

Tópicos de Geometria

2010/2011

João Caramalho Domingues

Licenciatura em Matemática

Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

Tópicos de Geometria – 2010/2011

Parte I Cônicas e quádricas

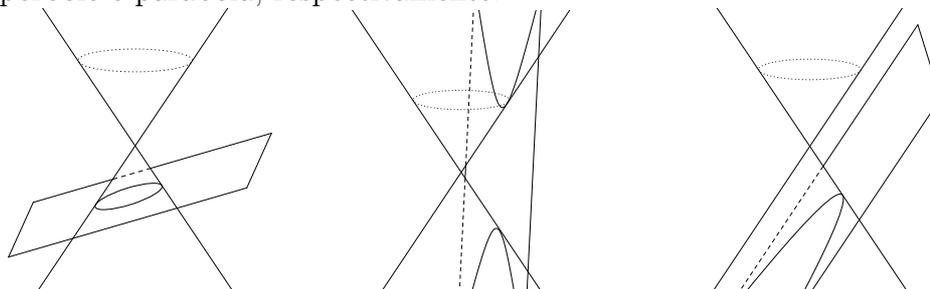
1 Cônicas

1.1 Secções cónicas

Uma (*secção*) *cónica* é a intersecção de um cone circular recto¹ com um plano.

Uma secção cónica é *degenerada* se incluir o vértice do cone; e *não-degenerada* caso contrário.

A figura seguinte ilustra os três tipos de cónica não-degenerada: elipse, hipérbole e parábola, respectivamente.



Há também três tipos de cónica degenerada: um ponto, duas rectas concorrentes, uma recta.

Nas secções 1.3–1.6 caracterizaremos os três tipos de cónicas não-degeneradas como figuras do plano, utilizando propriedades das distâncias dos seus pontos aos focos e directrizes e obtendo equações na forma canónica; na secção 1.7 veremos que quase toda a equação de segundo grau corresponde a uma cónica, e como reconhecer esta dada aquela; finalmente, na secção

¹Um cone é a superfície formada pelas rectas que incidem num ponto fixo (o *vértice*) e passam por uma curva (a *base*) não complanar com o vértice; um cone circular é um cone cuja base é uma circunferência; um cone circular recto é um cone circular cujo vértice pertence à recta que passa pelo centro da circunferência base e é perpendicular ao plano desta (essa recta é o *eixo* do cone).

1.8 veremos que de facto toda a secção plana de um cone é uma cónica, degenerada ou não-degenerada, no sentido das secções 1.3–1.6.

1.2 Circunferências

Dados um ponto C e um número $r > 0$, a *circunferência* de *centro* C e *raio* r é o conjunto dos pontos cuja distância a C é r .

Em \mathbb{R}^2 , como a distância de um ponto (x, y) a um ponto (a, b) é

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

a circunferência de centro (a, b) e raio r é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\};$$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ é a *equação* dessa circunferência.

Se escolhermos um referencial cuja origem seja o centro de uma circunferência de raio r , é claro que essa circunferência terá equação

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Podemos também descrever uma circunferência através de equações paramétricas. Por exemplo (com a origem do referencial no centro da circunferência),

$$x = r \cos t; \quad y = r \sin t \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Se considerarmos a equação

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

vemos facilmente (*completando os quadrados*) que é equivalente a

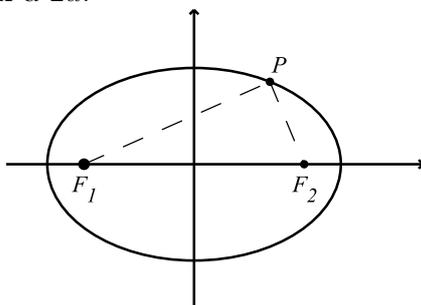
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c$$

e, portanto, que é a equação da circunferência de centro $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e raio

$$\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c} \quad (\text{desde que } \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c > 0).$$

1.3 Elipses

Dados dois pontos F_1 e F_2 , que inicialmente vamos supor distintos, e um número a , maior do que metade da distância entre F_1 e F_2 , a *elipse* de *focos* F_1, F_2 e *raio médio* a é o conjunto dos pontos P tais que a soma das distâncias de P a F_1 e F_2 é igual a $2a$.²



Consideremos um referencial ortonormado tal que F_1 tenha coordenadas $(-f, 0)$ e F_2 tenha coordenadas $(f, 0)$, com $f > 0$ (colocamos o eixo das abcissas na recta F_1F_2 e a origem no ponto médio do segmento $[F_1F_2]$, orientando os eixos de forma que F_2 tenha abcissa positiva). Repare que $f < a$ ($2f$ é a distância entre os focos). Ora, um ponto (x, y) pertencerá à elipse se e só se cumprir a condição

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$$

que é equivalente a

$$(a^2 - f^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - f^2),$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1.$$

²Repare que, se permitíssemos que a fosse menor do que a metade da distância entre F_1 e F_2 , a elipse seria vazia (devido à desigualdade triangular); e se permitíssemos que a fosse igual a metade dessa distância, a elipse se reduziria ao segmento $[F_1F_2]$.

Chamando b a $\sqrt{a^2 - f^2}$, ficamos com

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação da elipse na *forma canónica*.

A elipse na forma canónica intersecta o eixo dos x em $(-a, 0)$ e $(a, 0)$; e o eixo dos y em $(0, -b)$ e $(0, b)$; ao segmento que une os pontos $(\pm a, 0)$ chamamos *eixo maior* da elipse; e ao que une os pontos $(0, \pm b)$ chamamos *eixo menor*. A origem é o *centro* da elipse — qualquer recta que passe pelo centro intersecta a elipse em dois pontos, equidistantes do centro. Para além disto, é fácil ver que a elipse é simétrica relativamente a qualquer dos dois eixos: se (x_0, y_0) pertencer à elipse, $(-x_0, y_0)$ e $(x_0, -y_0)$ também pertencerão.

Se os dois focos da elipse coincidirem, teremos uma circunferência de raio a . Note que se colocarmos a origem das coordenadas no centro desta circunferência, esta terá equação $x^2 + y^2 = a^2$, ou seja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Podemos parametrizar uma elipse na forma canónica, por exemplo através de

$$x = a \cos t; \quad y = b \sin t \quad (t \in [0, 2\pi[),$$

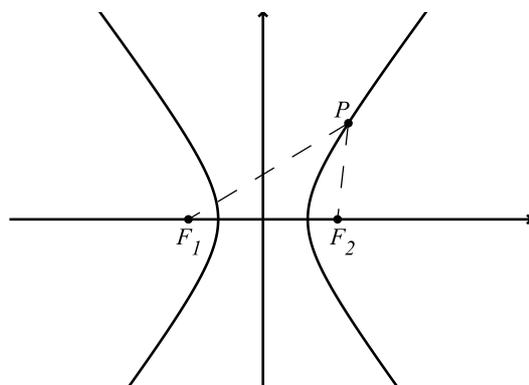
ou

$$x = a \cos t; \quad y = b \sin t \quad (t \in]-\pi, \pi]).$$

1.4 Hipérbolés

Dados dois pontos F_1 e F_2 , distintos, e um número a , menor do que metade da distância entre F_1 e F_2 , a *hipérbole de focos F_1, F_2 e raio médio a* é o conjunto dos pontos P tais que o módulo da diferença das distâncias de P a F_1 e F_2 é igual a $2a$.³

³Repare que, se permitíssemos que a fosse maior do que a metade da distância entre F_1 e F_2 , a hipérbole seria vazia (porquê?); e se permitíssemos que a fosse igual a metade dessa distância, a hipérbole seria constituída pela recta F_1F_2 menos o segmento $]F_1F_2[$.



Como acima, consideremos um referencial ortonormado tal que F_1 tenha coordenadas $(-f, 0)$ e F_2 tenha coordenadas $(f, 0)$, com $f > 0$. Repare que $f > a$ ($2f$ é a distância entre os focos). Ora, um ponto (x, y) pertencerá à hipérbole se e só se cumprir uma das condições

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} - \sqrt{(x+f)^2 + y^2} = 2a,$$

isto é, se

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

o que é equivalente a

$$(f^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(f^2 - a^2),$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{f^2 - a^2} = 1.$$

Chamando b a $\sqrt{f^2 - a^2}$, ficamos com

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação da hipérbole na *forma canónica*.

A hipérbole na forma canónica intersecta o eixo dos x em $(-a, 0)$ e $(a, 0)$; ao segmento que une os pontos $(\pm a, 0)$ chamamos *eixo maior* da hipérbole; a

hipérbole não intersecta o eixo dos y mas, por analogia com a elipse, chamamos também *eixo menor* ao segmento que une os pontos $(0, \pm b)$. A origem é o *centro* da hipérbole — qualquer recta que passe pelo centro, se intersectar a hipérbole, intersecta-a em dois pontos, equidistantes do centro. Para além disto, é fácil ver que, tal como a elipse, a hipérbole é simétrica relativamente a qualquer dos dois eixos: se (x_0, y_0) pertencer à hipérbole, $(-x_0, y_0)$ e $(x_0, -y_0)$ também pertencerão.

Podemos parametrizar uma hipérbole na forma canónica, por exemplo através de

$$x = \pm a \cosh t; \quad y = b \sinh t \quad (t \in \mathbb{R})$$

ou

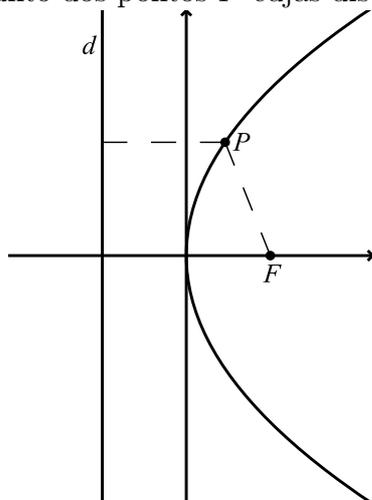
$$x = \frac{a}{\cos t}; \quad y = b \operatorname{tg} t \quad \left(t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\right).$$

O sinal \pm no primeiro destes exemplos e o facto de o domínio do parâmetro no segundo exemplo ser a reunião de dois intervalos disjuntos ilustram o facto de que a hipérbole consiste de duas curvas, a que chamamos *ramos*.

Vê-se ainda facilmente que a hipérbole tem duas assíntotas, de equações $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$.

1.5 Parábolas

Dados um ponto F e uma recta d (não incidente em F), a *parábola* de foco F e *directriz* d é o conjunto dos pontos P cujas distâncias a F e a d são iguais.



Se considerarmos um referencial ortonormado tal que F fique com coordenadas $(a, 0)$ e a directriz com equação $x = -a$ (colocamos a origem no ponto médio entre F e d , e o eixo das ordenadas paralelo a d), um ponto (x, y) pertencerá à parábola se e só se cumprir a condição

$$\sqrt{(x - a)^2 + y^2} = |x + a|,$$

que é equivalente a

$$y^2 = 4ax.$$

Esta é a equação da parábola na *forma canónica*.

Ao ponto da parábola mais próximo da directriz chamamos *vértice* da parábola; na forma canónica, corresponde à origem das coordenadas. À semi-recta com origem no vértice e que passa no foco, chamamos *eixo* da parábola; na forma canónica, corresponde a um dos semi-eixos dos x (positivo se $a > 0$ e negativo se $a < 0$). A parábola é simétrica em relação ao seu eixo: se (x_0, y_0) pertencer à parábola, $(x_0, -y_0)$ também pertencerá.

Podemos também descrever a parábola (ainda na forma canónica) através de equações paramétricas; por exemplo,

$$x = \frac{1}{4a}t^2; \quad y = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

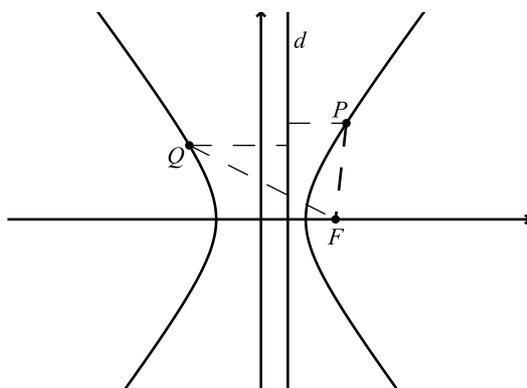
ou

$$x = at^2; \quad y = 2at \quad (t \in \mathbb{R}).$$

1.6 Caracterização das cónicas pela excentricidade

As elipses e hipérbolos podem ser caracterizadas de uma forma diferente do que vimos acima — uma forma que permite uniformizar a caracterização dos vários tipos de cónicas não-degeneradas.

Dados um ponto F , uma recta d (não incidente em F) e um número $e > 1$, a hipérbole de *foco* F , *directriz* d e *excentricidade* e é o conjunto dos pontos cuja distância a F é igual à distância a d multiplicada por e .



