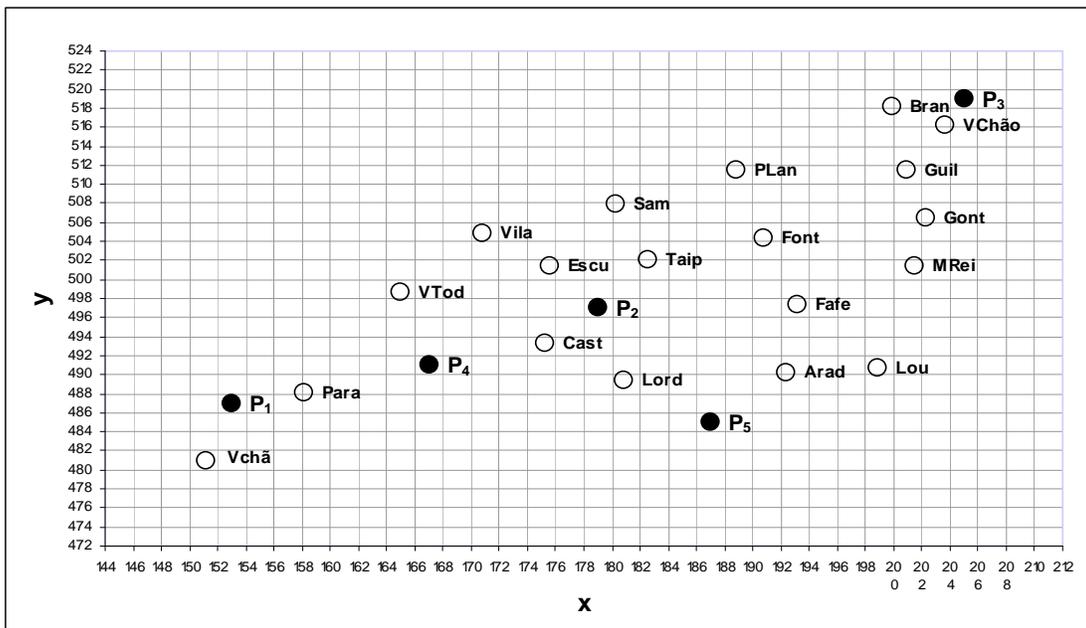


Figura 5.39: Representação esquemática da localização das 19 estações meteorológicas e dos 5 pontos a estimar

Como exemplo, calculamos a expressão do estimador em 5 pontos da região considerada (Figura 5.39): o ponto P_1 de coordenadas (153,487), situado mais a jusante da bacia hidrográfica; o ponto P_2 de coordenadas (179,497) situado no centro da bacia; o ponto P_3 de coordenadas (205,519) situado mais a montante na bacia; o ponto P_4 de coordenadas (167,491) situado no trecho médio da bacia e o ponto P_5 de coordenadas (187,485) situado no extremo sul da bacia.

Na Tabela 5.34 e 5.35 são apresentados os factores de ponderação (valores dos pesos) estimados para cada um dos 5 pontos, nos vários meses do ano, assim como as respectivas variâncias de estimação, e que foram obtidos pela metodologia de *Kriging* Ordinário, por intermédio da resolução dos sistemas de *Kriging*.

Tabela 5.34: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para os 5 pontos e para o primeiro semestre, pela resolução do sistema de *Kriging* Ordinário

| Janeiro | Same | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------------|
| Ponto 1 | 0,047 | 0,108 | 0,003 | 0,003 | -0,037 | -0,035 | -0,043 | -0,037 | 0,159 | 0,235 | 0,103 | 0,044 | 0,085 | 0,078 | 0,003 | 0,018 | -0,031 | -0,008 | 0,307 | 4972,190 |
| Ponto 2 | 0,059 | 0,069 | 0,043 | 0,050 | 0,021 | 0,013 | 0,008 | 0,025 | 0,075 | 0,077 | 0,077 | 0,064 | 0,071 | 0,076 | 0,054 | 0,062 | 0,034 | 0,050 | 0,070 | 4174,976 |
| Ponto 3 | 0,063 | 0,025 | 0,111 | 0,072 | 0,159 | 0,200 | 0,204 | 0,130 | -0,010 | -0,048 | -0,023 | 0,035 | 0,016 | -0,032 | 0,039 | -0,002 | 0,094 | 0,022 | -0,056 | 4788,689 |
| Ponto 4 | 0,053 | 0,087 | 0,020 | 0,029 | -0,015 | -0,024 | -0,032 | -0,010 | 0,115 | 0,151 | 0,098 | 0,059 | 0,081 | 0,090 | 0,036 | 0,052 | 0,002 | 0,031 | 0,176 | 4382,232 |
| Ponto 5 | -0,009 | -0,012 | -0,015 | 0,045 | 0,009 | -0,041 | -0,021 | 0,051 | 0,015 | 0,067 | 0,089 | 0,042 | 0,027 | 0,138 | 0,105 | 0,162 | 0,089 | 0,170 | 0,089 | 4632,601 |
| Fevereiro | Same | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
| Ponto 1 | 0,052 | 0,112 | 0,006 | 0,006 | -0,041 | -0,041 | -0,051 | -0,041 | 0,160 | 0,230 | 0,106 | 0,049 | 0,089 | 0,082 | 0,005 | 0,021 | -0,033 | -0,008 | 0,297 | 2907,479 |
| Ponto 2 | 0,057 | 0,067 | 0,043 | 0,049 | 0,023 | 0,016 | 0,012 | 0,028 | 0,074 | 0,079 | 0,074 | 0,061 | 0,068 | 0,073 | 0,053 | 0,060 | 0,035 | 0,050 | 0,077 | 2448,879 |
| Ponto 3 | 0,067 | 0,030 | 0,113 | 0,075 | 0,155 | 0,194 | 0,197 | 0,128 | -0,008 | -0,053 | -0,019 | 0,040 | 0,021 | -0,028 | 0,042 | 0,002 | 0,093 | 0,023 | -0,072 | 2796,063 |
| Ponto 4 | 0,053 | 0,086 | 0,021 | 0,030 | -0,014 | -0,023 | -0,031 | -0,009 | 0,114 | 0,150 | 0,097 | 0,059 | 0,080 | 0,088 | 0,036 | 0,052 | 0,003 | 0,031 | 0,177 | 2573,657 |
| Ponto 5 | -0,010 | -0,013 | -0,015 | 0,044 | 0,011 | -0,039 | -0,019 | 0,053 | 0,015 | 0,068 | 0,087 | 0,041 | 0,026 | 0,134 | 0,104 | 0,159 | 0,091 | 0,169 | 0,093 | 2715,749 |
| Março | Same | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
| Ponto 1 | 0,052 | 0,110 | 0,007 | 0,007 | -0,038 | -0,039 | -0,049 | -0,039 | 0,157 | 0,225 | 0,105 | 0,050 | 0,088 | 0,082 | 0,007 | 0,022 | -0,030 | -0,005 | 0,289 | 3728,305 |
| Ponto 2 | 0,057 | 0,067 | 0,043 | 0,049 | 0,024 | 0,017 | 0,013 | 0,028 | 0,074 | 0,079 | 0,074 | 0,061 | 0,067 | 0,072 | 0,053 | 0,059 | 0,035 | 0,050 | 0,077 | 3155,706 |
| Ponto 3 | 0,066 | 0,029 | 0,110 | 0,075 | 0,151 | 0,188 | 0,191 | 0,126 | -0,007 | -0,051 | -0,016 | 0,040 | 0,022 | -0,024 | 0,044 | 0,006 | 0,093 | 0,027 | -0,069 | 3582,377 |
| Ponto 4 | 0,053 | 0,086 | 0,022 | 0,030 | -0,013 | -0,021 | -0,028 | -0,007 | 0,113 | 0,148 | 0,096 | 0,058 | 0,079 | 0,087 | 0,036 | 0,052 | 0,004 | 0,032 | 0,174 | 3313,677 |
| Ponto 5 | -0,005 | -0,007 | -0,010 | 0,045 | 0,013 | -0,033 | -0,014 | 0,052 | 0,019 | 0,068 | 0,085 | 0,042 | 0,028 | 0,129 | 0,100 | 0,151 | 0,087 | 0,159 | 0,091 | 3471,800 |
| Abril | Same | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
| Ponto 1 | 0,035 | 0,101 | -0,006 | -0,008 | -0,030 | -0,025 | -0,027 | -0,031 | 0,162 | 0,255 | 0,095 | 0,031 | 0,074 | 0,068 | -0,007 | 0,009 | -0,028 | -0,011 | 0,344 | 1827,509 |
| Ponto 2 | 0,065 | 0,075 | 0,045 | 0,054 | 0,014 | 0,003 | -0,005 | 0,019 | 0,078 | 0,072 | 0,086 | 0,072 | 0,078 | 0,085 | 0,058 | 0,066 | 0,030 | 0,050 | 0,054 | 1510,981 |
| Ponto 3 | 0,054 | 0,015 | 0,112 | 0,065 | 0,174 | 0,226 | 0,232 | 0,139 | -0,016 | -0,037 | -0,037 | 0,021 | 0,003 | -0,047 | 0,028 | -0,016 | 0,095 | 0,011 | -0,022 | 1767,845 |
| Ponto 4 | 0,053 | 0,089 | 0,017 | 0,028 | -0,020 | -0,029 | -0,037 | -0,015 | 0,119 | 0,157 | 0,104 | 0,061 | 0,084 | 0,096 | 0,035 | 0,053 | -0,002 | 0,029 | 0,178 | 1582,691 |
| Ponto 5 | -0,016 | -0,021 | -0,023 | 0,045 | 0,000 | -0,054 | -0,034 | 0,046 | 0,008 | 0,064 | 0,099 | 0,044 | 0,025 | 0,157 | 0,115 | 0,183 | 0,091 | 0,189 | 0,082 | 1702,760 |
| Mai | Same | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
| Ponto 1 | 0,042 | 0,104 | 0,000 | 0,000 | -0,032 | -0,030 | -0,035 | -0,033 | 0,157 | 0,238 | 0,099 | 0,040 | 0,080 | 0,075 | 0,001 | 0,016 | -0,028 | -0,007 | 0,313 | 1476,247 |
| Ponto 2 | 0,061 | 0,071 | 0,044 | 0,052 | 0,019 | 0,010 | 0,004 | 0,024 | 0,076 | 0,075 | 0,080 | 0,067 | 0,073 | 0,079 | 0,055 | 0,063 | 0,033 | 0,050 | 0,064 | 1238,215 |
| Ponto 3 | 0,058 | 0,020 | 0,109 | 0,069 | 0,161 | 0,203 | 0,208 | 0,132 | -0,012 | -0,041 | -0,026 | 0,030 | 0,012 | -0,034 | 0,037 | -0,003 | 0,094 | 0,022 | -0,039 | 1422,464 |
| Ponto 4 | 0,053 | 0,087 | 0,020 | 0,029 | -0,016 | -0,024 | -0,031 | -0,011 | 0,116 | 0,152 | 0,100 | 0,059 | 0,082 | 0,091 | 0,036 | 0,052 | 0,001 | 0,030 | 0,174 | 1298,094 |
| Ponto 5 | -0,007 | -0,010 | -0,013 | 0,045 | 0,008 | -0,040 | -0,022 | 0,048 | 0,017 | 0,066 | 0,091 | 0,044 | 0,029 | 0,139 | 0,105 | 0,162 | 0,086 | 0,168 | 0,084 | 1371,270 |
| Junho | Same | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
| Ponto 1 | 0,041 | 0,104 | -0,001 | -0,002 | -0,033 | -0,030 | -0,035 | -0,033 | 0,159 | 0,243 | 0,099 | 0,038 | 0,079 | 0,073 | -0,001 | 0,014 | -0,029 | -0,008 | 0,322 | 567,881 |
| Ponto 2 | 0,062 | 0,072 | 0,044 | 0,052 | 0,018 | 0,009 | 0,002 | 0,023 | 0,077 | 0,075 | 0,081 | 0,068 | 0,074 | 0,080 | 0,056 | 0,064 | 0,032 | 0,050 | 0,062 | 474,152 |
| Ponto 3 | 0,058 | 0,020 | 0,111 | 0,069 | 0,165 | 0,210 | 0,215 | 0,134 | -0,013 | -0,042 | -0,029 | 0,028 | 0,010 | -0,038 | 0,035 | -0,007 | 0,094 | 0,018 | -0,038 | 547,832 |
| Ponto 4 | 0,053 | 0,088 | 0,019 | 0,029 | -0,017 | -0,026 | -0,033 | -0,012 | 0,117 | 0,153 | 0,101 | 0,060 | 0,082 | 0,092 | 0,036 | 0,053 | 0,000 | 0,030 | 0,176 | 497,140 |
| Ponto 5 | -0,010 | -0,014 | -0,017 | 0,045 | 0,006 | -0,045 | -0,026 | 0,048 | 0,014 | 0,065 | 0,093 | 0,043 | 0,027 | 0,145 | 0,108 | 0,169 | 0,089 | 0,175 | 0,085 | 528,358 |