Se considerarmos um referencial ortonormado tal que F fique com coordenadas $(ae, 0)$ e a directriz com equação $x = \frac{a}{e}$,⁴ um ponto (x, y) pertencerá à hipérbole se e só se cumprir a condição

$$\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = e \cdot \left| x - \frac{a}{e} \right|,$$

que é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1;$$

ora, se chamarmos f a ae , para que F tenha coordenadas $(f, 0)$ como F_2 na secção 1.4, vem $a^2(e^2 - 1) = f^2 - a^2$ e portanto, chamando b a $\sqrt{f^2 - a^2}$ como aí, ficamos com

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

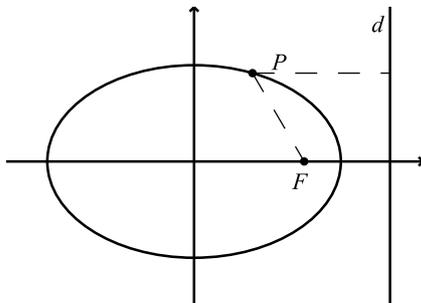
que é a equação já conhecida da hipérbole na forma canónica.

É imediato que esta é também uma equação da hipérbole de foco $F' \equiv (-ae, 0) = (-f, 0)$, directriz d' de equação $x = -\frac{a}{e}$ e excentricidade e ; o que significa que uma hipérbole tem dois focos (neste novo sentido, mas correspondentes aos antigos) e para cada foco uma directriz. É também imediato que, se tivermos uma hipérbole dada por dois focos $F_1 \equiv (-f, 0)$, $F_2 \equiv (f, 0)$ e raio médio a , a directriz correspondente a F_1 terá equação $x = -\frac{a^2}{f}$ e a correspondente a F_2 terá equação $x = \frac{a^2}{f}$.

Quanto às elipses, dados um ponto F , uma recta d (não incidente em F)

⁴Colocamos o eixo das abcissas na recta perpendicular a d incidente em F , e a origem O de modo que d fique entre O e F e que a distância de O a d seja igual à distância de F a d multiplicada por $\frac{1}{e^2 - 1}$.

e um número $e \in]0, 1[$, a elipse de *foco* F , *directriz* d e excentricidade e é o conjunto dos pontos cuja distância a F é igual à distância a d multiplicada por e .



De facto, se considerarmos um referencial ortonormado tal que F fique com coordenadas $(ae, 0)$ e a directriz com equação $x = \frac{a}{e}$,⁵ um ponto (x, y) pertencerá à elipse se e só se cumprir a condição

$$\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = e \cdot \left| x - \frac{a}{e} \right|,$$

que é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1;$$

ora, se chamarmos f a ae , para que F tenha coordenadas $(f, 0)$ como F_2 na secção 1.3, vem $a^2(1 - e^2) = a^2 - f^2$ e portanto, chamando b a $\sqrt{a^2 - f^2}$ como aí, ficamos com

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação já conhecida da elipse na forma canónica.

É imediato que esta é também uma equação da elipse de foco $F' \equiv (-ae, 0) = (-f, 0)$, directriz d' de equação $x = -\frac{a}{e}$ e excentricidade e ; o que significa que uma elipse tem dois focos (neste novo sentido, mas correspondentes aos antigos) e para cada foco uma directriz. É também imediato que, se tivermos uma hipérbole dada por dois focos $F_1 \equiv (-f, 0)$, $F_2 \equiv (f, 0)$ e raio médio a , a directriz correspondente a F_1 terá equação $x = -\frac{a^2}{f}$ e a correspondente a F_2 terá equação $x = \frac{a^2}{f}$.

⁵Colocamos o eixo das abscissas na recta perpendicular a d incidente em F , e a origem O de modo que F fique entre O e d e que a distância de O a d seja igual à distância de F a d multiplicada por $\frac{1}{1 - e^2}$.

É claro que as parábolas têm excentricidade 1.

O único inconveniente da caracterização das cónicas por foco, directriz e excentricidade é o caso da circunferência — que deixa de ser um caso particular das elipses. No entanto, convencionou-se que a circunferência tem excentricidade 0; quanto à directriz, não existe (embora se diga, por vezes, que está “no infinito”).

1.7 Reconhecimento de cónicas

Já foi visto que qualquer cónica não-degenerada pode ser representada por uma equação do segundo grau.

Também as cónicas degeneradas podem ser representadas por equações do segundo grau. De facto, se o plano da cónica passa pelo vértice do cone, pode intersectá-lo

1. apenas no vértice, caso em que podemos colocar a origem das coordenadas no vértice e tomar a equação $x^2 + y^2 = 0$;
2. ao longo de uma das rectas que formam o cone (o plano é tangente ao cone), que podemos representar (em coordenadas adequadas) pela equação $y^2 - 2axy + a^2x^2 = 0$ (equivalente a $y = ax$); ou
3. ao longo de duas das rectas que formam o cone (e que se intersectam no vértice), que podemos representar (em coordenadas adequadas) por uma equação da forma $y^2 - a^2x^2 = 0$ (que é equivalente a $y = \pm ax$).

Reciprocamente, veremos que *quase* todas as equações do segundo grau representam cónicas. Consideremos uma equação qualquer do segundo grau em x e y , ou seja, uma equação da forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + fx + gy + h = 0, \quad (1)$$

onde a, b, c, f, g, h são números reais e pelo menos um dos a, b, c é diferente de 0. Esta equação pode representar o conjunto vazio (por exemplo, $x^2 + y^2 + 1 = 0$) ou duas rectas paralelas (por exemplo, $x^2 - 1 = 0$); se não representar o

conjunto vazio nem duas rectas paralelas, representa necessariamente uma secção cónica.

Vamos escrever (1) em forma matricial: sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

então (1) é equivalente a

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + F^T \mathbf{x} + h = 0.$$

Como A é uma matriz real simétrica, existe uma matriz P ortogonal tal que $P^T A P$ é diagonal. Vamos determinar P : sejam λ e μ os valores próprios de A e (u_1, v_1) e (u_2, v_2) vectores próprios unitários associados a λ e μ ; então

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

de maneira que, fazendo $\mathbf{x} = P \mathbf{x}'$ (isto é, $\mathbf{x}' = P^T \mathbf{x}$), temos

$$(P \mathbf{x}')^T A (P \mathbf{x}') + F^T (P \mathbf{x}') + h = 0,$$

ou seja,

$$(\mathbf{x}')^T (P^T A P) \mathbf{x}' + (F^T P) \mathbf{x}' + h = 0;$$

agora, escrevendo

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F^T P = \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix},$$

ficamos com

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + f' x' + g' y' + h = 0. \quad (2)$$

Se $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$,⁶ (2) é a equação de uma parábola, de uma recta ou de duas rectas paralelas: suponhamos que $\mu = 0$ (a outra hipótese é análoga);

⁶Por a matriz A ser não nula, não é possível $\lambda = \mu = 0$.

então, completando o quadrado, vemos que (2) é equivalente a

$$\lambda \left(x' + \frac{f'}{2\lambda} \right)^2 = \frac{f'^2}{4\lambda} - h - g'y';$$

se $g' = 0$, ficamos com

$$x' = -\frac{f'}{2\lambda} \pm \sqrt{\frac{f'^2}{4\lambda^2} - \frac{h}{\lambda}},$$

que representa o conjunto vazio, uma recta ou duas rectas paralelas, consoante, respectivamente,

$$\frac{f'^2}{4\lambda^2} - \frac{h}{\lambda} < 0, \quad \frac{f'^2}{4\lambda^2} - \frac{h}{\lambda} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{f'^2}{4\lambda^2} - \frac{h}{\lambda} > 0;$$

se $g' \neq 0$, ficamos com

$$\left(x' + \frac{f'}{2\lambda} \right)^2 = -\frac{g'}{\lambda} \left(y' + \frac{h}{g'} - \frac{f'^2}{4\lambda g'} \right);$$

se agora escrevermos $x'' = x' + \frac{f'}{2\lambda}$ e $y'' = y' + \frac{h}{g'} - \frac{f'^2}{4\lambda g'}$, esta equação transforma-se em

$$x''^2 = -\frac{g'}{\lambda} y''$$

que é a equação de uma parábola na forma canónica: o vértice é em $x'' = 0$, $y'' = 0$, ou seja

$$x' = -\frac{f'}{2\lambda}, \quad y' = -\frac{h}{g'} + \frac{f'^2}{4\lambda g'},$$

e o foco em $x'' = 0$, $y'' = -\frac{g'}{4\lambda}$, ou seja, em

$$x' = -\frac{f'}{2\lambda}, \quad y' = -\frac{g'}{4\lambda} - \frac{h}{g'} + \frac{f'^2}{4\lambda g'}.$$

Usando agora a fórmula $x = PX'$, podemos chegar às coordenadas do vértice e do foco no referencial original.

Se $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq 0$, completamos ambos os quadrados em (2), e ficamos

com

$$\lambda \left(x' + \frac{f'}{2\lambda} \right)^2 + \mu \left(y' + \frac{g'}{2\mu} \right)^2 = \frac{f'^2}{4\lambda} + \frac{g'^2}{4\mu} - h.$$

Vamos agora considerar separadamente os casos em que λ e μ têm o mesmo sinal ou sinais diferentes.

Se λ e μ tiverem sinais diferentes, ficaremos com uma hipérbole ou com um par de rectas concorrentes: se $\frac{f'^2}{4\lambda} + \frac{g'^2}{4\mu} - h = 0$, teremos

$$x' + \frac{f'}{2\lambda} = \pm \sqrt{-\frac{\mu}{\lambda}} \left(y' + \frac{g'}{2\mu} \right),$$

ou seja, duas rectas concorrentes em $x' = -\frac{f'}{2\lambda}$, $y' = -\frac{g'}{2\mu}$; se $\frac{f'^2}{4\lambda} + \frac{g'^2}{4\mu} - h \neq 0$, escrevendo $x'' = x' + \frac{f'}{2\lambda}$, $y'' = y' + \frac{g'}{2\mu}$ e $k = \frac{f'^2}{4\lambda} + \frac{g'^2}{4\mu} - h$, a equação transforma-se em

$$\frac{\lambda}{k} x''^2 + \frac{\mu}{k} y''^2 = 1;$$

agora, um dos números $\frac{\lambda}{k}$ e $\frac{\mu}{k}$ será positivo e o outro negativo; fazendo então $\alpha = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}$ e $\beta = \sqrt{-\frac{k}{\mu}}$, ou $\alpha = \sqrt{-\frac{k}{\lambda}}$ e $\beta = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$, ficamos com

$$\frac{x''^2}{\alpha^2} - \frac{y''^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y''^2}{\beta^2} - \frac{x''^2}{\alpha^2} = 1$$

(respectivamente); em qualquer dos casos, teremos a equação de uma hipérbole na forma canónica.

Se λ e μ tiverem o mesmo sinal, ficaremos com uma elipse ou com um ponto (ou com o conjunto vazio): se $\frac{f'^2}{4\lambda} + \frac{g'^2}{4\mu} - h = 0$, a equação representa apenas um ponto ($x' = -\frac{f'}{2\lambda}$, $y' = -\frac{g'}{2\mu}$); se $\frac{f'^2}{4\lambda} + \frac{g'^2}{4\mu} - h \neq 0$ e escrevendo como há pouco $x'' = x' + \frac{f'}{2\lambda}$, $y'' = y' + \frac{g'}{2\mu}$ e $k = \frac{f'^2}{4\lambda} + \frac{g'^2}{4\mu} - h$, a equação transforma-se (como há pouco) em

$$\frac{\lambda}{k} x''^2 + \frac{\mu}{k} y''^2 = 1;$$

agora, se k tiver sinal oposto a λ e μ (ou seja, se $\frac{\lambda}{k}$ e $\frac{\mu}{k}$ forem números negativos), esta equação representa o conjunto vazio; se k tiver o mesmo

sinal que λ e μ , podemos fazer $\alpha = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}$ e $\beta = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ e ficamos com

$$\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} = 1,$$

ou seja, a equação de uma elipse na forma canónica.

Fica ao cuidado do leitor determinar os centros e eixos destas elipses e hipérbolos.

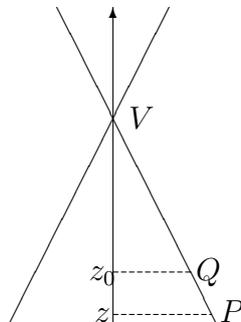
Resta apenas realçar que, como $\det(A) = \det(P^T AP) = \lambda\mu$ a equação (1) representa

1. uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio se $\det(A) > 0$;
2. uma parábola, uma recta ou duas rectas paralelas se $\det(A) = 0$; e
3. uma hipérbole ou duas rectas concorrentes se $\det(A) < 0$.

1.8 As secções planas do cone

Consideremos um cone circular recto com vértice V e tomemos um referencial tal que a origem das coordenadas fique em V e o eixo dos z seja o eixo do cone. A base do cone, sendo uma circunferência num plano perpendicular ao eixo, e portanto de equação $z = z_0$ ($z_0 \neq 0$) e estando o seu centro no eixo, terá equação $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) nesse plano.

Para obter uma equação do cone, consideremos um seu ponto $P \equiv (x, y, z)$ qualquer. Esse ponto pertencerá a uma recta que passa no vértice V e em algum ponto Q da base. Ora, Q estará evidentemente à distância r do eixo



e, portanto, a distância entre P e o eixo será $\frac{r}{|z_0|} \cdot |z|$ — o que significa que P satisfará a equação

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{r}{z_0}\right)^2 z^2,$$

que é assim a equação do cone ($\frac{r}{|z_0|}$ é a tangente do ângulo entre uma recta qualquer do cone e o eixo deste, mas o que nos interessa aqui é que é uma constante).

Consideremos agora um plano π para intersectar o cone. Tendo o cone uma equação do segundo grau no referencial escolhido acima, também terá equações do segundo grau em qualquer outro referencial (uma mudança de referencial é uma transformação afim). Tomemos um referencial em que o plano π tenha equação $z' = 0$. Sendo a equação do cone

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + fx'y' + gy'z' + hx'z' + jx' + ky' + lz' + m = 0,$$

a equação da intersecção do cone com π , considerada como figura plana, será

$$ax'^2 + by'^2 + fx'y' + jx' + ky' + m = 0,$$

ou seja, uma equação do segundo grau em duas variáveis. Como não é possível que a intersecção seja vazia nem que consista em duas rectas paralelas (não há duas rectas paralelas num cone), tem necessariamente de ser um ponto, uma recta, duas rectas concorrentes, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.⁷

⁷É possível ir um pouco mais longe ainda com poucos cálculos. Se escolhermos o referencial original de forma que o eixo dos y seja paralelo à intersecção de π com o plano definido pelos eixos dos x e y e que o ângulo $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ entre esse plano e o plano π seja o ângulo entre o semi-eixo positivo dos x e o plano π , a mudança de referencial consiste simplesmente numa rotação em torno do eixo dos y , seguida de uma translação: essa rotação é tal que $(x, y, z) = (x' \cos \alpha - z' \sin \alpha, y', x' \sin \alpha - z' \cos \alpha)$; substituindo na equação $x^2 + y^2 = \left(\frac{r}{z_0}\right)^2 z^2$, o coeficiente de x'^2 será $\cos^2 \alpha - \left(\frac{r}{z_0}\right)^2 \sin^2 \alpha$, o de y'^2 será 1 e o de $x'y'$ será 0; pelo que vimos na secção 1.7, a equação resultante representará uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio (mas esta terceira possibilidade não se coloca) se $\cos^2 \alpha - \left(\frac{r}{z_0}\right)^2 \sin^2 \alpha > 0$, uma parábola, uma recta ou duas rectas paralelas (mas esta terceira possibilidade não se coloca) se $\cos^2 \alpha - \left(\frac{r}{z_0}\right)^2 \sin^2 \alpha = 0$ e uma hipérbole ou duas rectas concorrentes se $\cos^2 \alpha - \left(\frac{r}{z_0}\right)^2 \sin^2 \alpha < 0$; chamando β ao ângulo que

Para terminarmos o capítulo sobre as cónicas, vejamos resumidamente um outro processo, mais geométrico, de identificar a intersecção de um cone com um plano π (que não passe pelo vértice do cone) — um processo devido ao matemático belga Germinal Pierre Dandelin (1794–1847).

Se π for perpendicular ao eixo do cone (e portanto paralelo à base), a secção cónica será uma circunferência.

Senão, tomemos uma esfera interior ao cone, tangente a este e ao plano π ; chamemos F ao ponto em que a esfera é tangente a π ; e C à circunferência em que a esfera é tangente ao cone. C estará num plano perpendicular ao eixo do cone — este plano intersectará π , numa recta a que chamaremos d .

Chamemos ainda α ao ângulo entre o plano π e o plano da circunferência onde a esfera é tangente ao cone; e β ao ângulo que as rectas que formam o cone fazem com o plano da base (ou com o plano da circunferência onde a esfera é tangente ao cone).

A secção cónica formada por π é a parábola, elipse ou hipérbole de foco F , directriz d e excentricidade $\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$ — ver a demonstração, para o caso da elipse, em [Brannan, Esplen, Gray, págs. 19–20].

2 Quádricas

Chama-se habitualmente *quádrlica* ou, mais correctamente, *quádrlica no espaço*,⁸ a um subconjunto de \mathbb{R}^3 representado por uma equação de segundo grau, isto é, a um conjunto da forma

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax^2 + by^2 + cz^2 + fxy + gyz + hxz + jx + ky + lz + m = 0\},$$

onde $a, b, c, f, g, h, j, k, l, m$ são números reais e pelo menos um dos coeficientes a, b, c, f, g, h é diferente de 0.

cada recta do cone faz com o plano xy (complementar do ângulo que faz com o eixo do cone; $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$), de forma que $\text{tg } \beta = \frac{|z_0|}{r}$, estas condições escrevem-se, respectivamente, $\text{tg } \beta > \text{tg } \alpha$, $\text{tg } \beta = \text{tg } \alpha$ e $\text{tg } \beta < \text{tg } \alpha$, ou seja, $\beta > \alpha$, $\beta = \alpha$ e $\beta < \alpha$.

⁸As cónicas, o conjunto vazio e a reunião de duas rectas paralelas são quádrlicas no plano. Em geral, as quádrlicas em \mathbb{R}^n são os subconjuntos de \mathbb{R}^n solução de equações do segundo grau a n variáveis.

Também se fala frequentemente em *superfícies quádricas* mas, tal como há cónicas que não são curvas (pelo menos num sentido habitual), há quádricas que não são propriamente superfícies (por exemplo, a equação $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ representa o conjunto vazio, e a equação $x^2 + y^2 = 0$ representa uma linha recta).

Para identificar uma quádrica a partir da sua equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + fxy + gyz + hxz + jx + ky + lz + m = 0, \quad (3)$$

seguimos um processo análogo ao das cónicas. Antes de mais, se definirmos

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}f & \frac{1}{2}h \\ \frac{1}{2}f & b & \frac{1}{2}g \\ \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}g & c \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

podemos escrever (3) como

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + J^T \mathbf{x} + m = 0;$$

como A é uma matriz real simétrica, existe uma matriz P ortogonal tal que $P^T A P$ é diagonal — mais precisamente,

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix},$$

onde λ, μ, ν são os valores próprios de A ; fazendo $\mathbf{x} = P \mathbf{x}'$, ficaremos com (3) na forma

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + \nu z'^2 + j'x' + k'y' + l'z' + m = 0.$$

Restará apenas completar os quadrados, fazer uma translação da forma $x'' = x' + x'_0$, $y'' = y' + y'_0$, $z'' = z' + z'_0$, e as divisões necessárias⁹ e teremos uma

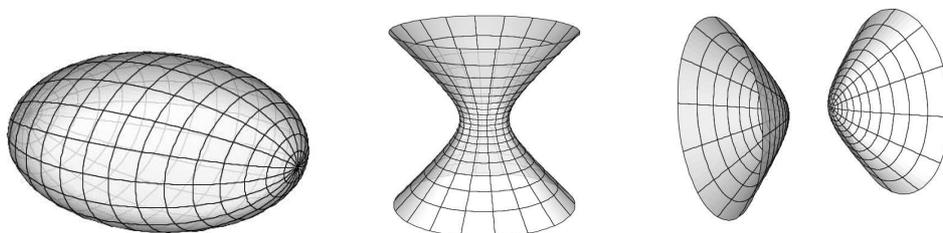
⁹Nalguns casos poderá ainda ser necessário trocar os nomes de algumas variáveis — por exemplo trocar x'' com y'' em $\frac{y''^2}{4} = x''$ para a reconhecer como do tipo 9 (cilindro

equação de um dos seguintes tipos de figura:

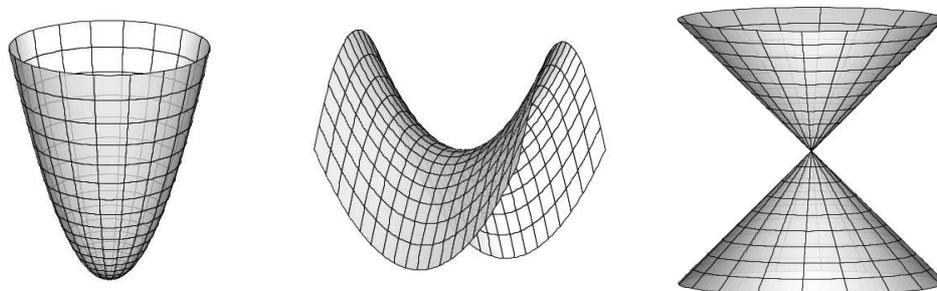
1. elipsóide: $\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} + \frac{z''^2}{\gamma^2} = 1$;
2. hiperbolóide de uma folha: $\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} - \frac{z''^2}{\gamma^2} = 1$;
3. hiperbolóide de duas folhas: $\frac{x''^2}{\alpha^2} - \frac{y''^2}{\beta^2} - \frac{z''^2}{\gamma^2} = 1$;
4. parabolóide elíptico: $\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} = z''$;
5. parabolóide hiperbólico: $\frac{x''^2}{\alpha^2} - \frac{y''^2}{\beta^2} = z''$;
6. cone elíptico: $\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} - \frac{z''^2}{\gamma^2} = 0$;
7. cilindro elíptico: $\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} = 1$;
8. cilindro hiperbólico: $\frac{x''^2}{\alpha^2} - \frac{y''^2}{\beta^2} = 1$;
9. cilindro parabólico: $\frac{x''^2}{\alpha^2} = y''$;
10. um plano: $x''^2 = 0$;
11. dois planos paralelos: $x''^2 = \alpha^2$;
12. dois planos concorrentes: $\frac{x''^2}{\alpha^2} - \frac{y''^2}{\beta^2} = 0$;
13. uma linha recta: $\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} = 0$;
14. um ponto: $\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} + \frac{z''^2}{\gamma^2} = 0$;
15. conjunto vazio: $\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} + \frac{z''^2}{\gamma^2} + 1 = 0$.

parabólico).

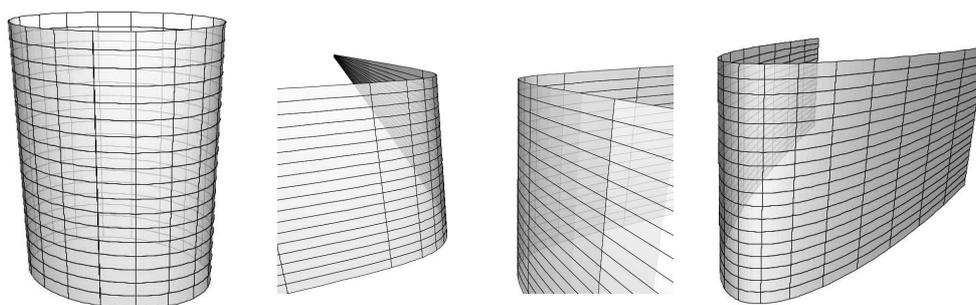
A figura seguinte mostra um elipsóide, (parte de) um hiperbolóide de uma folha e (parte de) um hiperbolóide de duas folhas.



A figura seguinte mostra (parte de) um parabolóide elíptico, (parte de) um parabolóide hiperbólico e (parte de) um cone elíptico.



Finalmente, a figura seguinte mostra (parte de) um cilindro elíptico, (parte de) um cilindro hiperbólico e (parte de) um cilindro parabólico.



Tópicos de Geometria – 2010/2011

Parte II Geometria Diferencial

A Geometria Diferencial consiste essencialmente na utilização de ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral para o estudo de objectos geométricos. Naturalmente, estas ferramentas são mais directamente úteis para o estudo de objectos *suaves* (suficientemente suaves para terem tangentes, pelo menos) do que, digamos, para o estudo de triângulos¹⁰ (ou outros objectos *pontiagudos*).

Aqui vamos concentrar-nos no estudo de curvas e superfícies regulares (o adjectivo “regular” é precisamente uma maneira de dizer “suficientemente suave”).

3 Curvas e caminhos

3.0 Continuidade e derivação de funções vectoriais

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}$ e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou $n = 3$. Vamos escrever

$$F(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{ou} \quad F(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

(consoante $n = 2$ ou $n = 3$, respectivamente), de forma que x, y ou x, y, z são funções $U \rightarrow \mathbb{R}$; a estas duas ou três funções reais chamaremos as *componentes* da função F .

Recordamos que F é contínua num ponto $t_0 \in U$ se e só se todas as suas componentes são contínuas em t_0 . Além disso, F é diferenciável em t_0 se e só se todas as suas componentes são diferenciáveis em t_0 . A matriz jacobiana

¹⁰Sim, um triângulo só não tem tangentes em três pontos, mas o leitor entenderá por que tem pouco interesse considerar as tangentes do triângulo. . .

de F é uma matriz $n \times 1$, que podemos identificar com um vector. Assim, dizemos que o vector

$$F'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \quad \text{ou} \quad F'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

é a *derivada* de F em t_0 . Se $V \subseteq U$ for o conjunto dos pontos onde F é diferenciável, a derivada de F é uma função $V \rightarrow \mathbb{R}^n$. F é *de classe* C^1 se for diferenciável e a sua derivada for contínua; ou, equivalentemente, se todas as suas componentes forem de classe C^1 (no sentido habitual para funções reais de uma variável real).