Tabela 5.35: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para os 5 pontos e para o segundo semestre, pela resolução do sistema de *Kriging* Ordinário

| Julho | Same | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------------|
| Ponto 1 | 0,032 | 0,098 | -0,007 | -0,008 | -0,025 | -0,020 | -0,021 | -0,026 | 0,159 | 0,252 | 0,092 | 0,029 | 0,071 | 0,066 | -0,006 | 0,010 | -0,024 | -0,008 | 0,338 | <u>212,840</u> |
| Ponto 2 | 0,066 | 0,076 | 0,046 | 0,055 | 0,013 | 0,003 | -0,005 | 0,018 | 0,079 | 0,071 | 0,087 | 0,073 | 0,079 | 0,086 | 0,059 | 0,066 | 0,029 | 0,049 | 0,050 | 176,736 |
| Ponto 3 | 0,050 | 0,012 | 0,108 | 0,064 | 0,171 | 0,220 | 0,227 | 0,138 | -0,016 | -0,030 | -0,035 | 0,020 | 0,001 | -0,043 | 0,029 | -0,012 | 0,095 | 0,015 | -0,011 | 205,451 |
| Ponto 4 | 0,053 | 0,089 | 0,017 | 0,027 | -0,019 | -0,027 | -0,034 | -0,014 | 0,120 | 0,156 | 0,105 | 0,060 | 0,084 | 0,096 | 0,035 | 0,053 | -0,002 | 0,028 | 0,174 | 185,042 |
| Ponto 5 | -0,009 | -0,013 | -0,017 | 0,045 | 0,001 | -0,047 | -0,030 | 0,043 | 0,013 | 0,063 | 0,098 | 0,045 | 0,029 | 0,153 | 0,110 | 0,175 | 0,085 | 0,178 | 0,078 | 197,515 |
| Agosto | Same | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
| Ponto 1 | 0,048 | 0,103 | 0,007 | 0,008 | -0,029 | -0,029 | -0,036 | -0,029 | 0,149 | 0,215 | 0,100 | 0,046 | 0,083 | 0,079 | 0,009 | 0,024 | -0,022 | 0,000 | 0,275 | <u>310,302</u> |
| Ponto 2 | 0,058 | 0,068 | 0,044 | 0,050 | 0,025 | 0,018 | 0,014 | 0,028 | 0,074 | 0,076 | 0,074 | 0,062 | 0,068 | 0,072 | 0,053 | 0,059 | 0,035 | 0,049 | 0,071 | 265,451 |
| Ponto 3 | 0,059 | 0,024 | 0,102 | 0,071 | 0,144 | 0,176 | 0,180 | 0,122 | -0,007 | -0,039 | -0,012 | 0,037 | 0,019 | -0,017 | 0,046 | 0,013 | 0,093 | 0,034 | -0,047 | 298,085 |
| Ponto 4 | 0,053 | 0,085 | 0,023 | 0,031 | -0,009 | -0,016 | -0,023 | -0,004 | 0,110 | 0,143 | 0,094 | 0,058 | 0,079 | 0,086 | 0,036 | 0,051 | 0,006 | 0,032 | 0,164 | 277,873 |
| Ponto 5 | 0,006 | 0,006 | 0,000 | 0,046 | 0,017 | -0,021 | -0,006 | 0,048 | 0,027 | 0,067 | 0,082 | 0,045 | 0,035 | 0,119 | 0,092 | 0,135 | 0,078 | 0,140 | 0,083 | 287,230 |
| Setembro | Same | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
| Ponto 1 | 0,006 | 0,087 | -0,026 | -0,028 | -0,012 | -0,005 | 0,006 | -0,012 | 0,169 | 0,297 | 0,072 | 0,000 | 0,049 | 0,039 | -0,024 | -0,010 | -0,016 | -0,011 | 0,419 | <u>720,486</u> |
| Ponto 2 | 0,077 | 0,082 | 0,049 | 0,064 | 0,000 | -0,016 | -0,028 | 0,005 | 0,081 | 0,060 | 0,108 | 0,091 | 0,096 | 0,107 | 0,068 | 0,076 | 0,019 | 0,044 | 0,017 | 577,944 |
| Ponto 3 | 0,032 | -0,006 | 0,109 | 0,047 | 0,203 | 0,279 | 0,290 | 0,152 | -0,026 | -0,010 | -0,057 | -0,007 | -0,023 | -0,068 | 0,003 | -0,042 | 0,091 | -0,009 | 0,042 | 702,450 |
| Ponto 4 | 0,049 | 0,089 | 0,009 | 0,024 | -0,027 | -0,036 | -0,041 | -0,023 | 0,127 | 0,169 | 0,121 | 0,063 | 0,090 | 0,112 | 0,033 | 0,055 | -0,011 | 0,021 | 0,178 | 602,994 |
| Ponto 5 | -0,027 | -0,040 | -0,034 | 0,042 | -0,020 | -0,067 | -0,054 | 0,028 | 0,054 | 0,121 | 0,046 | 0,046 | 0,021 | 0,206 | 0,130 | 0,229 | 0,083 | 0,223 | 0,068 | 677,243 |
| Outubro | Same | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
| Ponto 1 | 0,019 | 0,092 | -0,017 | -0,019 | -0,020 | -0,013 | -0,008 | -0,021 | 0,164 | 0,277 | 0,083 | 0,014 | 0,060 | 0,054 | -0,016 | -0,001 | -0,022 | -0,011 | 0,382 | 2906,584 |
| Ponto 2 | 0,072 | 0,080 | 0,047 | 0,059 | 0,006 | -0,007 | -0,017 | 0,011 | 0,081 | 0,066 | 0,097 | 0,082 | 0,088 | 0,096 | 0,063 | 0,071 | 0,024 | 0,048 | 0,034 | 2368,021 |
| Ponto 3 | 0,042 | 0,003 | 0,110 | 0,056 | 0,189 | 0,251 | 0,260 | 0,147 | -0,022 | -0,021 | -0,048 | 0,006 | -0,012 | -0,058 | 0,016 | -0,029 | 0,094 | 0,002 | 0,016 | 2819,461 |
| Ponto 4 | 0,051 | 0,090 | 0,013 | 0,025 | -0,024 | -0,033 | -0,039 | -0,019 | 0,124 | 0,163 | 0,112 | 0,062 | 0,087 | 0,103 | 0,034 | 0,054 | -0,007 | 0,025 | 0,178 | 2474,918 |
| Ponto 5 | -0,020 | -0,028 | -0,028 | 0,044 | -0,010 | -0,061 | -0,045 | 0,037 | 0,001 | 0,059 | 0,109 | 0,046 | 0,025 | 0,179 | 0,122 | 0,204 | 0,088 | 0,204 | 0,073 | 2710,796 |
| Novembro | Same | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
| Ponto 1 | 0,051 | 0,109 | 0,006 | 0,007 | -0,038 | -0,038 | -0,047 | -0,038 | 0,157 | 0,226 | 0,105 | 0,049 | 0,087 | 0,081 | 0,007 | 0,022 | -0,030 | -0,005 | 0,290 | <u>3505,185</u> |
| Ponto 2 | 0,057 | 0,067 | 0,043 | 0,049 | 0,024 | 0,017 | 0,013 | 0,028 | 0,074 | 0,078 | 0,074 | 0,061 | 0,068 | 0,073 | 0,053 | 0,060 | 0,035 | 0,050 | 0,076 | 2966,215 |
| Ponto 3 | 0,065 | 0,028 | 0,109 | 0,074 | 0,152 | 0,188 | 0,191 | 0,126 | -0,008 | -0,049 | -0,017 | 0,039 | 0,021 | -0,024 | 0,044 | 0,006 | 0,093 | 0,027 | -0,065 | 3368,816 |
| Ponto 4 | 0,053 | 0,086 | 0,022 | 0,030 | -0,013 | -0,021 | -0,028 | -0,007 | 0,113 | 0,148 | 0,096 | 0,058 | 0,079 | 0,087 | 0,036 | 0,052 | 0,004 | 0,031 | 0,173 | 3113,787 |
| Ponto 5 | -0,005 | -0,007 | -0,010 | 0,045 | 0,013 | -0,033 | -0,014 | 0,052 | 0,019 | 0,068 | 0,085 | 0,042 | 0,029 | 0,129 | 0,100 | 0,151 | 0,086 | 0,159 | 0,090 | 3261,870 |
| Dezembro | Same | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
| Ponto 1 | 0,049 | 0,108 | 0,005 | 0,005 | -0,036 | -0,036 | -0,044 | -0,036 | 0,157 | 0,229 | 0,103 | 0,046 | 0,085 | 0,079 | 0,005 | 0,020 | -0,029 | -0,006 | 0,296 | <u>6871,418</u> |
| Ponto 2 | 0,058 | 0,068 | 0,043 | 0,050 | 0,023 | 0,015 | 0,010 | 0,027 | 0,075 | 0,078 | 0,076 | 0,063 | 0,069 | 0,074 | 0,054 | 0,061 | 0,035 | 0,050 | 0,073 | 5800,362 |
| Ponto 3 | 0,063 | 0,026 | 0,109 | 0,073 | 0,154 | 0,192 | 0,196 | 0,128 | -0,009 | -0,047 | -0,019 | 0,037 | 0,018 | -0,027 | 0,042 | 0,003 | 0,094 | 0,026 | -0,058 | 6609,489 |
| Ponto 4 | 0,053 | 0,086 | 0,021 | 0,030 | -0,014 | -0,022 | -0,029 | -0,008 | 0,114 | 0,149 | 0,097 | 0,059 | 0,080 | 0,088 | 0,036 | 0,052 | 0,003 | 0,031 | 0,173 | 6086,766 |
| Ponto 5 | -0,005 | -0,008 | -0,011 | 0,045 | 0,012 | -0,035 | -0,017 | 0,051 | 0,018 | 0,068 | 0,087 | 0,043 | 0,029 | 0,132 | 0,101 | 0,154 | 0,087 | 0,162 | 0,089 | 6391,059 |