Esta derivada goza de várias propriedades análogas às das derivadas de funções reais de uma variável real, e que podem ser obtidas facilmente a partir destas. Assim, por exemplo, é válida a Regra da Cadeia na seguinte forma: se $U, V \subseteq \mathbb{R}$ e considerar funções $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : V \rightarrow U$, deriváveis,

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t)$$

(onde \cdot representa, naturalmente, a multiplicação de um vector por um escalar). Também são válidas as seguintes regras de derivação dos produtos interno e externo: se $U \subseteq \mathbb{R}$ e tivermos funções $F, G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, deriváveis,

$$(F \cdot G)'(t) = F'(t) \cdot G(t) + F(t) \cdot G'(t);$$

e, no caso de $n = 3$,

$$(F \times G)'(t) = F'(t) \times G(t) + F(t) \times G'(t)$$

(estas regras dos produtos podem ser verificadas usando a definição de derivada — de maneira análoga à da regra do produto usual em \mathbb{R} — ou por “força bruta” — desenvolvendo o produto à esquerda e a seguir derivando e aplicando a regra do produto em \mathbb{R}).

3.1 Definições iniciais

Definição 3.1. Um caminho em \mathbb{R}^n é uma função contínua $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo de \mathbb{R} .

Uma curva em \mathbb{R}^n é a imagem de um caminho.

Se a curva C é a imagem do caminho γ , dizemos que γ percorre C , ou que parametriza C , ou ainda que γ é uma parametrização de C .

À variável $t \in I$ de uma parametrização $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é habitual chamar *parâmetro*.

Exemplo 3.1. Dado um ponto $P \in \mathbb{R}^n$, e um vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ não nulo, a função

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto P + t\vec{v} \end{aligned}$$

é contínua e portanto é um caminho; a curva parametrizada por ρ é a recta que incide em P e tem vector director \vec{v} (isto é, $P + \langle \vec{v} \rangle$).

Exemplo 3.2. A função

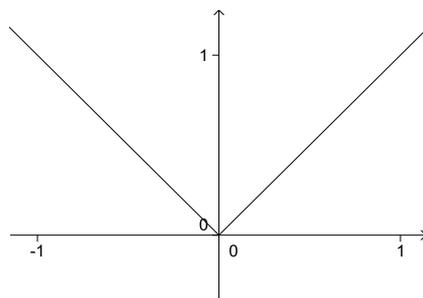
$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

é contínua e portanto é um caminho; a curva percorrida por γ é a circunferência $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Exemplo 3.3. A função

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, |t|) \end{aligned}$$

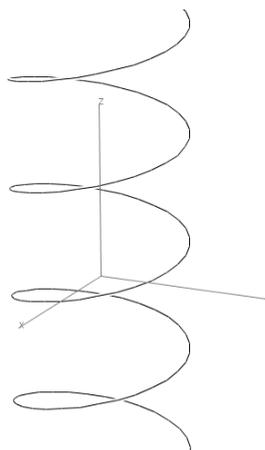
é contínua e portanto é um caminho; a curva percorrida por γ é constituída por duas semi-rectas ortogonais, ambas com origem em $(0, 0)$.



Exemplo 3.4. A função

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \left(\cos t, \sin t, \frac{t}{5}\right) \end{aligned}$$

é contínua e portanto é um caminho; a curva percorrida por γ é uma hélice circular.

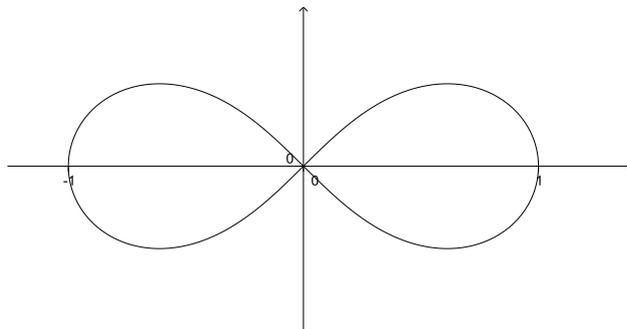


Exemplo 3.5. A função

$$\begin{aligned} \lambda: [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}\right) \end{aligned}$$

é ainda contínua e portanto um caminho; a curva que percorre é uma lemniscata de Bernoulli.¹¹

¹¹A equação geral das *lemniscatas de Bernoulli* (na forma canónica) é $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$; nesta lemniscata em particular temos $a = 1$. Estas curvas foram encontradas por Jacob Bernoulli em 1694, e têm a propriedade seguinte: o produto das distâncias de



Atenção: muitos autores (por exemplo, [PV Araújo], [MP Carmo], ou [A Pressley]) chamam *curva parametrizada* (ou, abreviadamente, *curva*) ao que nós chamamos parametrização, e *traço* da curva parametrizada ao que nós chamamos curva.

Um caminho pode ser entendido como representando o movimento de uma partícula que percorre uma curva (ao longo de um período de tempo representado por t). Por vezes, chama-se *velocidade* de um caminho $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ em $t = t_0$ à derivada $\gamma'(t_0)$, se esta existir. Mas aqui a velocidade não nos interessa muito e a derivada servirá para estudar outras propriedades.

Consideremos um caminho $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um ponto $\gamma(t_0)$. Se tomarmos um outro ponto $\gamma(t)$ do mesmo caminho, a recta que passa em $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t)$, e que é uma secante desse caminho, tem como vector director $\gamma(t) - \gamma(t_0)$ — ou qualquer múltiplo não nulo deste, em particular $\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$. Se t tender para t_0 (e portanto $\gamma(t)$ tender para $\gamma(t_0)$), $\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$ poderá ter, ou não, um limite: se sim, isto é, se γ for derivável em t_0 , e se esse limite ($= \gamma'(t_0)$) for não nulo, será um vector director da tangente ao caminho γ em t_0 .

Porque queremos calcular tangentes a caminhos e curvas, vamos limitar a nossa atenção a caminhos diferenciáveis — e portanto a curvas que têm parametrizações diferenciáveis. Mas como queremos calcular também curvaturas (para o que necessitaremos de segundas derivadas) e torções (para o que necessitaremos de terceiras derivadas) vamos limitar-nos ainda a caminhos com “tantas derivadas quanto necessário” — na prática, vamos limitar-nos a caminhos de classe C^∞ , embora o leitor deva reparar que cada resultado

cada ponto P da curva a dois focos F_1, F_2 é constante; se se acrescentar a condição de a curva passar pelo ponto médio entre F_1 e F_2 obtém-se precisamente uma lemniscata de Bernoulli.

exige menos do que isso.

Mas, ainda devido ao propósito de calcular tangentes, é necessário impor outra restrição — vamos limitar-nos a caminhos, e curvas, regulares:

Definição 3.2. *Um caminho $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável diz-se regular se $\gamma'(t) \neq 0$, para todo o $t \in I$.*

Uma curva diz-se regular se tiver uma parametrização regular.

Os caminhos dos exemplos 3.1, 3.2 e 3.4 são claramente regulares. O caminho do exemplo 3.3 não é sequer diferenciável; a mesma curva pode ser parametrizada pelo caminho

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^3, t^2|t|) \end{aligned}$$

e este é diferenciável ($\varphi'(t) = (3t^2, 3t|t|)$) — mas $\varphi'(0) = (0, 0)$, e portanto φ não é regular.

Para simplificar a linguagem, e de acordo com as delimitações que já referimos, daqui por diante, ao utilizarmos as palavras “curva”, “caminho” e “parametrização” subentenderemos “diferenciável (tantas vezes quantas necessário) e regular”.

Definição 3.3. *A tangente ao caminho $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ em $u = u_0$ é a recta $\gamma(u_0) + \langle \gamma'(u_0) \rangle$.*

Se a recta r for a tangente ao caminho γ em $u = u_0$, será também tangente à curva $\gamma(I)$ no ponto $\gamma(u_0)$.

Exemplo 3.6. Considere a lemniscata parametrizada pelo caminho λ do exemplo 3.5. Este caminho é derivável, e a sua derivada é

$$\begin{aligned} \lambda' : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{-\operatorname{sen} t (2 + \cos^2 t)}{(1 + \operatorname{sen}^2 t)^2}, \frac{\cos(2t) (1 + \operatorname{sen}^2 t) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(2t)}{(1 + \operatorname{sen}^2 t)^2} \right) ; \end{aligned}$$

note que $\lambda'(t) \neq 0$, para todo $t \in [0, 2\pi[$, e portanto λ é regular. Como $\lambda(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)$ e $\lambda'(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, a recta $(0, 0) + \langle (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \rangle$, ou seja, a recta de equação $y = x$, é a tangente a λ em $t = \frac{\pi}{2}$; como $\lambda(\frac{3\pi}{2}) = (0, 0)$ e

$\lambda'(\frac{3\pi}{2}) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, a recta $(0, 0) + \langle (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \rangle$, ou seja, a recta de equação $y = -x$, é a tangente a λ em $t = \frac{3\pi}{2}$. Assim, ambas estas rectas são tangentes à lemniscata parametrizada por λ no ponto $(0, 0)$.

3.2 Reparametrizações; orientação

Uma mesma curva pode ter muitas parametrizações. Por exemplo, a circunferência S^1 pode ser parametrizada não só pelo caminho γ do exemplo 3.2, mas também por um qualquer dos seguintes caminhos (e, naturalmente, por uma infinidade de outros):

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_2 : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) & t &\mapsto (\sin t, \cos t) \\ \\ \gamma_3 : [0, \pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_4 : [0, 4\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos 2t, \sin 2t) & t &\mapsto (\cos t, \sin t) \\ \\ \gamma_5 :]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\sin t, \cos t) \end{aligned}$$

Definição 3.4. *Uma aplicação $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma reparametrização de um caminho $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se existir uma bijecção $\mu : J \rightarrow I$, diferenciável, tal que*

1. $\beta = \alpha \circ \mu$; e
2. $\mu'(t) \neq 0$, para todo $t \in J$.

Repare que se β é uma reparametrização de α , então é também um caminho regular: como α e μ são diferenciáveis, $\beta = \alpha \circ \mu$ é diferenciável; e, pela Regra da Cadeia, $\beta' = \alpha' \cdot \mu'$, de forma que β' não se pode anular.

Há mais algumas características importantes a salientar nesta definição:

1. se β é uma reparametrização de α , então β e α parametrizam a mesma curva ($\beta(J) = \alpha(\mu(J)) = \alpha(I)$);
2. a relação “é uma reparametrização” é uma relação de equivalência (a demonstração deste facto fica como exercício);

3. se β é uma reparametrização de α , com $\beta = \alpha \circ \mu$, e se $u_0 = \mu(t_0)$, então $\beta'(t_0) = \alpha'(u_0) \cdot \mu'(t_0)$ — e portanto os vectores $\beta'(t_0)$ e $\alpha'(u_0)$ são colineares (note que $\mu'(t_0)$ é um escalar não nulo).

Esta terceira característica indica em particular que a nossa definição de recta tangente é (razoavelmente) segura: se β é uma reparametrização de α , então as rectas tangentes nos pontos correspondentes coincidem.

Exemplo 3.7. Considere o caminho γ do exemplo 3.2 e os caminhos γ_3 e γ_5 do início desta secção: γ_3 e γ_5 são reparametrizações de γ (e portanto são também reparametrizações um do outro). De facto, se tomarmos

$$\begin{array}{ccc} \mu_3 : [0, \pi[& \rightarrow & [0, 2\pi[\\ t & \mapsto & 2t \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \mu_5 :] - \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & [0, 2\pi[\\ t & \mapsto & \frac{\pi}{2} - t \end{array},$$

vemos facilmente que μ_3 e μ_5 são bijecções, C^∞ , que $\mu_3'(t) \equiv 2$ e $\mu_5'(t) \equiv -1$, e que $\gamma_3 = \gamma \circ \mu_3$ e $\gamma_5 = \gamma \circ \mu_5$.

Infelizmente, a recíproca da primeira dessas três características não se verifica: α e β podem parametrizar a mesma curva sem que sejam reparametrizações uma da outra. Por exemplo, o caminho γ do exemplo 3.2 e o caminho γ_1 do início desta secção não são reparametrizações um do outro.¹² Mas há uma classe de curvas em que se verifica esse recíproco:

Definição 3.5. *Uma curva (compacta)¹³ simples aberta é a imagem de um caminho injectivo cujo domínio é um intervalo fechado.*

Por exemplo, se considerarmos os seguintes caminhos

$$\begin{array}{ccc} \alpha : [0, \frac{3\pi}{2}] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \beta : [-5, 5] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, t^2) \end{array}$$

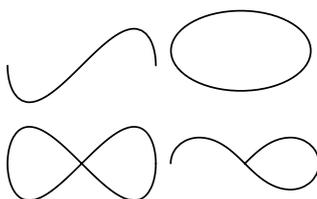
vemos facilmente que $\alpha([0, \frac{3\pi}{2}])$ e $\beta([-5, 5])$ são curvas simples abertas; mas

¹²Não existe nenhuma bijecção contínua entre $[0, 2\pi]$ e $[0, 2\pi[$ — o primeiro intervalo é compacto e o segundo não.

¹³Chamamos curva compacta à imagem de um caminho cujo domínio é compacto — ou seja, é um intervalo fechado.

a circunferência S^1 não é — tem parametrizações injectivas, mas os domínios destas são necessariamente da forma $[a, b[$ ou da forma $]a, b]$.¹⁴

Intuitivamente, uma curva simples aberta resulta de tomar um intervalo fechado de \mathbb{R} e “dobrá-lo” sem auto-intersecções — ou seja, sem se cruzar e sem que os extremos do intervalo toquem um no outro ou no interior do intervalo. Das quatro curvas representadas na figura seguinte, apenas a primeira é uma curva simples aberta.



A demonstração do resultado seguinte será dada em apêndice.

Teorema 3.1. *Duas quaisquer parametrizações de uma curva simples aberta são reparametrização uma da outra.*

Este resultado tem aplicações mesmo a curvas que não são simples abertas, através da noção de ponto simples:

Definição 3.6. *Um ponto P de uma curva C diz-se simples se existir uma vizinhança V de P tal que $C \cap V$ é uma curva simples aberta.*

Embora S^1 não seja uma curva simples aberta, como já dissemos, é fácil ver que todo o seu ponto é simples (e o mesmo acontece, por exemplo, para elipses). Na verdade, nos exemplos de curvas regulares vistos até agora, os únicos pontos que não são simples são o ponto $(0, 0)$ da lemniscata (exemplo 3.5) e os pontos de “cruzamento” ou “entroncamento” que aparecem na terceira e quarta curvas da figura acima.

Se P for um ponto simples de uma curva C , e se quisermos estudar um qualquer aspecto local da curva em P , quaisquer duas parametrizações de C funcionarão “como se fossem” reparametrização uma da outra — pois podemos concentrar-nos numa vizinhança V de P tal que $C \cap V$ seja uma

¹⁴A lemniscata do exemplo 3.5 também não é uma curva simples aberta — tem parametrizações injectivas (como?), mas com domínio necessariamente aberto.

curva simples aberta, e restringir as duas parametrizações de forma a que percorram apenas essa curva simples aberta.¹⁵

Podemos expressar esta situação dizendo que duas quaisquer parametrizações de uma mesma curva são, relativamente a um ponto simples, localmente reparametrização uma da outra:

Definição 3.7. *Dado um caminho $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, um caminho $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é localmente uma reparametrização de α , relativamente a $u_0 \in I$, se existirem $t_0 \in J$, $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$ tais que $\beta|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ é uma reparametrização de $\alpha|_{[u_0-\varepsilon, u_0+\varepsilon]}$.*

É claro que a terceira característica salientada a propósito da definição 3.4 (de reparametrização) se mantém para reparametrizações locais: se u_0 e t_0 são valores correspondentes dos parâmetros, então $\alpha'(u_0)$ é colinear com $\beta'(t_0)$.

Em particular, se P for um ponto simples de uma curva (regular) C , C tem uma e uma só recta tangente em P .

Seja α um caminho e $\beta = \alpha \circ \mu$ uma sua reparametrização. Como μ é uma bijecção contínua entre intervalos, é estritamente monótona (e, como $\mu' \neq 0$, terá de ser sempre $\mu' > 0$ ou sempre $\mu' < 0$).

Definição 3.8. *Dadas duas parametrizações $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ da mesma curva C , dizemos que γ e $\tilde{\gamma}$ têm a mesma orientação, ou definem a mesma orientação em C , se $\tilde{\gamma}$ for reparametrização de γ com $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu$ e $\mu' > 0$.*

Dizemos ainda que γ e $\tilde{\gamma}$ têm, ou definem em C , orientações opostas ou contrárias, se $\tilde{\gamma}$ for reparametrização de γ com $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu$ e $\mu' < 0$.

Se considerarmos o conjunto das parametrizações de uma curva C , é claro que a relação “definir a mesma orientação em C ” é uma relação de equivalência. A uma classe de equivalência desta relação chamamos uma *orientação* de C .

¹⁵Em rigor, para que este argumento funcione, pode ser necessário impor que as parametrizações sejam tais que P seja imagem de valores interiores dos parâmetros — se $C = S^1$, com $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi[$, e $P = \gamma(0)$, a parametrização γ não pode ser restrita de forma a parametrizar $C \cap V$ (seriam necessários valores negativos de t).

Definição 3.9. *Uma curva orientada é um par (C, \mathcal{O}) , onde C é uma curva e \mathcal{O} é uma orientação de C .*

Na prática, vamos dizer que consideramos uma curva orientada quando tomamos apenas parametrizações com a mesma orientação. Por exemplo, se dissermos que C tem a orientação dada por γ , queremos dizer que consideramos apenas parametrizações com a mesma orientação de γ .

É também claro que se $\tilde{\gamma}$ e $\hat{\gamma}$ forem dois caminhos, ambos com orientação oposta a γ , então $\tilde{\gamma}$ e $\hat{\gamma}$ terão a mesma orientação.¹⁶

Em geral, uma curva pode ter muitas orientações. Voltando ao caminho γ do exemplo 3.2 e aos caminhos γ_1 a γ_5 do início desta secção, é fácil ver que γ e γ_3 definem a mesma orientação em S^1 , γ_5 define a orientação oposta a essa, mas γ_1, γ_2 e γ_4 definem outras orientações (já que não são reparametrizações de γ).

No entanto, também neste aspecto as curvas simples abertas são “bem comportadas”: uma curva simples aberta tem duas e só duas orientações. De facto, dadas duas parametrizações α e β de uma curva simples aberta, como β é necessariamente uma reparametrização de α , há apenas duas possibilidades: ou $\mu = \alpha^{-1} \circ \beta$ tem derivada positiva e as duas parametrizações definem a mesma orientação na curva, ou $\mu = \alpha^{-1} \circ \beta$ tem derivada negativa e as duas parametrizações definem orientações opostas. Se $[a, b]$ for o domínio de α e $[c, d]$ o domínio de β , é claro que $\alpha(a) = \beta(c)$ e $\alpha(b) = \beta(d)$ se α e β tiverem a mesma orientação, e $\alpha(a) = \beta(d)$ e $\alpha(b) = \beta(c)$ se α e β tiverem orientações opostas — uma curva simples aberta tem dois extremos bem definidos, e as duas possíveis orientações correspondem às duas escolhas relativamente a qual dos extremos é o inicial e qual é o final.

Se considerarmos um ponto simples de uma curva, *localmente* a curva também terá apenas duas orientações possíveis.

¹⁶Repare que não faz sentido comparar as orientações de dois caminhos se estes não parametrizarem a mesma curva.

3.3 Comprimento de arco

Consideremos um caminho $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, e suponhamos que queremos determinar o comprimento do trajecto percorrido por γ entre $t = a$ e $t = b$ ($a < b$, $a, b \in I$).¹⁷ Devido à facilidade em calcular comprimentos de segmentos de recta, é natural começarmos por tentar aproximar este comprimento por uma sequência de segmentos de recta: dividamos o intervalo $[a, b]$ em subintervalos $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, \dots , $[t_{n-1}, t_n]$, com $t_0 = a$ e $t_n = b$ (estamos a supor que $t_0 < t_1 < \dots < t_n$); o comprimento de cada um dos segmentos de recta que queremos considerar é $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$, e portanto a aproximação que queríamos é

$$\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|;$$

mas $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| (t_i - t_{i-1})$, e portanto podemos escrever essa aproximação como

$$\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| (t_i - t_{i-1});$$

ora, se formos subdividindo esta partição de $[a, b]$ em subintervalos, e portanto fazendo $n \rightarrow +\infty$ (mas sempre com $t_0 = a$ e $t_n = b$) e $(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$, este somatório tenderá para

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Esta discussão não pretende ser uma *demonstração* de algum resultado, mas somente uma motivação para a seguinte definição:

Definição 3.10. O comprimento (de arco) de um caminho $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$,

¹⁷Repare que este comprimento não está à partida definido. Sabemos (ou julgamos saber) do que falamos apenas porque temos uma ideia intuitiva do que significa comprimento, mas não é claro (nem sequer é verdade, se alargarmos o nosso âmbito a caminhos não diferenciáveis) que esse comprimento exista sempre.

entre a e b (com $a < b$, $a, b \in I$), é

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Exemplo 3.8. Considere o caminho γ do exemplo 3.4. O comprimento de γ entre 0 e 2π (trata-se de uma “volta” da hélice, entre os pontos $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, \frac{2\pi}{5})$) é

$$\int_0^{2\pi} \left\| \left(-\sin t, \cos t, \frac{1}{5} \right) \right\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{5^2}} dt = \frac{2\sqrt{26}}{5}\pi$$

Para a definição 3.10 ser razoável, é necessário que o comprimento seja *invariante por reparametrização*, isto é, que se β for uma reparametrização de α , então o comprimento de β entre dois valores do seu parâmetro seja igual ao comprimento de α entre os valores correspondentes do seu parâmetro. Mas é fácil de ver que isto acontece, usando uma simples mudança de variável no integral da expressão do comprimento: digamos que $\beta = \alpha \circ \mu$ (nas condições da definição 3.4), que v_0, v_1 são dois valores do parâmetro v de β , com $v_0 < v_1$, e que $u_0 = \mu(v_0)$ e $u_1 = \mu(v_1)$; já vimos que μ' é sempre positiva ou sempre negativa — no primeiro caso $u_0 < u_1$ e no segundo $u_1 < u_0$; se for então $\mu' > 0$, o comprimento de α entre u_0 e u_1 é

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u_1} \|\alpha'(u)\| du &= \int_{v_0}^{v_1} \|\alpha'(\mu(v))\| \mu'(v) dv = \\ &= \int_{v_0}^{v_1} \|\alpha'(\mu(v)) \cdot \mu'(v)\| dv = \int_{v_0}^{v_1} \|\beta'(v)\| dv; \end{aligned}$$

e se for $\mu' < 0$, devemos calcular o comprimento de α entre u_1 e u_0 , que é

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_0} \|\alpha'(u)\| du &= \int_{v_1}^{v_0} \|\alpha'(\mu(v))\| \mu'(v) dv = \\ &= \int_{v_0}^{v_1} \|\alpha'(\mu(v)) \cdot \mu'(v)\| dv = \int_{v_0}^{v_1} \|\beta'(v)\| dv. \end{aligned}$$

Esta invariância por reparametrização indica que o comprimento de um

caminho entre dois valores do parâmetro pode ser utilizado para calcular o comprimento de um arco (isto é, de parte) da curva percorrida por esse caminho. Mas pode ser necessário ter algum cuidado com a escolha dos valores do parâmetro. Por exemplo, imagine que quer calcular o comprimento do arco da circunferência S^1 entre os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ (o arco mais pequeno — o que também contém $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, e não o que contém $(-1, 0)$), e que se propõe usar o caminho

$$\begin{aligned} \gamma_4 : [0, 4\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned} ;$$

ora, $(1, 0) = \gamma_4(0)$ e $(0, 1) = \gamma_4(\frac{5\pi}{2})$, mas o comprimento que pretende calcular não é o comprimento de γ_4 entre 0 e $\frac{5\pi}{2}$, e sim (por exemplo) o comprimento de γ_4 entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ — entre 0 e $\frac{5\pi}{2}$, γ_4 dá uma “volta a mais” à circunferência.

Bastante mais importante para o que se segue é a próxima definição, muito semelhante à anterior, mas com algumas diferenças a notar:

Definição 3.11. *Dados um caminho $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um valor $t_0 \in I$, a função comprimento de arco de γ com origem em t_0 é*

$$\begin{aligned} s : I &\rightarrow s(I) \subseteq \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du \end{aligned} .$$

Repare que:

1. Se $t > t_0$, então $s(t) > 0$ e $s(t)$ corresponde efectivamente ao comprimento de γ entre t_0 e t .
2. Se $t < t_0$, então $s(t) < 0$ e $s(t)$ é simétrico do comprimento de γ entre t e t_0 .
3. A função s é derivável ($s'(t) = \|\gamma'(t)\|$).
4. A derivada de s nunca se anula ($\|\gamma'(t)\| \neq 0$, por γ ser regular).
5. Como s é uma função real, definida num intervalo, com derivada que nunca se anula, é injectiva; e portanto é uma bijecção sobre a sua imagem.

Tomemos a inversa s^{-1} de s ; pelo Teorema da Função Inversa, podemos verificar que s^{-1} também cumpre as condições 3, 4 e 5 acima — isto é, $s^{-1} : s(I) \rightarrow I$ é uma bijecção derivável tal que $(s^{-1})'$ nunca se anula; assim, pela definição 3.4, a aplicação

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$$

é uma reparametrização de γ .

Normalmente usa-se a letra s para representar o parâmetro de $\tilde{\gamma}$, o que é natural: $s = s(t)$.

Esta reparametrização tem propriedades muito interessantes, que veremos mais adiante, e que são consequência do seguinte facto:

Proposição 3.2. *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho, $s : I \rightarrow s(I) \subseteq \mathbb{R}$ uma função comprimento de arco de γ e $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$. Então $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$, para todo $s \in s(I)$.*

Demonstração. Basta ver que, sendo $\gamma(t) = \tilde{\gamma} \circ s(t)$, pela Regra da Cadeia

$$\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(s) \cdot s'(t) = \tilde{\gamma}'(s) \cdot \|\gamma'(t)\|$$

e portanto

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = \left\| \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\| = 1. \quad \square$$

Esta propriedade de o vector derivada ser sempre unitário merece uma designação especial:

Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ for um caminho com a propriedade de $\|\gamma'(s)\| \equiv 1$, o seu parâmetro s não é necessariamente uma função comprimento de arco tal como definida acima, mas apenas porque pode não ter uma origem — isto é, pode nunca acontecer $s = 0$ (ou dito ainda de outra forma, não há garantia de que $0 \in I$); no entanto, se tomarmos dois valores $s_0, s_1 \in I$, $s_0 < s_1$, acontece necessariamente que o comprimento de γ entre s_0 e s_1 é

$$\int_{s_0}^{s_1} 1 \, ds = s_1 - s_0.$$

Assim, justifica-se a seguinte terminologia:

Definição 3.12. *Um caminho $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se uma parametrização por comprimento de arco se $\|\gamma'(s)\| = 1$, para todo $s \in I$.*

Se, além disso, γ é uma reparametrização de α , então é uma reparametrização de α por comprimento de arco.