Relativamente aos valores obtidos, podemos concluir que, como era de esperar, os udómetros/udógrafo que trazem a maior contribuição são aqueles que estão mais próximos do lugar de estimação; os valores mais pequenos (são negativos) correspondem aos udómetros/udógrafo mais afastados do lugar de estimação ou aparecem relacionados com o efeito de “cortina” já mencionado, anteriormente; a precisão é melhor nos pontos 2 (assinaladas a negrito as suas variâncias de estimação) e 4 por estarem geograficamente situados entre as estações de amostragem, como é de esperar, é pior nos extremos da região Ponto 1 (assinalada a sublinhado as suas variâncias de estimação) e Ponto 3, nos diversos meses do ano; o P₃ possui a variância de estimação com qualidade

intermédia, apesar de ser um valor extremo (no sentido Sul) mas encontrando-se no trecho médio da bacia com proximidade a um grande número de estações de amostragem.

A partir destes factores de ponderação foram calculadas as estimativas da intensidade média da precipitação em cada um dos pontos, no período de 1931 a 2008, no mês de Janeiro. A título de exemplo apresentamos na Tabela 5.36, para Janeiro de 2001, onde o nível de precipitação foi particularmente intenso nesse ano (a média nos 19 udómetros/udógrafo foi de 499,8 *mm*), com as estimativas da precipitação nos 5 pontos.

Tabela 5.36: Estimativas da precipitação (em *mm*) em Janeiro de 2001 nos 5 pontos

| Estimação em Janeiro de 2001 | | | | |
|-------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Ponto 1 | Ponto 2 | Ponto 3 | Ponto 4 | Ponto 5 |
| 338,14 | 460,60 | 650,80 | 392,28 | 416,21 |

Assim, como foram calculados os pesos, a variância de estimação, as estimativas para estes 5 pontos, poderíamos fazê-lo para um grande número de pontos da região. Os resultados podem representar-se sob a forma de mapas de contorno (Diggle [16]).

5.4.2.2 Estimação da Precipitação em Área

Os processos teóricos da metodologia que vamos adoptar para estimar a intensidade média mensal da precipitação, na região da bacia hidrográfica do Ave (que notaremos por *A*) ou numa sub-região, nomeadamente, numa sub-bacia A_x , foram explicados no Capítulo 4 (secção Estimação Global).

Assim, de forma análoga ao caso da estimação pontual, também neste caso o primeiro passo seria estimar a matriz das distâncias euclidianas entre as 19 estações de amostragem meteorológicas (Tabelas 5.28) que já foi estimada na secção anterior.

Tendo em conta o valor da área da bacia hidrográfica do Ave, bem como o mapa de localização desta região, a região foi “discretizada” seleccionando um conjunto finito de 368 pontos espaçados regularmente na região, centros de células que representam regiões com uma área de $2 \times 2 \text{ Km}^2$ (Figura 5.40). Obtivemos uma grelha de 368 pontos x_j .

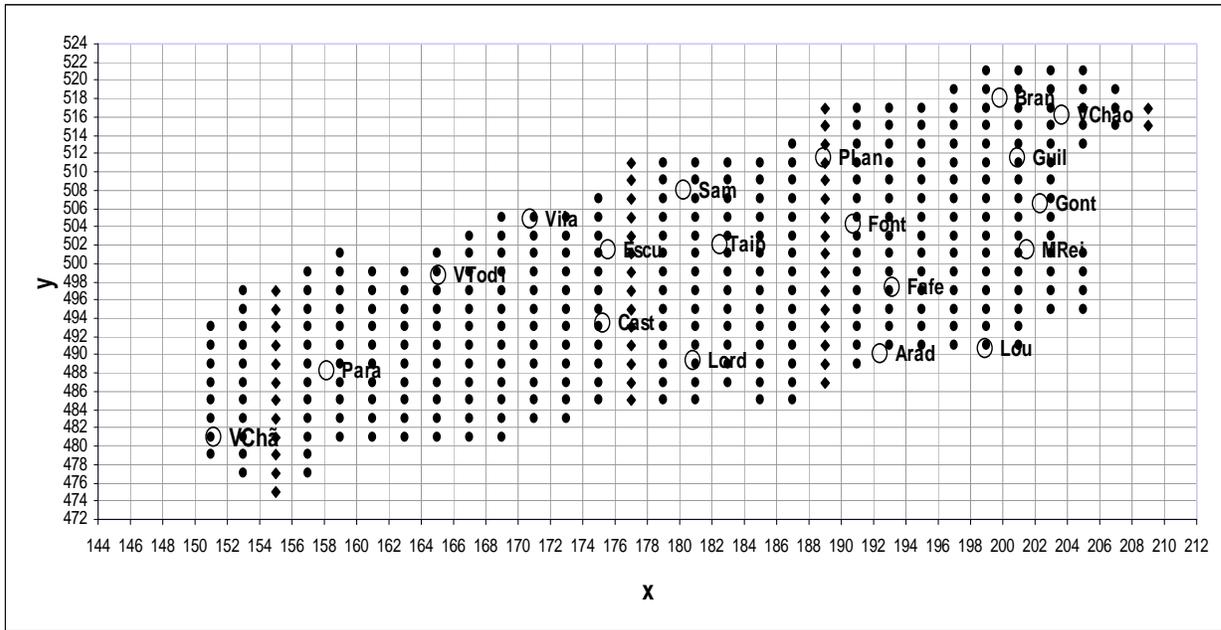


Figura 5.40: Representação esquemática da localização das 19 estações meteorológicas e dos 368 pontos considerados

O vector \mathbf{v}_A é estimado escolhendo um conjunto finito, mas suficientemente denso, de pontos espaçados regularmente na região A.

A estimativa de $\hat{\mathbf{v}}_A$ de \mathbf{v}_A é um vector de dimensão 19 onde cada elemento i ($i = 1, \dots, 19$) é estimado como $\hat{\gamma}_Z(A)_i$, onde d_{ji} é a distância euclidiana entre o ponto x_j e o udómetro/udógrafo U_i , por $\hat{\gamma}_Z(A)_i = \frac{1}{368} \sum_{j=1}^{368} \hat{\gamma}(d_{ji})$ em que $i = 1, \dots, 19$, utilizando as expressões dos semi-variogramas estimados anteriormente, para cada mês do ano. Assim, foram obtidas 12 estimativas de $\hat{\mathbf{v}}_A$.

O valor $\mathbf{v}_{A,A}$ é estimado a partir da mesma grelha de pontos do que para a estimação de \mathbf{v}_A , por $\hat{\gamma}_Z(A,A) = \frac{1}{368 \times 368} \sum_{i,j=1}^{368} \hat{\gamma}(d_{ij})$, em que d_{ij} é a distância euclidiana entre quaisquer pontos da grelha x_i e x_j , $i, j = 1, \dots, 368$.

O estimador da intensidade média mensal da precipitação na região $\hat{Z}_{t^*}(A)$ ou numa sub-bacia $\hat{Z}_{t^*}(A_k)$, num instante t^* (mês), é uma combinação linear dos valores observados nos 19

udómetros/udógrafo das estações Meteorológicas que a influenciam no total de área drenada:

$$\hat{Z}_{r^*}(A) = \sum_{j=1}^{19} \lambda_{A,j} Z_{r^*}(U_j) \quad \text{e} \quad \hat{Z}_{r^*}(A_k) = \sum_{j=1}^{19} \lambda_{A_k,j} Z_{r^*}(U_j),$$

são obtidos pela resolução do sistema de *Kriging* Ordinário.

A variância do erro de estimação de *Kriging* é $\sigma_{KO}^2 = \lambda_A^T \mathbf{v}_A + \phi_A - \mathbf{v}_{A,A}$, onde a estimação de \mathbf{v}_A e de $\mathbf{v}_{A,A}$ já foram explicadas e ϕ_A representa o multiplicador de Lagrange.

Foram resolvidos 12 sistemas de *Kriging*, para cada mês do ano. Assim, para a área da bacia hidrográfica do Ave A foram obtidos os ponderadores que determinam a expressão do estimador para cada mês do ano, bem como a variância de estimação (Tabela 5.37).

Relativamente aos valores obtidos, podemos observar que os pesos mais elevados estão associados às estações de amostragem de Fontela e Viatodos e os mais baixos, associados às estações de Parada e Vilar Chão, na maioria dos meses. A contribuição da estação de amostragem Parada é sempre a que tem menor valor em todos os meses. Observamos que o peso maior é dado pela estação de amostragem Loureiro, nos dois meses de Verão, Julho e Agosto (com o peso 1,005 em Julho e de 0,738 em Agosto).

A título de exemplo, para ser apresentado neste trabalho, calculamos a estimação global, em área, novamente para o mês de Janeiro de 2001 e foi de 381,678 mm. No entanto, não é possível avaliar as estimativas, em área, da precipitação obtidas, pois não há “valores em área” observados.

Tabela 5.37: Valores dos pesos obtidos e da variância de estimação, para a estimação em área de A e para os 12 meses

| | Sam | Vila | PLan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã | Variância |
|-----------------------|--------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|--------------|-------|-----------|
| Estimação Global em A | 0,064 | 0,109 | -0,023 | 0,251 | 0,082 | 0,025 | -0,176 | -0,086 | 0,311 | -0,194 | 0,057 | 0,089 | 0,106 | 0,098 | 0,075 | 0,150 | -0,003 | -0,066 | 0,130 | 4098,070 |
| Estimação Global em A | 0,048 | 0,098 | -0,029 | 0,250 | 0,078 | 0,026 | -0,177 | -0,107 | 0,300 | -0,205 | 0,045 | 0,072 | 0,100 | 0,096 | 0,075 | 0,154 | 0,001 | 0,051 | 0,125 | 2331,104 |
| Estimação Global em A | 0,053 | 0,093 | -0,015 | 0,218 | 0,075 | 0,030 | -0,141 | -0,074 | 0,267 | -0,160 | 0,049 | 0,074 | 0,094 | 0,089 | 0,071 | 0,136 | 0,007 | 0,014 | 0,121 | 3010,326 |
| Estimação Global em A | 0,044 | 0,109 | -0,059 | 0,312 | 0,074 | 0,001 | -0,256 | -0,169 | 0,362 | -0,297 | 0,044 | 0,080 | 0,122 | 0,116 | 0,094 | 0,187 | -0,006 | 0,133 | 0,108 | 1347,865 |
| Estimação Global em A | 0,027 | 0,076 | -0,035 | 0,228 | 0,061 | 0,015 | -0,162 | -0,120 | 0,259 | -0,201 | 0,031 | 0,052 | 0,094 | 0,091 | 0,080 | 0,145 | 0,015 | 0,249 | 0,095 | 1109,056 |
| Estimação Global em A | -0,023 | 0,047 | -0,066 | 0,246 | 0,044 | 0,003 | -0,191 | -0,201 | 0,246 | -0,266 | -0,003 | 0,009 | 0,088 | 0,094 | 0,091 | 0,167 | 0,027 | 0,622 | 0,067 | 397,891 |
| Estimação Global em A | -0,077 | 0,007 | -0,091 | 0,239 | 0,026 | -0,006 | -0,189 | -0,262 | 0,203 | -0,300 | -0,040 | -0,040 | 0,079 | 0,090 | 0,101 | 0,171 | 0,047 | 1,005 | 0,036 | 105,978 |
| Estimação Global em A | -0,023 | 0,020 | -0,033 | 0,141 | 0,029 | 0,012 | -0,087 | -0,121 | 0,125 | -0,144 | -0,006 | -0,005 | 0,053 | 0,060 | 0,064 | 0,106 | 0,036 | 0,738 | 0,037 | 189,456 |
| Estimação Global em A | 0,070 | 0,181 | -0,159 | 0,565 | 0,075 | -0,085 | -0,570 | -0,371 | 0,633 | -0,633 | 0,070 | 0,147 | 0,219 | 0,200 | 0,162 | 0,314 | -0,048 | 0,178 | 0,056 | 498,854 |
| Estimação Global em A | 0,089 | 0,154 | -0,076 | 0,385 | 0,082 | -0,025 | -0,349 | -0,183 | 0,462 | -0,372 | 0,076 | 0,135 | 0,159 | 0,142 | 0,110 | 0,213 | -0,029 | -0,073 | 0,101 | 2254,976 |
| Estimação Global em A | 0,051 | 0,092 | -0,015 | 0,215 | 0,073 | 0,029 | -0,138 | -0,074 | 0,263 | -0,158 | 0,048 | 0,073 | 0,094 | 0,088 | 0,071 | 0,134 | 0,008 | 0,028 | 0,119 | 2632,123 |
| Estimação Global em A | 0,066 | 0,104 | -0,011 | 0,223 | 0,079 | 0,030 | -0,145 | -0,060 | 0,282 | -0,156 | 0,059 | 0,088 | 0,100 | 0,091 | 0,071 | 0,135 | 0,003 | -0,090 | 0,129 | 5239,465 |

A estimação global, deste tipo, em particular para a estimação da intensidade média, em área, da precipitação numa sub-bacia A_k , é muito importante, nomeadamente em estudos de recursos hídricos, quando se está interessado em estimar o valor de um caudal, de um factor hidrometeorológico ou de um valor aproximado da medida do volume médio de água que passa, num

determinado período de tempo (por exemplo num mês), na secção de referência (sub-bacia hidrográfica) de um determinado local da bacia hidrográfica.