E, relativamente a γ , a curva $\gamma(I)$ diz-se parametrizada por comprimento de arco.

Na prática, uma reparametrização por comprimento de arco pode ser muito difícil de calcular, ou mesmo impossível de escrever em termos de funções elementares (é o caso de um caminho que percorra uma elipse). No entanto, para efeitos teóricos, podemos sempre tomar uma reparametrização por comprimento de arco. Vamos ver um exemplo da utilidade disto no início da próxima secção.

Para terminar esta secção, vamos ver que quaisquer duas reparametrizações por comprimento de arco do mesmo caminho são muito parecidas:

Proposição 3.3. *Sejam γ e $\tilde{\gamma}$ duas parametrizações por comprimento de arco, uma reparametrização da outra, com $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \mu$. Então $\mu(t) = \pm t + c$ (onde c é uma constante).*

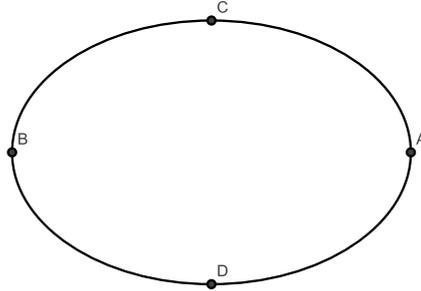
Demonstração. Pela Regra da Cadeia,

$$\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(\mu(t)) \cdot \mu'(t);$$

mas, como $\|\gamma'(t)\| = \|\tilde{\gamma}'(\mu(t))\| = 1$, vem que $|\mu'(t)| = 1$, isto é, $\mu'(t) = \pm 1$; integrando, temos $\mu(t) = \pm t + c$. \square

3.4 Curvatura

Queremos medir a curvatura de uma curva ou de um caminho, num ponto. Intuitivamente, uma recta tem curvatura nula em todos os pontos, a curvatura de uma circunferência é também igual em todos os pontos e tanto menor quanto maior for o raio e, na seguinte elipse, a curvatura é máxima em A e B e mínima em C e D .



A ideia que vamos seguir para concretizar esta noção intuitiva é a seguinte: a curvatura deve medir a variação na direcção da tangente — se na vizinhança de um ponto a tangente varia muito, então a curvatura é grande; se varia pouco, então a curvatura é pequena. Isto sugere que para calcular a curvatura devemos usar uma derivada. Como a derivada de um caminho nos dá um vector director da tangente, podemos pensar em usar a segunda derivada do caminho; mas o vector (primeira) derivada do caminho pode variar não só em direcção mas também em norma, o que afectará a sua derivada. A solução é: em vez de derivarmos o caminho original, vamos derivar uma sua reparametrização por comprimento de arco. Assim, a primeira derivada, sendo sempre unitária, não varia em norma.

Definição 3.13. *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho e $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$ uma sua reparametrização por comprimento de arco. A curvatura de γ em $t_0 \in I$ é*

$$\kappa(t_0) = \left\| \frac{d^2 \tilde{\gamma}}{ds^2}(s(t_0)) \right\|.$$

Esta definição está bem formulada: se $\hat{\gamma}$ for uma outra reparametrização por comprimento de arco de γ , a curvatura resultante é a mesma. De facto, já vimos (na prop. 3.3) que nesse caso, com $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma} \circ \mu$, se tem $\mu' \equiv 1$ ou $\mu' \equiv -1$; vamos chamar r ao parâmetro de $\hat{\gamma}$ e s ao de $\tilde{\gamma}$, de forma que $s = \mu(r)$; então, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d\hat{\gamma}}{dr} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d\mu}{dr}$$

e

$$\frac{d^2\hat{\gamma}}{dr^2} = \frac{d\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}}{dr} \cdot \frac{d\mu}{dr} + \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d^2\mu}{dr^2} = \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \cdot \left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2 + 0 = \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2}$$

e portanto a curvatura é igual, calculada usando $\hat{\gamma}$ ou $\tilde{\gamma}$.

Exemplo 3.9. Considere uma circunferência de centro na origem e raio a , parametrizada por

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (a \cos t, a \sin t) \end{aligned}$$

A função comprimento de arco de γ , com origem em $t = 0$, é

$$\begin{aligned} s : [0, 2\pi[&\rightarrow [0, 2a\pi[\\ t &\mapsto at \end{aligned}$$

pois $\|\gamma'(t)\| = \|(-a \sin t, a \cos t)\| = a$ e portanto $\int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t a du = at$. Assim, uma reparametrização de γ por comprimento de arco é

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : [0, \frac{2\pi}{a}[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \left(a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

a segunda derivada de $\tilde{\gamma}$ em cada ponto $t = \frac{s}{a}$ é

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} = \frac{d\left(-\sin \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a}\right)}{ds} = \left(-\frac{\cos \frac{s}{a}}{a}, -\frac{\sin \frac{s}{a}}{a}\right) = \left(-\frac{\cos t}{a}, -\frac{\sin t}{a}\right)$$

e a curvatura é

$$\kappa(t) = \left\| \left(-\frac{\cos t}{a}, -\frac{\sin t}{a}\right) \right\| = \frac{1}{a}$$

— ou seja, é constante e igual ao inverso do raio da circunferência.

Exemplo 3.10. Um caminho tem curvatura constante nula se e só se parametriza uma recta, uma semi-recta ou um segmento de recta. (Exercício)

Evidentemente, a curvatura é invariante por reparametrização: se β é uma reparametrização de α , e se $\tilde{\beta}$ é uma reparametrização de β por comprimento de arco, então $\tilde{\beta}$ é também uma reparametrização de α e, sendo

uma parametrização por comprimento de arco, é uma reparametrização de α por comprimento de arco — e portanto as curvaturas de α e β , sendo ambas obtidas de $\tilde{\beta}$, são iguais.

Definição 3.14. *Sejam C uma curva e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma sua parametrização. Se a curvatura de γ em t_0 é κ , então C tem curvatura κ no ponto $\gamma(t_0)$.*

Os exemplos acima mostram-nos que uma circunferência tem curvatura constante igual ao inverso do seu raio, e que uma recta tem curvatura constante nula.

Repare que, embora a curvatura de um caminho, para um valor do seu parâmetro, seja única, uma curva pode ter mais do que uma curvatura no mesmo ponto (se esse ponto for imagem de dois valores do parâmetro de um caminho que a parametrize, e a esses dois valores corresponderem curvaturas distintas do caminho). Mas, num ponto simples, a curvatura é única.

Já foi referido que pode não ser praticável determinar uma reparametrização por comprimento de arco de um dado caminho. Assim, é conveniente ter uma forma directa de calcular a curvatura de um caminho. Essa forma será apresentada na próxima proposição.

Proposição 3.4. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um caminho. A curvatura de γ em t_0 é*

$$\kappa(t_0) = \frac{\|\gamma''(t_0) \times \gamma'(t_0)\|}{\|\gamma'(t_0)\|^3}.$$

Demonstração. Seja $\tilde{\gamma}$ uma reparametrização de γ por comprimento de arco, $\gamma = \tilde{\gamma} \circ s$. Então, pela Regra da Cadeia,

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \quad \text{donde} \quad \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} = \frac{\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}}{\frac{ds}{dt}},$$

e portanto

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d^2\tilde{\gamma}}{dt^2} \cdot \frac{ds}{dt} - \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} = \frac{\gamma'' s' - \gamma' s''}{(s')^3};$$

além disso, como $s' = \pm \|\gamma'\|$,

$$(s')^2 = \|\gamma'\|^2 = \gamma' \cdot \gamma'$$

e derivando temos

$$2s's'' = \gamma'' \cdot \gamma' + \gamma' \cdot \gamma'' \quad \text{donde} \quad s's'' = \gamma' \cdot \gamma'';$$

assim,

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} = \frac{\gamma''(s')^2 - \gamma's's''}{(s')^4} = \frac{\gamma''(\gamma' \cdot \gamma') - \gamma'(\gamma' \cdot \gamma'')}{\|\gamma'\|^4};$$

e como, para quaisquer três vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w},$$

temos

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} = \frac{\gamma' \times (\gamma'' \times \gamma')}{\|\gamma'\|^4};$$

ora, como $\gamma'' \times \gamma'$ é ortogonal a γ' , temos ainda que $\|\gamma' \times (\gamma'' \times \gamma')\| = \|\gamma'\| \cdot \|\gamma'' \times \gamma'\|$, e portanto

$$\kappa = \left\| \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \right\| = \frac{\|\gamma' \times (\gamma'' \times \gamma')\|}{\|\gamma'\|^4} = \frac{\|\gamma'\| \cdot \|\gamma'' \times \gamma'\|}{\|\gamma'\|^4} = \frac{\|\gamma'' \times \gamma'\|}{\|\gamma'\|^3}. \quad \square$$

Esta fórmula, tal como está apresentada, aplica-se apenas a caminhos em \mathbb{R}^3 . Mas repare que um caminho $\gamma_2(t) = (x(t), y(t))$ em \mathbb{R}^2 pode ser identificado com o caminho $\gamma_3(t) = (x(t), y(t), 0)$ no plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$; claro que o vector $\gamma_3'' \times \gamma_3' = (0, 0, x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t))$ não pertencerá a esse plano (a não ser quando for nulo), mas para a fórmula da curvatura interessa-nos apenas a norma desse vector. Assim, se tivermos um caminho $\gamma = (x(t), y(t))$ no plano, a sua curvatura será dada por

$$\kappa(t_0) = \frac{|x''(t_0)y'(t_0) - x'(t_0)y''(t_0)|}{\|\gamma'(t_0)\|^3}.$$

Exemplo 3.11. Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, parametrizada

por

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (2 \cos t, \operatorname{sen} t) \end{aligned} .$$

Então

$$\gamma'(t) = (-2 \operatorname{sen} t, \cos t) \quad \text{e} \quad \gamma''(t) = (-2 \cos t, -\operatorname{sen} t),$$

donde (identificando \mathbb{R}^2 com $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$)

$$\|\gamma''(t) \times \gamma'(t)\| = \|(0, 0, -2 \cos^2 t - 2 \operatorname{sen}^2 t)\| = \|(0, 0, -2)\| = 2$$

e a curvatura de γ em t (e portanto da elipse em $\gamma(t)$, já que todo o ponto da elipse é simples) é dada por

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma''(t) \times \gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{2}{(\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t})^3} = \frac{2}{(\sqrt{3 \operatorname{sen}^2 t + 1})^3}.$$

É fácil ver que esta curvatura é máxima quando $\operatorname{sen} t = 0$, isto é, em $t = 0$ e $t = \pi$, ou em $(2, 0)$ e $(-2, 0)$; e mínima quando $\operatorname{sen} t = \pm 1$, isto é, em $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$, ou em $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

3.5 Triedro de Frenet; torção

Definição 3.15. *Seja γ uma parametrização por comprimento de arco. Vamos chamar vector tangente unitário de γ em s ao vector*

$$\vec{t}(s) = \gamma'(s).$$

Proposição 3.5. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ e $F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função derivável tal que $\|F(t)\| = 1$, para todo $t \in I$; então, para todo $t \in I$, $F'(t)$ é ortogonal a $F(t)$ ou $F'(t) = 0$.*

Demonstração. Como $\|F(t)\| = \sqrt{F(t) \cdot F(t)}$, de $\|F(t)\| \equiv 1$ vem que também $F(t) \cdot F(t) \equiv 1$; derivando, temos $F'(t) \cdot F(t) + F(t) \cdot F'(t) \equiv 0$, isto é, $F'(t) \cdot F(t) \equiv 0$. \square

Em particular, se γ for uma parametrização por comprimento de arco,

o vector $\gamma'' (= \vec{t}')$ é ortogonal a $\gamma' (= \vec{t})$ — excepto quando γ'' é nulo (ou seja, quando a curvatura de γ é zero).

Definição 3.16. *Sejam γ uma parametrização por comprimento de arco, e s um valor do parâmetro para o qual a curvatura de γ é não nula. O vector normal principal de γ em s é*

$$\vec{n}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}.$$

Assim, em cada ponto (de curvatura não nula), \vec{t} e \vec{n} são vectores unitários ortogonais (em pontos de curvatura nula, \vec{n} não está definido).

Repare ainda que, como $\vec{t}'(s) = \gamma''(s) = \vec{n}(s)\|\gamma''(s)\|$ e $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$,

$$\vec{t}'(s) = \kappa(s)\vec{n}(s).$$

Daqui para diante interessam-nos apenas caminhos (e curvas) em \mathbb{R}^3 .