Assim, para se estimar a intensidade média, em área, da precipitação numa sub-bacia A_k , a selecção dos pontos a utilizar (um subconjunto dos 368 pontos que “discretizam” a área total), em cada caso, deve ser efectuada tendo em conta a área total drenada por cada sub-bacia. Identifica-se uma vizinhança espacial correspondente à sub-bacia hidrográfica considerada. Depois, escolhidos os pontos que entrarão no processo de modelação para cada sub-bacia, obtêm-se os ponderadores que determinam a expressão do estimador para cada mês do ano, bem como a respectiva variância de estimação.

6. Conclusão

Foi nosso objectivo obter metodologias que além de cumprirem os objectivos propostos (obtenção de estimativas rigorosas de valores mensais de precipitação, pontualmente e em área), pudessem também ser aplicadas a outros casos de estudo, por exemplo a outra bacia hidrográfica, envolvendo o mesmo tipo de informação.

O método de *Kriging* é um método de interpolação estocástica, onde os dados disponíveis são considerados realizações de processos aleatórios. Como os outros métodos estocásticos e por oposição aos métodos determinísticos, estes métodos permitem não só obter estimações de valores desconhecidos como também permitem julgar as precisões das estimativas obtidas, através da variância de estimação, o que não acontece com os métodos determinísticos.

Como conclusões principais deste estudo temos de referir que a estrutura dos processos envolvidos, caracterizada pelo modelo de continuidade espacial, o número e a localização relativa das estações de amostragem onde são observados os valores de precipitação, bem como a localização do lugar ou região de estimação, relativamente aos locais de amostragem, podem influenciar a qualidade da estimação.

Os pesos que intervêm na expressão do estimador, assim como a variância de estimação, são função do número e da localização das estações de amostragem mas, por outro lado, uma vez estabelecido o modelo de continuidade espacial, são independentes dos valores registados. Este facto põe em evidência o enorme interesse, a nível de políticas ambientais, em conseguirem-se redes de monitorização com qualidade, escolhendo de forma “ótima” as localizações das estações de amostragem para a recolha dos valores de interesse (no nosso caso dos valores de precipitação). Seria importante reorganizar a rede de monitorização de precipitação nesta bacia, nomeadamente, a criação de novas estações de amostragem na zona mais a jusante da bacia e a deslocação de estações já existentes (na zona mais a montante, perto da nascente do rio Ave, há uma enorme densidade de postos) para sítios pouco distantes dos actuais.

Dado um modelo de continuidade espacial, a localização das estações de amostragem Meteorológicas pode ser planeada por forma a que a estimação da precipitação verifique algumas propriedades óptimas, como por exemplo, minimizar o valor da variância de estimação da região em estudo.

Quanto à localização do ponto (ou da área) de estimação, na região em estudo, verificou-se que a precisão da estimação decresce à medida que o ponto (ou a área) de estimação se afasta da região abarcada pelo conjunto existente de estações de amostragem Meteorológicas.

Utilizar este tipo de metodologias como métodos de “extrapolação”, tem as suas limitações. A “extrapolação” será “melhor” ou mais “precisa” dependendo do maior ou menor grau de continuidade espacial da variável em estudo, da quantidade de informação disponível e da qualidade da informação.

Os resultados finais têm de ser coerentes com o que se conhece do fenómeno em estudo, a precipitação, e com o que se conhece da região onde esse fenómeno está a ser observado (no nosso caso, a região da bacia hidrográfica do Ave). Isso aconteceu no nosso trabalho, em particular, pelo facto dos valores observados da precipitação, ao longo dos anos, terem sido separados pelos doze meses do ano (teve-se em consideração a sazonalidade da precipitação), fazendo com que a correlação temporal dos dados se tornasse fraca e, assim, podermos considerar que os valores observados ao longo do tempo são réplicas aproximadas do mesmo processo aleatório.

Para cada mês do ano foi efectuada e analisada a continuidade espacial da precipitação, tendo em conta a componente temporal (os vários meses observados entre 1931 e 2008) e foram obtidos

modelos estocásticos espaço-temporais de estimação da precipitação numa região geográfica, a bacia hidrográfica do rio Ave, que podem ser considerados muito satisfatórios.

Estes modelos são, como já foi referido no trabalho, também indispensáveis para outros estudos, como para o cálculo de balanços hídricos e para a estimação indirecta de caudais nos cursos de água, no contexto do estudo de uma bacia hidrográfica.

Em termos de desenvolvimentos futuros, perspectiva-se igualmente a aplicação da metodologia adoptada para intervalos de precipitação distintos dos analisados (precipitações por dia, hora...). Por outro lado, seria muito importante a integração nos modelos desenvolvidos a informação de radar, como informação auxiliar na estimação espaço-temporal da precipitação, nomeadamente, utilizando a extensão do *Kriging* ao *Cokriging*. Acreditamos que mais informação pode ser utilizada para melhor descrever a distribuição espaço-temporal da precipitação e melhorar a sua estimação, pois as observações do radar permitem a descrição mais precisa do comportamento da precipitação (tanto no espaço como no tempo).

Todo o trabalho teve subjacente uma filosofia de utilidade operacional, em que se desenvolveram métodos simples, creíveis, fáceis de aplicar do ponto de vista matemático e que não são limitativos em termos de aplicação e utilização práticas.

Bibliografia

- [1] Alpuim, T. (2000). *Area Precipitation Measurement*. Pré-publicações de Matemática, Universidade de Lisboa, MAT-UL, Lisboa.
- [2] Andrienko, N., Andrienko, G. (2005). *Exploratory Analysis of Spatial and Temporal Data: A Systematic Approach*. Springer (1st Edition).
- [3] Armstrong, M. (1989). *Geoestatistics*. Vol.1 e 2, Kluwer Academic Publishers.
- [4] Baafi, E. (1997). *Geostatistics Wollongong '96*. Vol. 1 e 2, Kluwer Academic Publishers.
- [5] Baddeley, A., Turner, R. (2005). Spatstat: an R package for analysing spatial point patterns. *Journal of Statistical Software*, 12:1-42.
- [6] Barnett, V. (2004). *Environmental Statistics - Methods and Applications*. John Wiley & Sons, Ltd.UK.
- [7] Bivand, R.S., Pebesma, E.J., Gómez-Rubio, V. (2008). *Applied Spatial Data Analysis with R*. Springer.
- [8] Carvalho, M.L., Natário, I.C. (2008). *Análise de Dados Espaciais*. Sociedade Portuguesa de Estatística, Vila Real.
- [9] Clark, I. (1982). *Practical Geoestatistics*. Applied Science Publishers, Ltd., London.
- [10] Cressie, N. (1985). Fitting Variogram Models by Weighted Least Squares. *Mathematical Geology*, 17, 563-586.
- [11] Cressie, N. (1988). The Many Faces of Spatial Prediction. *Geoestatistics*. Ed. M. Armstrong. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1, 163-176.

- [12] Cressie, N.A.C. (1993). *Statistics for Spatial Data*. 2nd edition. Wiley, New York.
- [13] Daly, C., Neilson, R.P., Phillips, D.L. (1994). A Statistical – Topographic Model for Mapping Climatological Precipitation Over Mountainous Terrain. *Journal of Applied Meteorology*, 33, 140-149.
- [14] Davis, B. (1997). Uses and Abuses of Cross-Validation in Geostatistics. *Mathematical Geology*, Vol.19, n° 3, pp. 249-258.
- [15] DGRAH, MPAT, SEARN (1986). *Monografias Hidrológicas dos Principais Cursos de Água de Portugal Continental*. Divisão de Hidrometria, Lisboa.
- [16] Diggle, P.J., Tawn, J.A., Moyeed, R.A. (1998). Model-based Geostatistics. *Applied Statistics*, 47, Part 3, 299-350.
- [17] Diggle, P.J., Ribeiro Jr., P.J. (2007). *Model-Based Geostatistics*. Springer, New York.
- [18] DRA (Direcção Regional do Ambiente – Norte e Centro), INAG (Instituto da Água). (1998). *Plano de Bacia Hidrográfica do Rio Ave*. Projecto co-financiado pela Comunidade Europeia - Fundo de Coesão.
- [19] DRAN (Direcção Regional do Ambiente - Norte), INAG (Instituto da Água). (1999). *Plano de Bacia Hidrográfica do Rio Ave*. Projecto co-financiado pela Comunidade Europeia - Fundo de Coesão, Porto.
- [20] Gandim, L.S. (1963). Objective analysis of meteorological field. Technical report, Hidrometeorologicheskoe Izdate'setvo.
- [21] Guarascio, M., David, M., Huijbregts, C. (1976). Advanced Geostatistics in the Mining Industry. Nato ASI Series C. *Mathematical and Physical Sciences*, Vol.24, Dordrecht, Reidel Pub.
- [22] Goovaerts, P. (1997). *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Oxford University Press, New York, 483 pp.
- [23] Hevesi, J.A., Flint, A.L., Istok, J.D. (1992). Precipitation Estimation in Mountainous Terrain Using Multivariate Geostatistics. Part II: Isohyetal Maps. *Journal of Applied Meteorology*, 31, 677-688.
- [24] Hevesi, J.A., Istok, J.D., Flint, A.L. (1992). Precipitation Estimation in Mountainous Terrain Using Multivariate Geostatistics. Part I: Structural Analysis. *Journal of Applied Meteorology*, 31, 661-676.
- [25] Isaaks, E.H., Srivastava, R.M. (1989). *An Introduction to Applied Geostatistics*. Oxford University Press, New York, 561 pp.
- [26] Journel, A.G., Huijbregts, C.J. (1978). *Mining Geostatistics*. Academic Press, New York.
- [27] Krige, D. (1951). A Statistical Approach to Some Mine Valuation and Allied Problems on the Witwatersrand. *J. Chem. Metall. Min. Soc. S. Afr.*, 52 (6), pp. 119-139.