Definição 3.17. *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização por comprimento de arco, e s um valor do parâmetro para o qual a curvatura de γ é não nula. O plano osculador de γ em s é o plano*

$$\gamma(s) + \langle \vec{t}(s), \vec{n}(s) \rangle .$$

O plano osculador de γ em s_0 é o plano do qual o caminho se encontra “mais próximo”, numa vizinhança de s_0 . Vejamos que, se γ for plano, isto é, se a curva parametrizada por γ estiver contida num plano, esse plano é o plano osculador para todo o valor de s : de facto, se $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ pertencer a um plano π , de equação $ax + by + cz = d$, para todo o s , isto é, se

$$ax(s) + by(s) + cz(s) \equiv d,$$

então derivando duas vezes vemos que

$$ax'(s) + by'(s) + cz'(s) \equiv 0$$

e

$$ax''(s) + by''(s) + cz''(s) \equiv 0,$$

ou seja, que $\gamma'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$ e $\gamma''(s) = (x''(s), y''(s), z''(s))$ pertencem ao plano vectorial paralelo a π ; assim, o plano osculador

$$\gamma(s) + \langle \vec{t}(s), \vec{n}(s) \rangle = \gamma(s) + \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle$$

é paralelo a π e, tendo em comum o ponto $\gamma(s)$, é precisamente π .

Se um caminho γ não for plano numa vizinhança de s_0 , afastar-se-á do plano osculador em s_0 à medida que o parâmetro s se afastar do valor s_0 ; esse afastamento será tanto mais rápido quanto mais “torto”, ou “torcido”, for o caminho. Queremos então medir a velocidade desse afastamento, ou quão “torcido” é o caminho — a essa medida chamaremos torção.

Repare que isso equivale a medir a variação na direcção do plano osculador — quando s se afastar de s_0 , essa direcção variará tanto mais quanto mais rapidamente o caminho se afastar do plano osculador em s_0 . Quanto à direcção de um plano, pode ser caracterizada por um vector unitário que lhe seja perpendicular; ora, é muito fácil introduzir um vector unitário perpendicular ao plano osculador: basta tomar o produto externo $\vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$.

Definição 3.18. *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização por comprimento de arco, e s um valor do parâmetro para o qual a curvatura de γ é não nula. O vector binormal de γ em s é o vector*

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s).$$

Como é óbvio, $\|\vec{b}(s)\| \equiv 1$; assim, e pela definição de produto externo, o terno

$$(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))$$

constitui (para cada s) uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 . A este terno chama-se *triedro de Frenet*.

Recordando que $\vec{t}(s) = \gamma'(s)$ e $\vec{n}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$, é imediato que (γ tendo terceira derivada) $\vec{b}(s)$ é derivável.

E o que acontece se derivarmos $\vec{b}(s)$?

$$\begin{aligned}\vec{b}'(s) &= \vec{t}'(s) \times \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \times \vec{n}'(s) \\ &= \kappa(s) \vec{n}(s) \times \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \times \vec{n}'(s) \\ &= \vec{t}(s) \times \vec{n}'(s)\end{aligned}$$

Este resultado diz-nos que $\vec{b}'(s)$ é ortogonal a $\vec{t}(s)$; mas, como $\|\vec{b}(s)\| \equiv 1$, já sabemos que $\vec{b}'(s)$ é ortogonal a $\vec{b}(s)$; assim, $\vec{b}'(s)$ tem de ser colinear com $\vec{n}(s)$ — isto é, é o produto de um escalar pelo vector unitário $\vec{n}(s)$.

Definição 3.19. *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização por comprimento de arco, e s um valor do parâmetro para o qual a curvatura de γ é não nula. A torção de γ em s é o escalar $\tau(s)$ tal que*

$$\vec{b}'(s) = -\tau(s) \vec{n}(s).$$

Ao contrário da curvatura, a torção é definida de maneira a poder ser positiva ou negativa: $\vec{b}'(s)$ pode ter o mesmo sentido de $\vec{n}(s)$, ou o sentido oposto; se tiver o mesmo sentido, será negativa; se tiver o sentido oposto, será positiva. A razão para esta aparente inversão de sinais (ou seja, para o sinal menos em $\vec{b}'(s) = -\tau(s) \vec{n}(s)$) é o facto de querermos que a torção positiva corresponda a caminhos que “rodam” no sentido directo; mais precisamente, um caminho tem torção positiva se se afasta do plano osculador no sentido do vector binormal, e negativa se se afasta no sentido oposto.¹⁸

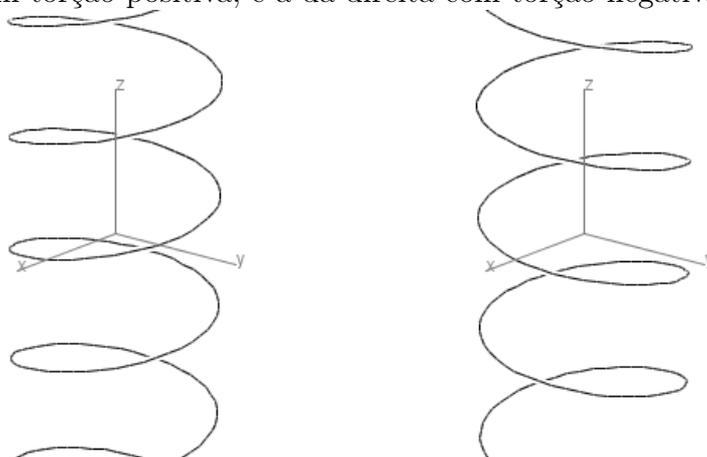
Exemplo 3.12. Considere o seguinte caminho, que parametriza uma hélice circular

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto (a \cos s, a \sin s, b s)\end{aligned}$$

($a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a^2 + b^2 = 1$, para que γ seja uma parametrização por comprimento de arco); a torção de γ é constante, e tem o mesmo sinal de b

¹⁸Atenção: alguns autores (por exemplo, [MP Carmo]), ignoram este argumento e definem torção como sendo simplesmente o coeficiente de $\vec{b}'(s)$ relativamente a $\vec{n}(s)$, ou seja, como o simétrico da nossa torção.

(exercício). Na figura seguinte estão representadas duas destas hélices, a da esquerda com torção positiva, e a da direita com torção negativa.



Proposição 3.6. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização por comprimento de arco cuja curvatura nunca se anula. Então $\gamma(I)$ está contida num plano se e só se a torção de γ é identicamente nula.*

Demonstração. Suponhamos que $\gamma(I)$ está contida num plano. Então, como já vimos, o plano osculador de γ é o mesmo, para todo o valor do parâmetro. Assim, o seu vector binormal é constante, e portanto a torção é nula.

Reciprocamente, suponhamos que a torção de γ é constante nula. Então o vector binormal \vec{b} é constante. Consideremos um ponto $\gamma(s)$ e derivemos o produto interno de $\gamma(s)$ por \vec{b} :

$$\left(\gamma(s) \cdot \vec{b}\right)' = \gamma'(s) \cdot \vec{b} + \gamma(s) \cdot \vec{b}' = \vec{t}(s) \cdot \vec{b} + 0 = 0;$$

então $\gamma(s) \cdot \vec{b}$ é também constante; se chamarmos d a essa constante e escrevermos $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ e $\vec{b} = (a, b, c)$, temos então

$$ax(s) + by(s) + cz(s) = (x(s), y(s), z(s)) \cdot (a, b, c) = d;$$

ou seja, qualquer que seja o $s \in I$, $\gamma(s)$ pertence ao plano de equação $ax + by + cz = d$. \square

Já tínhamos visto que $\vec{t}'(s) = \kappa(s)\vec{n}(s)$ e, por definição de torção, $\vec{b}'(s) = -\tau(s)\vec{n}(s)$; o que podemos dizer sobre $\vec{n}'(s)$? Sendo $\vec{b}(s) =$

$\vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$, segue que $\vec{n}(s) = \vec{b}(s) \times \vec{t}(s)$, donde

$$\begin{aligned}\vec{n}'(s) &= \vec{b}'(s) \times \vec{t}(s) + \vec{b}(s) \times \vec{t}'(s) \\ &= -\tau(s)\vec{n}(s) \times \vec{t}(s) + \vec{b}(s) \times \kappa(s)\vec{n}(s)\end{aligned}$$

e, como $\vec{t}(s) = \vec{n}(s) \times \vec{b}(s)$ e (para todos os \vec{u}, \vec{v}) $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$, concluímos que

$$\vec{n}'(s) = -\kappa(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s).$$

As três equações

$$\begin{aligned}\vec{t}'(s) &= \kappa(s)\vec{n}(s) \\ \vec{n}'(s) &= -\kappa(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s) \\ \vec{b}'(s) &= -\tau(s)\vec{n}(s)\end{aligned}$$

são conhecidas como *Fórmulas de Frenet* (ou de *Frenet–Serret*), e são facilmente memorizáveis na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \vec{t}'(s) \\ \vec{n}'(s) \\ \vec{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t}(s) \\ \vec{n}(s) \\ \vec{b}(s) \end{pmatrix}.$$

Nesta secção, supusemos até agora que γ era uma parametrização por comprimento de arco. E se γ não o for? Como definir $\vec{t}(t)$, $\vec{n}(t)$, $\vec{b}(t)$ e $\tau(t)$? Naturalmente, usaremos uma reparametrização de γ por comprimento de arco; mas, ao contrário do que acontece para a curvatura, nem toda a reparametrização por comprimento de arco serve (completamente) para este propósito. Como queremos que \vec{t} tenha o mesmo sentido que γ' , necessitamos de uma reparametrização de γ por comprimento de arco com a mesma orientação de γ .

Definição 3.20. *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um caminho e t_0 um valor do parâmetro para o qual a curvatura não se anula. Seja ainda $\tilde{\gamma}$ uma reparametrização de γ por comprimento de arco com a mesma orientação de γ .*

Os vectores tangente unitário, normal principal e binormal de γ em t_0 são,

respectivamente, os vectores tangente unitário, normal principal e binormal de $\tilde{\gamma}$ em $s_0 = \mu(t_0)$.

Além disso, a torção de γ em t_0 é a torção de $\tilde{\gamma}$ em $s_0 = \mu(t_0)$.

O leitor deverá verificar que esta definição está bem formulada: duas reparametrizações $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu^{-1}$ e $\hat{\gamma} = \gamma \circ \nu^{-1}$ de γ por comprimento de arco, com $\mu' > 0$ e $\nu' > 0$, terão o mesmo triedro de Frenet e a mesma torção.

Como já foi dito, pode não ser praticável calcular explicitamente uma reparametrização de γ por comprimento de arco. Mas tal não é necessário para calcular o seu triedro de Frenet e a sua torção — basta reparar que, se $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu^{-1}$ é uma reparametrização de γ por comprimento de arco com $\mu' > 0$, então

$$\mu'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

(já que $1 = \|\tilde{\gamma}'\| = \|\gamma'\| \cdot \left| \frac{1}{\mu'} \right| = \|\gamma'\| \cdot \frac{1}{\mu'}(t)$). No que se segue chamaremos, como habitual, t ao parâmetro de γ e s ao parâmetro de $\tilde{\gamma}$ ($s = \mu(t)$).

É então fácil calcular \vec{t} :

$$\vec{t}(t) = \tilde{\gamma}'(s) = \frac{\gamma'(t)}{\mu'(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

É também fácil calcular \vec{b} , se repararmos que $\gamma'(t) \times \gamma''(t)$ tem a mesma direcção e o mesmo sentido que $\vec{b}(t)$:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d\mu}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 + \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d^2\mu}{dt^2}, \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} \times \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d\mu}{dt} \times \left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 + \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d^2\mu}{dt^2} \right) \\ &= \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d\mu}{dt} \times \frac{d^2\tilde{\gamma}}{ds^2} \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 + \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d\mu}{dt} \times \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d^2\mu}{dt^2}; \end{aligned}$$

mas a segunda parcela do termo da direita é nula, por $\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d\mu}{dt}$ e $\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{d^2\mu}{dt^2}$ serem

vectores colineares; assim,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) \times \gamma''(t) &= (\mu'(t))^3 \tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s) \\ &= (\mu'(t))^3 \vec{t}(t) \times \kappa(t) \vec{n}(t) \\ &= (\mu'(t))^3 \kappa(t) \vec{b}(t);\end{aligned}$$

ora, tanto $\mu'(t)$ como $\kappa(t)$ são escalares positivos. Desta forma, temos

$$\vec{b}(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}.$$

Finalmente, é claro que $\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t)$.

Resumindo:

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} & \vec{b} &= \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|} \\ \vec{n} &= \vec{b} \times \vec{t}\end{aligned}$$

A propósito, as igualdades (4) acima significam que $\gamma'(t)$ é colinear com $\gamma'(s)$ (o que já tínhamos visto há muito) e $\gamma''(t)$ é combinação linear de $\tilde{\gamma}'(s)$ e $\tilde{\gamma}''(s)$; assim, $\langle \vec{t}, \vec{n} \rangle = \langle \tilde{\gamma}'(s), \tilde{\gamma}''(s) \rangle = \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle$ e o plano osculador de γ em t é $\gamma(t) + \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle$.