- [28] Kyriakidis, P.C. Journel, A.G. (1999). Geostatistical space-time models: a review. *Mathematical Geology*, 31, N° 6, 651-684.
- [29] Matheron, G. (1963). Principles of geostatistics. *Economic Geology*, 58 (8): 1246-1266.
- [30] Matheron, G. (1971). *The theory of regionalized variables and its applications*. Paris, Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique de Fontainebleu.
- [31] Mitas, L., Mitasova, H. (1999). Spatial Interpolation. *Geographical Information Systems – Principles and Technical Issues*. Ed.P.A. Longley et al. John Willey & Sons, New York, 2, 481- 492.
- [32] Nicolau, M.R. (2002). Modelação e Mapeamento da Distribuição Espacial de Precipitação - Uma Aplicação a Portugal Continental. Tese de Doutoramento. Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.
- [33] Pereira, H.G. (1981). *Análise Estrutural e seus Reflexos na Avaliação Económica de Recursos Minerais*. Tese de Doutoramento, IST.
- [34] PGRH/N (Projecto de Gestão Integrada dos Recursos Hídricos do Norte) e NATO PO-RIVERS (Science for Stability Programme). (1994). *Caracterização e Directrizes de Planeamento dos Recursos Hídricos do Norte - A Bacia Hidrográfica do Rio Ave*. Ministério do Ambiente e Recursos Naturais, Direcção Regional do Ambiente e Recursos Naturais, Instituto da Água, Porto, 1-5;1-13.
- [35] Severino, J.E. (2002). *Space-Time Linear Prediction - An Application to Area Rainfall Measurement*. Tese de Doutoramento. FCUL, Lisboa.
- [36] Soares, A. (1993). *Geoestatistics TROIA '92*. Vol. 1 e 2, Kluwer Academic Publishers.
- [37] Soares, A. (2000). *Geoestatística para as Ciências da Terra e do Ambiente*. IST Press.
- [38] Stein, M.L. (1986). A simple model for spatial-temporal processes. *Water Resources*, Volume 22, N° 13, 2107-2110.
- [39] Stein, M.L. (1999). *Interpolation of Spatial Data - Some Theory for Kriging*. Springer, New York.
- [40] Wackernagel, H. (1998). *Multivariate Geoestatistics – An Introduction and Applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [41] Yaglom, A.M. (1962). *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*. Prentice-Hall, Englewood, New York.
- [42] Verly, G., David, M., Journel, A.G., Marechal, A. (1984). *Geoestatísticas for Natural Resources Characterization*. D. Reidel Publishing, Dordrecht, Holland.

Anexo I

Tabela I: Estatísticas descritivas da precipitação das 9 estações de amostragem nos 12 meses do ano

| | | Same | Vila | Plan | Font | Guil | Bran | VChão | Gont | VTod |
|-----------|-----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Janeiro | Média | 257,1 | 190,1 | 231,5 | 196,6 | 348,7 | 288,2 | 233,9 | 258,1 | 221,8 |
| | Desvio Padrão | 193,7 | 145,0 | 167,4 | 151,7 | 292,8 | 217,5 | 192,6 | 208,1 | 148,5 |
| | Coefficiente Variação | 0,8 | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,7 |
| | Amplitude | 863,2-0,0 | 474,1-4,4 | 643,3-3,1 | 492,5-6,5 | 1467,8-10,9 | 917,4-2,0 | 679,7-0,0 | 794,5-13,3 | 586,8-0,0 |
| | Dispersão Quartal | 363,1-96,9 | 281,7-79,4 | 344,1-109,3 | 295,3-77,3 | 484,4-114,3 | 387,9-119,0 | 395,3-68,9 | 374,6-69,9 | 318,8-107,2 |
| Fevereiro | Média | 205,2 | 140,0 | 173,5 | 160,3 | 312,9 | 235,7 | 176,9 | 200,6 | 180,4 |
| | Desvio Padrão | 181,1 | 90,7 | 114,6 | 106,3 | 278,4 | 210,1 | 125,7 | 139,4 | 145,9 |
| | Coefficiente Variação | 0,9 | 0,6 | 0,7 | 0,7 | 0,9 | 0,9 | 0,7 | 0,7 | 0,8 |
| | Amplitude | 698,6-3,1 | 344,4-1,1 | 383,2-0,2 | 384,1-9,2 | 1061,4-3,0 | 848,8-2,5 | 496,8-4,7 | 525,3-5,0 | 569,2-6,4 |
| | Dispersão Quartal | 274,8-57,8 | 205,4-61,5 | 254,8-75,2 | 249,0-65,5 | 485,2-100,5 | 344,2-61,0 | 252,2-72,2 | 305,7-98,6 | 282,6-56,6 |
| Março | Média | 191,9 | 116,6 | 141,9 | 98,7 | 247,2 | 219,7 | 142,3 | 177,9 | 166,4 |
| | Desvio Padrão | 162,1 | 172,8 | 218,4 | 105,3 | 217,6 | 186,2 | 208,1 | 226,3 | 133,1 |
| | Coefficiente Variação | 0,8 | 1,5 | 1,5 | 1,1 | 0,9 | 0,8 | 1,5 | 1,3 | 0,8 |
| | Amplitude | 878,2-0,0 | 854,2-0,0 | 1053,1-0,0 | 430,4-0,0 | 904,5-2,0 | 783,9-0,0 | 1033,6-0,0 | 1193,6-0,0 | 755,5-0,0 |
| | Dispersão Quartal | 286,5-67,0 | 116,7-25,0 | 167,2-28,8 | 123,5-31,0 | 325,5-87,7 | 358,9-70,6 | 151,7-28,1 | 173,9-46,1 | 252,2-70,2 |
| Abril | Média | 146,0 | 143,9 | 168,2 | 155,1 | 176,1 | 151,3 | 172,3 | 190,3 | 127,0 |
| | Desvio Padrão | 99,9 | 100,2 | 136,9 | 117,1 | 136,5 | 109,4 | 129,3 | 148,2 | 86,5 |
| | Coefficiente Variação | 0,7 | 0,7 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,8 | 0,7 |
| | Amplitude | 454,0-16,0 | 428,7-28,9 | 578,2-41,8 | 536,2-23,1 | 612,0-8,0 | 507,6-2,4 | 540,0-14,7 | 579,9-38,0 | 438,9-7,0 |
| | Dispersão Quartal | 215,4-66,2 | 170,3-76,5 | 208,1-80,2 | 204,9-75,7 | 232,9-70,1 | 211,7-68,0 | 231,5-93,9 | 213,5-102,9 | 170,1-60,5 |
| Maio | Média | 134,1 | 122,1 | 144,9 | 129,3 | 162,0 | 138,4 | 128,4 | 156,8 | 113,9 |
| | Desvio Padrão | 86,2-0,6 | 84,3-0,7 | 90,14 | 88,56 | 108,58 | 86,56 | 91,52 | 99,82 | 79,59 |
| | Coefficiente Variação | 0,6 | 0,7 | 0,6 | 0,7 | 0,7 | 0,6 | 0,7 | 0,6 | 0,7 |
| | Amplitude | 405,5-2,5 | 345,6-1,5 | 380,0-13,9 | 305,6-14,9 | 513,4-2,4 | 345,9-0,4 | 336,3-8,0 | 427,5-6,3 | 418,9-1,9 |
| | Dispersão Quartal | 181,4-72,8 | 173,2-56,9 | 188,0-73,5 | 183,6-52,9 | 219,4-82,5 | 191,2-79,2 | 176,7-61,6 | 211,4-91,7 | 154,4-55,1 |
| Junho | Média | 71,5 | 49,4 | 55,7 | 60,1 | 79,7 | 71,2 | 63,8 | 74,7 | 57,2 |
| | Desvio Padrão | 69,7 | 36,1 | 56,9 | 61,9 | 67,3 | 60,7 | 54,5 | 52,3 | 53,2 |
| | Coefficiente Variação | 1,0 | 0,7 | 1,0 | 1,0 | 0,8 | 0,9 | 0,9 | 0,7 | 0,9 |
| | Amplitude | 443,7-0,0 | 139,3-0,9 | 224,1-0,0 | 246,2-0,0 | 356,3-0,0 | 304,4-0,0 | 237,2-0,0 | 182,9-4,5 | 325-0,0 |
| | Dispersão Quartal | 96,0-27,4 | 62,0-25,2 | 75,8-13,9 | 81,1-10,0 | 109,7-25,9 | 105,6-28,8 | 89,7-25,6 | 85,8-36,1 | 78,5-20,9 |
| Julho | Média | 28,8 | 22,8 | 19,1 | 27,7 | 33,9 | 32,5 | 37,9 | 40,8 | 23,6 |
| | Desvio Padrão | 28,9 | 23,1 | 21,4 | 32,3 | 41,1 | 41,6 | 34,7 | 32,6 | 25,3 |
| | Coefficiente Variação | 1,0 | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,2 | 1,3 | 0,9 | 0,8 | 1,1 |
| | Amplitude | 124,0-0,0 | 89,0-0,0 | 85,6-0,0 | 129,5-0,0 | 233,7-0,0 | 198,0-0,0 | 125,7-0,0 | 122,9-0,0 | 110,5-0,0 |
| | Dispersão Quartal | 46,0-5,9 | 36,1-3,9 | 28,8-0,1 | 46,8-6,7 | 46,1-5,9 | 45,1-4,4 | 55,7-8,1 | 63,1-16,3 | 35,5-3,2 |
| Agosto | Média | 33,6 | 30,0 | 28,0 | 39,7 | 39,3 | 37,4 | 42,2 | 48,8 | 29,5 |
| | Desvio Padrão | 29,2 | 29,8 | 27,9 | 34,1 | 39,5 | 37,4 | 46,2 | 41,1 | 27,7 |
| | Coefficiente Variação | 0,9 | 1,0 | 1,0 | 0,9 | 1,0 | 1,0 | 1,1 | 0,8 | 0,9 |
| | Amplitude | 129,2-0,0 | 114,1-0,0 | 104,7-0,3 | 116,7-0,0 | 157,7-0,0 | 156,2-0,0 | 147,0-0,0 | 144,3-0,0 | 124,6-0,0 |
| | Dispersão Quartal | 51,3-7,4 | 44,8-7,2 | 36,3-9,9 | 65,5-12,4 | 61,0-10,0 | 65,15-7,3 | 58,7-6,2 | 82,8-19,7 | 48,5-7,5 |
| Setembro | Média | 87,3 | 83,4 | 84,4 | 91,2 | 98,1 | 96,7 | 101,6 | 118,0 | 80,8 |
| | Desvio Padrão | 72,0 | 77,7 | 72,4 | 87,0 | 82,0 | 79,4 | 97,0 | 98,5 | 72,1 |
| | Coefficiente Variação | 0,8 | 0,9 | 0,9 | 1,0 | 0,8 | 0,8 | 1,0 | 0,8 | 0,9 |
| | Amplitude | 352,0-0,0 | 296,0-0,4 | 262,4-0,0 | 327,4-0,0 | 287,6-0,0 | 359,0-0,4 | 383,7-3,0 | 407,7-3,0 | 338,4-0,4 |
| | Dispersão Quartal | 125,6-32,9 | 141,2-27,8 | 146,2-31,2 | 140,8-21,3 | 142,6-36,1 | 129,7-42,9 | 168,2-29,2 | 187,6-43,9 | 115,8-31,4 |
| Outubro | Média | 173,4 | 189,2 | 194,6 | 203,5 | 225,7 | 189,9 | 223,2 | 249,6 | 152,0 |
| | Desvio Padrão | 124,8 | 106,4 | 136,2 | 158,0 | 185,8 | 138,4 | 143,7 | 135,6 | 110,4 |
| | Coefficiente Variação | 0,7 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,7 |
| | Amplitude | 489,6-0,1 | 459,7-28,2 | 506,8-12,5 | 667,8-13,0 | 1008,7-0,0 | 610,8-1,7 | 534,5-41,0 | 548,8-0,5 | 492,2-4,8 |
| | Dispersão Quartal | 261,1-79,1 | 257,1-121,8 | 302,2-111,8 | 269,3-118,0 | 300,3-106,1 | 254,6-8,7 | 328,1-122,0 | 372,9-142,7 | 185,2-80,9 |
| Novembro | Média | 209,8 | 207,5 | 211,3 | 203,7 | 276,7 | 236,4 | 233,2 | 263,9 | 194,9 |
| | Desvio Padrão | 140,0 | 147,6 | 159,9 | 142,9 | 222,4 | 168,3 | 173,1 | 209,1 | 130,3 |
| | Coefficiente Variação | 0,7 | 0,7 | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,7 | 0,7 | 0,8 | 0,7 |
| | Amplitude | 603,0-0,0 | 530,7-0,0 | 546,4-0,0 | 548,8-0,0 | 1105,3-0,0 | 872,6-0,0 | 636,4-0,0 | 744,0-0,0 | 548,3-0,0 |
| | Dispersão Quartal | 286,4-109,2 | 281,1-98,4 | 353,8-87,4 | 322,0-94,0 | 354,2-130,9 | 336,7-109,9 | 351,0-86,5 | 401,2-97,3 | 261,6-88,7 |
| Dezembro | Média | 249,5 | 235,2 | 271,8 | 229,4 | 368,8 | 287,7 | 264,1 | 315,5 | 229,7 |
| | Desvio Padrão | 193,9 | 163,3 | 225,9 | 160,1 | 346,9 | 222,4 | 183,9 | 230,4 | 160,9 |
| | Coefficiente Variação | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,7 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,7 | 0,7 |
| | Amplitude | 1100,8-2,1 | 656,2-31,1 | 906,6-0,5 | 645,5-4,6 | 1763,9-10,0 | 1068,3-7,0 | 814,6-21,8 | 1023,0-18,5 | 833,1-8,3 |
| | Dispersão Quartal | 341,6-108,1 | 281,2-128,3 | 344,6-111,6 | 301,4-114,5 | 473,6-137,2 | 398,1-136,3 | 383,0-143,5 | 434,8-165,3 | 297,2-110,1 |

Tabela II: Estatísticas descritivas da precipitação das 10 estações de amostragem nos 12 meses do ano

| | | Para | Cast | Taip | Escu | Lord | Fafe | Arad | MRei | Lour | VChã |
|-----------|------------------------------|-------------|-------------|-------------|------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|------------|
| Janeiro | Média | 146,2 | 139,3 | 182,7 | 193,6 | 124,7 | 233,9 | 196,2 | 199,6 | 175,1 | 104,5 |
| | Desvio Padrão | 122,8 | 99,2 | 135,9 | 148,5 | 99,6 | 165,5 | 135,2 | 150,0 | 146,0 | 80,2 |
| | Coefficiente Variação | 0,8 | 0,7 | 0,7 | 0,8 | 0,8 | 0,7 | 0,7 | 0,8 | 0,8 | 0,8 |
| | Amplitude | 504,0-1,9 | 344,8-0,0 | 531,2-5,4 | 601,2-5,9 | 412,7-4,2 | 727,4-0,0 | 590,2-0,0 | 525-14,5 | 524,4-0,0 | 326,8-2,0 |
| | Dispersão Quartal | 190,3-52,8 | 201,25-37,2 | 234,25-71,2 | 282,4-79,2 | 168,4-42,5 | 332,9-111,1 | 271,8-96,0 | 287,6-65,7 | 265,0-54,3 | 152,7-35,6 |
| Fevereiro | Média | 107,5 | 115,4 | 137,9 | 144,7 | 100,5 | 193,1 | 164,2 | 163,1 | 137,4 | 78,5 |
| | Desvio Padrão | 69,1 | 77,6 | 91,9 | 96,5 | 76,1 | 163,8 | 139,2 | 103,4 | 85,7 | 54,7 |
| | Coefficiente Variação | 0,6 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,6 | 0,6 | 0,7 |
| | Amplitude | 228,9-10,0 | 297,5-12,0 | 363,6-6,8 | 330,2-10,9 | 249,8-9,1 | 604,1-1,2 | 554,8-8,9 | 390,9-6,4 | 324,120,4 | 211,4-10,8 |
| | Dispersão Quartal | 175,5-52,6 | 169,6-53,8 | 207,3-51,8 | 226,7-45,9 | 158,6-32,0 | 273,2-58,2 | 249,7-41,4 | 240,3-57,9 | 200,2-56,3 | 110,7-29,3 |
| Março | Média | 125,4 | 95,2 | 116,6 | 116,2 | 70,0 | 185,7 | 146,2 | 111,5 | 87,9 | 71,1 |
| | Desvio Padrão | 155,8 | 88,9 | 171,2 | 154,9 | 64,2 | 150,2 | 126,5 | 83,9 | 70,4 | 69,4 |
| | Coefficiente Variação | 1,2 | 0,9 | 1,5 | 1,3 | 0,9 | 0,8 | 0,9 | 0,8 | 0,8 | 1,0 |
| | Amplitude | 734,1-0,0 | 425,0-0,0 | 894,5-0,0 | 785,6-0,0 | 255,3-0,0 | 777,6-0,0 | 717,7-0,0 | 317,9-1,0 | 285,0-0,0 | 295,5-0,0 |
| | Dispersão Quartal | 146,4-41,6 | 134,1-39,2 | 110,2-34,5 | 125,5-34,9 | 90,7-18,3 | 275,9-73,3 | 204,1-49,6 | 127,5-36,3 | 104,5-41,4 | 97,3-28,3 |
| Abril | Média | 113,8 | 121,1 | 140,5 | 142,9 | 107,6 | 137,4 | 112,0 | 139,4 | 135,2 | 80,5 |
| | Desvio Padrão | 96,5 | 95,5 | 118,1 | 114,1 | 82,8 | 94,0 | 75,3 | 105,8 | 95,1 | 64,7 |
| | Coefficiente Variação | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,7 | 0,7 | 0,8 | 0,7 | 0,8 |
| | Amplitude | 355,5-32,0 | 369,0-19,0 | 468,5-20,1 | 468,5-0,7 | 363,8-6,9 | 425,3-22,7 | 357,5-16,4 | 417,5-14,7 | 379,5-2,2 | 220,9-11,3 |
| | Dispersão Quartal | 144,0-48,1 | 134,7-56,9 | 168,7-55,8 | 175,7-69,9 | 168,2-39,3 | 190,2-59,7 | 154,8-58,6 | 189,4-66,4 | 183,8-70,0 | 122,4-37,0 |
| Maio | Média | 97,3 | 100,2 | 101,9 | 115,5 | 80,3 | 121,9 | 105,9 | 124,2 | 115,1 | 72,3 |
| | Desvio Padrão | 66,74 | 72,76 | 73,23 | 87,23 | 68,74 | 76,47 | 73,10 | 80,91 | 84,59 | 66,49 |
| | Coefficiente Variação | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,6 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,9 |
| | Amplitude | 287,4-0,0 | 237,7-0,0 | 290,7-0,6 | 335,1-0,9 | 240,3-0,3 | 326,2-2,0 | 284,6-0,0 | 344,3-17,4 | 328,0-5,0 | 266,2-0,0 |
| | Dispersão Quartal | 133,0-59,9 | 151,5-51,0 | 142,4-48,7 | 142,5-54,8 | 114,2-22,4 | 169,4-62,7 | 142,7-51,0 | 157,9-72,1 | 165,6-48,2 | 102,8-28,9 |
| Junho | Média | 50,3 | 41,9 | 41,9 | 46,3 | 34,6 | 67,8 | 56,8 | 63,5 | 52,3 | 25,4 |
| | Desvio Padrão | 44,4 | 38,9 | 39,6 | 42,9 | 33,5 | 69,6 | 52,8 | 44,9 | 54,4 | 22,0 |
| | Coefficiente Variação | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 1,0 | 1,0 | 0,9 | 0,7 | 1,0 | 0,9 |
| | Amplitude | 194,5-0,0 | 161-2,0 | 158,4-3,2 | 173,7-5,6 | 151,7-1,0 | 400,0-0,0 | 314,3-0,0 | 200,5-4,0 | 264,0-0,4 | 82,40,0 |
| | Dispersão Quartal | 65,8-17,1 | 55,5-15,0 | 56,9-14,3 | 69,7-10,2 | 55,1-10,6 | 87,7-22,3 | 82,1-16,3 | 80,4-31,9 | 70,1-21,5 | 37,8-7,1 |
| Julho | Média | 30,1 | 20,5 | 24,2 | 21,8 | 12,2 | 25,6 | 19,2 | 28,0 | 18,4 | 13,2 |
| | Desvio Padrão | 39,6 | 20,1 | 22,7 | 22,2 | 12,9 | 25,8 | 24,0 | 22,6 | 23,6 | 25,1 |
| | Coefficiente Variação | 1,3 | 1,0 | 0,9 | 1,0 | 1,1 | 1,0 | 1,2 | 0,8 | 1,3 | 1,9 |
| | Amplitude | 203,8-0,0 | 79,0-0,0 | 102,8-0,0 | 102,8-0,0 | 46,9-0,0 | 105,8-0,0 | 105,8-0,0 | 78,0-0,0 | 94,1-0,0 | 125,4-0,0 |
| | Dispersão Quartal | 45,2-4,3 | 35,9-4,8 | 32,6-5,8 | 34,6-3,7 | 18,0-2,3 | 37,2-3,9 | 28,0-1,7 | 47,5-8,7 | 25,9-1,6 | 13,9-2,3 |
| Agosto | Média | 33,0 | 27,0 | 35,3 | 27,1 | 26,0 | 31,2 | 23,3 | 41,3 | 36,2 | 21,9 |
| | Desvio Padrão | 33,0 | 29,3 | 32,6 | 26,8 | 35,8 | 30,7 | 22,7 | 39,4 | 36,4 | 29,6 |
| | Coefficiente Variação | 1,0 | 1,1 | 0,9 | 1,0 | 1,4 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,4 |
| | Amplitude | 136,2-0,0 | 107,0-0,0 | 109,1-0,0 | 93,8-0,0 | 141,9-0,0 | 128,3-0,0 | 110,6-0,0 | 174,2-0,0 | 149,1-0,0 | 108,1-0,0 |
| | Dispersão Quartal | 49,8-8,7 | 33,0-6,5 | 60,4-10,8 | 43,1-6,4 | 33,6-4,0 | 52,0-7,8 | 34,7-4,6 | 62,4-15,1 | 56,3-13,7 | 35,4-4,3 |
| Setembro | Média | 79,1 | 61,8 | 88,4 | 80,4 | 55,3 | 82,7 | 72,6 | 102,4 | 79,9 | 47,2 |
| | Desvio Padrão | 71,6 | 59,5 | 78,2 | 69,3 | 51,2 | 63,2 | 57,6 | 95,9 | 74,1 | 44,1 |
| | Coefficiente Variação | 0,9 | 1,0 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,8 | 0,8 | 0,9 | 0,9 | 0,9 |
| | Amplitude | 271,8-0,0 | 240,0-0,0 | 320,4-0,0 | 225,3-0,0 | 192,6-0,7 | 262,0-1,1 | 211,6-0,0 | 378,0-1,1 | 252,0-0,0 | 173,2-0,0 |
| | Dispersão Quartal | 110,3-27,4 | 100,6-25,5 | 138,4-32,3 | 127,2-29,9 | 93,3-12,8 | 118,85-35,5 | 101,5-30,9 | 169,8-36,2 | 131,6-2,7 | 70,9-17,8 |
| Outubro | Média | 152,6 | 129,9 | 190,5 | 172,2 | 138,5 | 157,3 | 146,9 | 208,7 | 165,6 | 112,6 |
| | Desvio Padrão | 97,8 | 93,0 | 121,3 | 131,2 | 104,6 | 109,0 | 101,2 | 126,5 | 119,9 | 80,0 |
| | Coefficiente Variação | 0,6 | 0,7 | 0,6 | 0,8 | 0,8 | 0,7 | 0,7 | 0,6 | 0,7 | 0,7 |
| | Amplitude | 446,5-9,6 | 308,0-0,0 | 468,8-9,6 | 525,2-9,3 | 419,4-19,2 | 528,0-9,2 | 437,7-6,4 | 446,7-13,1 | 430,1-0,1 | 307,1-5,2 |
| | Dispersão Quartal | 224,9-73,7 | 230,1-52,3 | 287,1-109,6 | 243,5-97,2 | 196,9-55,8 | 196,1-77,6 | 186,5-74,8 | 295,4-133,1 | 244,5-96,1 | 160,9-49,3 |
| Novembro | Média | 167,8 | 161,5 | 197,5 | 201,8 | 143,6 | 194,8 | 172,7 | 206,4 | 198,6 | 140,3 |
| | Desvio Padrão | 110,9 | 131,0 | 137,8 | 154,3 | 108,9 | 120,4 | 117,4 | 155,0 | 152,9 | 110,1 |
| | Coefficiente Variação | 0,7 | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,8 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,8 | 0,8 |
| | Amplitude | 511,4-0,0 | 564,0-0,0 | 507,5-0,0 | 552,6-0,0 | 388,3-0,0 | 528,5-0,0 | 553,0-0,0 | 592,7-0,0 | 563,8-0,0 | 416,7-0,0 |
| | Dispersão Quartal | 239,9-102,6 | 232,4-69,8 | 293,1-91,6 | 313,9-84,4 | 210,5-60,2 | 269,7-110,7 | 234,7-95,7 | 297,7-87,1 | 293,9-74,5 | 193,8-53,3 |
| Dezembro | Média | 166,3 | 181,5 | 259,7 | 224,7 | 157,3 | 236,8 | 207,6 | 256,4 | 213,8 | 132,5 |
| | Desvio Padrão | 127,3 | 136,6 | 217,5 | 178,2 | 119,9 | 180,1 | 163,8 | 183,0 | 169,9 | 107,5 |
| | Coefficiente Variação | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,8 |
| | Amplitude | 530,3-3,7 | 663,7-25,0 | 994,2-10,1 | 636,3-5,8 | 544,4-1,2 | 848,5-5,0 | 750,8-2,0 | 778,8-28,0 | 629,7-0,3 | 442,4-2,3 |
| | Dispersão Quartal | 219,9-88,1 | 240,5-97,8 | 346,6-110,5 | 303,7-89,5 | 212,8-81,7 | 327,1-87,9 | 295,6-89,4 | 358,0-133,3 | 270,5-61,8 | 182,0-52,2 |