Quanto a calcular a torção, bastará derivar o vector binormal *em ordem a s*. Isto é, como

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n} \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|,$$

temos

$$\frac{\vec{b}'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = -\tau(t) \vec{n}(t).$$

Repare que um processo análogo a este pode ser usado para calcular a curvatura: como

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n} \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|,$$

temos

$$\frac{\vec{t}'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \kappa(t) \vec{n}(t);$$

e como a curvatura é não negativa, podemos ainda escrever

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{t}'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}.$$

No entanto, é frequentemente mais prático usar a fórmula da proposição 3.4. Tal como é mais prático usar uma fórmula análoga para calcular a torção.

Proposição 3.7. *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um caminho e t um valor do parâmetro para o qual a curvatura não se anula. A torção de γ em t é*

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}.$$

Demonstração. Seja $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu^{-1}$ uma reparametrização de γ por comprimento de arco, com $\mu' > 0$, e seja $s = \mu(t)$. Vamos ver primeiro que

$$\frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2} = \frac{(\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)) \cdot \tilde{\gamma}'''(s)}{\|\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)\|^2}.$$

De facto, já vimos que

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (\mu'(t))^3 \tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s),$$

donde

$$\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2 = (\mu'(t))^6 \|\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)\|^2;$$

além disso, por ser $\gamma''(t) = \tilde{\gamma}''(s)(\mu'(t))^2 + \tilde{\gamma}'(s)\mu''(t)$, é

$$\gamma'''(t) = \tilde{\gamma}'''(s)(\mu'(t))^3 + 3\tilde{\gamma}''(s)\mu'(t)\mu''(t) + \tilde{\gamma}'(s)\mu'''(t)$$

e portanto

$$(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t) = (\mu'(t))^6 (\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)) \cdot \tilde{\gamma}'''(s).$$

Vejamus agora que a torção de $\tilde{\gamma}$ em s (e portanto a torção de γ em t) é efectivamente igual a $\frac{(\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)) \cdot \tilde{\gamma}'''(s)}{\|\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)\|^2}$. Ora, de $-\tau \vec{n}(s) = \vec{b}'(s)$ vem (fazendo o produto interno por $-\vec{n}(s)$)

$$\tau = -\vec{b}'(s) \cdot \vec{n}(s);$$

assim,

$$\begin{aligned} \tau &= -\left(\tilde{\gamma}'(s) \times \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\kappa(s)}\right)' \cdot \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\kappa(s)} \\ &= -\left(\tilde{\gamma}''(s) \times \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\kappa(s)} + \tilde{\gamma}'(s) \times \frac{\tilde{\gamma}'''(s)\kappa(s) - \tilde{\gamma}''(s)\kappa'(s)}{(\kappa(s))^2}\right) \cdot \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\kappa(s)} \\ &= -\frac{(\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}'''(s)) \cdot \tilde{\gamma}''(s)}{(\kappa(s))^2} = -\frac{(\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}'''(s)) \cdot \tilde{\gamma}''(s)}{\|\tilde{\gamma}''(s)\|^2} \end{aligned}$$

e como, por um lado, $\|\tilde{\gamma}''(s)\|^2 = \|\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)\|^2$ (por $\tilde{\gamma}'(s)$ ser unitário e ortogonal a $\tilde{\gamma}''(s)$) e, por outro, $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = -(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v}$ (para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$) concluímos finalmente que

$$\tau = \frac{(\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)) \cdot \tilde{\gamma}'''(s)}{\|\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)\|^2} = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}. \quad \square$$

Falta analisar o que se pode dizer, quanto ao triedro de Frenet e quanto à torção, a propósito de curvas. O vector tangente unitário *não* é invariante por reparametrização: se α e β forem duas parametrizações da mesma curva com orientações opostas, os seus vectores tangentes unitários serão (em cada ponto) simétricos um do outro. O vector normal principal, pelo contrário, é invariante por reparametrização, como foi visto na página 38¹⁹. Assim, o vector binormal também não será invariante por reparametrização: sendo o produto externo de \vec{t} por \vec{n} , uma reparametrização manterá o seu sentido ou invertê-lo-á consoante mantém ou inverte o sentido de \vec{t} .

Sendo assim, se considerarmos um ponto simples P de uma curva C , há duas escolhas para o vector tangente unitário ou para o vector binormal a P em C — correspondentes às duas possíveis orientações locais de C .

¹⁹Embora não com essa terminologia: aí falámos em segundas derivadas de reparametrizações por comprimento de arco — ou seja, $\kappa \vec{n}$.

Mas, se fixarmos uma orientação em C , esta indefinição desaparece:

Definição 3.21. *Sejam (C, \mathcal{O}) uma curva orientada e $\gamma \in \mathcal{O}$ (isto é, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma parametrização de C com a orientação \mathcal{O}). Se o triedro de Frenet de γ em $t \in I$ é $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$, então C , com a orientação \mathcal{O} , tem no ponto $\gamma(t)$ vector tangente unitário \vec{t} , vector normal principal \vec{n} e vector binormal \vec{b} — e portanto triedro de Frenet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$.*

Quanto à torção, é invariante por reparametrização: sejam β um caminho e $\alpha = \beta \circ \mu$ uma reparametrização de β com $\mu' < 0$ (é claro que se fosse $\mu' > 0$, as torções de α e β seriam iguais); sejam ainda u e $v = \mu(u)$ valores correspondentes dos seus parâmetros para os quais as suas curvaturas não se anulam; então, chamando \vec{b}_α e \vec{b}_β aos respectivos vectores binormais, temos

$$\vec{b}_\alpha(u) = -\vec{b}_\beta(v);$$

pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d\vec{b}_\alpha}{du} = -\frac{d\vec{b}_\beta}{dv} \frac{d\mu}{du}$$

e

$$\alpha'(u) = \beta'(v) \mu'(u)$$

donde

$$\frac{\vec{b}'_\alpha(u)}{\|\alpha'(u)\|} = -\frac{\vec{b}'_\beta(v) \mu'(u)}{\|\beta'(v)\| |\mu'(u)|} = \frac{\vec{b}'_\beta(v)}{\|\beta'(v)\|},$$

ou seja,

$$-\tau_\alpha(u) \vec{n}_\alpha(u) = -\tau_\beta(v) \vec{n}_\beta(v)$$

e, como $\vec{n}_\alpha(u) = \vec{n}_\beta(v)$,

$$\tau_\alpha(u) = \tau_\beta(v).$$

Assim, faz sentido definir torção de uma curva.

Definição 3.22. *Sejam C uma curva em \mathbb{R}^3 e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma sua parametrização. Se a curvatura de γ em t_0 é não nula e a torção é τ , então C tem torção τ no ponto $\gamma(t_0)$.*

É claro que uma curva pode ter mais do que uma torção num ponto (se esse ponto não for simples). Mas num ponto simples uma curva tem no máximo uma torção (não tem nenhuma se a curvatura for nula).

Repare finalmente que a invariância por reparametrização da torção significa que a proposição 3.6 pode ser estendida a caminhos que não são parametrizações por comprimentos de arco e evidentemente a curvas:

Proposição 3.8. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um caminho cuja curvatura nunca se anula. Então $\gamma(I)$ está contida num plano se e só se a sua torção é identicamente nula.*

Demonstração. Basta tomar uma reparametrização de γ por comprimento de arco e aplicar a proposição 3.6. \square

Apêndice

Como prometido, vamos demonstrar o resultado seguinte, que foi enunciado na secção 3.2 (pág. 29):

Teorema 3.1 *Duas quaisquer parametrizações de uma curva simples aberta são reparametrização uma da outra.*

Demonstração. Seja C uma curva simples aberta; existe então um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, injectivo, que parametriza C .

Devido à transitividade da relação “ser reparametrização”, para ver que duas quaisquer reparametrizações de C são reparametrização uma da outra basta ver que qualquer parametrização de C é reparametrização de γ . Com esse objectivo, consideremos uma qualquer parametrização $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de C .

Por a parametrização γ ser injectiva, tem uma inversa $\gamma^{-1} : C \rightarrow [a, b]$. Vamos definir uma função $\mu : I \rightarrow [a, b]$ por

$$\mu = \gamma^{-1} \circ \alpha;$$

então $\alpha = \gamma \circ \mu$ e queremos ver que μ verifica as restantes condições enunciadas na definição de reparametrização, isto é, que μ é uma bijecção diferenciável e $\mu'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

A sobrejectividade de μ é imediata: $\mu(I) = \gamma^{-1}(\alpha(I)) = \gamma^{-1}(C) = [a, b]$. A injectividade será verificada no final.

A função μ é contínua: de facto, γ^{-1} é contínua, por ser a inversa de uma função contínua definida num compacto,²⁰ e portanto μ é a composta de duas funções contínuas.

Para vermos que μ é diferenciável, seria tentador dizer que $\mu = \gamma^{-1} \circ \alpha$ é a composta de duas aplicações diferenciáveis; contudo, o domínio de γ^{-1} é um subconjunto de \mathbb{R}^n com interior vazio, e portanto não sabemos falar em diferenciabilidade. Felizmente, podemos caracterizar μ de uma maneira mais apropriada para este efeito.

Digamos que

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{e} \quad \alpha(u) = (x_1(u), y_1(u))$$

(o caso de curvas em \mathbb{R}^3 é perfeitamente análogo), e tomemos um $u_0 \in I$. Seja $t_0 = \mu(u_0)$; como é $\gamma'(t_0) \neq 0$ (por γ ser regular), uma das componentes de $\gamma'(t_0)$ é não nula; sem perda de generalidade, suponhamos que $x'(t_0) \neq 0$. Então, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança T de t_0 tal que a função $x|_T$ é injectiva e a sua inversa $(x|_T)^{-1}$ é diferenciável; repare que esta injectividade significa que no arco $\gamma(T) \subseteq C$ não há dois pontos com a mesma abcissa. Façamos agora $U = \mu^{-1}(T)$; temos que U é uma vizinhança de u_0 (porque μ é contínua, e portanto a imagem recíproca por μ de um aberto é um aberto).

Para simplificar, vamos escrever x em vez de $x|_T$. Consideremos então a função

$$\begin{array}{ccc} \nu : U & \rightarrow & T \\ u & \mapsto & x^{-1}(x_1(u)) \end{array} .$$

É claro que $\nu = \mu|_U$: de facto, se $t = \nu(u)$, então $x(t) = x_1(u)$ e o único ponto em $\gamma(T) = \alpha(U)$ com essa abcissa será $(x(t), y(t)) = (x_1(u), y_1(u))$, isto é $\gamma(t) = \alpha(u)$, donde se conclui que $t = \mu(u)$.

²⁰Recorde que uma função é contínua se e só se a imagem recíproca de um qualquer fechado é um fechado. Ora, a imagem recíproca por γ^{-1} de um fechado é a imagem por γ desse fechado e, sendo o domínio de γ um compacto, esse fechado será compacto; sendo γ contínua, a imagem desse compacto será um compacto — e portanto será fechado.

Ora, a função x_1 é diferenciável (por ser uma componente de α) e já vimos que a função x^{-1} é também diferenciável; assim, $\mu|_U$ é diferenciável por ser a composta de duas funções diferenciáveis. Como este argumento pode ser repetido para cada valor de I (eventualmente com y e y_1 em vez de x e x_1), concluímos que a função μ é diferenciável em todo o seu domínio.

Visto que μ' existe, falta ver que nunca se anula. Mas $\alpha = \gamma \circ \mu$, donde, para todo $u \in I$,

$$\alpha'(u) = \gamma'(\mu(u)) \cdot \mu'(u);$$

ora, se fosse $\mu'(u) = 0$, seria também $\alpha'(u) = 0$; mas isso é impossível, pois α é uma parametrização regular.

Finalmente, verifiquemos a injectividade de μ : sendo μ' contínua definida num intervalo e $\mu' \neq 0$, tem de ser μ' sempre positiva (e μ estritamente crescente) ou μ' sempre negativa (e μ estritamente decrescente); em qualquer dos casos, μ será injectiva. \square

4 Superfícies

4.0 Homeomorfismos

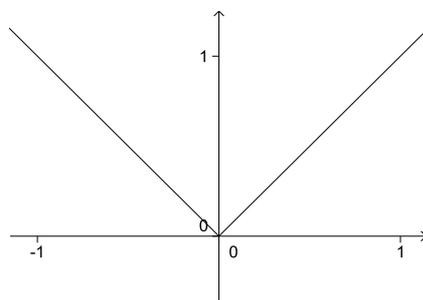
Um conceito muito importante para o que se segue é o de *homeomorfismo*. Recordamos que um homeomorfismo entre dois espaços topológicos (ou em particular entre dois espaços métricos) X e Y é uma aplicação $h : X \rightarrow Y$ bijectiva, contínua e tal que a sua inversa $h^{-1} : Y \rightarrow X$ é também contínua.

Mas qualquer aplicação é sobrejectiva sobre a sua imagem; isto é, se $h : X \rightarrow Y$ for injectiva mas não sobrejectiva, podemos dizer que $h : X \rightarrow h(X) \subseteq Y$ é bijectiva. Assim, por abuso de linguagem diremos que uma aplicação $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo se for injectiva, contínua e a sua inversa $F^{-1} : F(U) \rightarrow U$ for também contínua. Dizemos também (sem abuso de linguagem) que U e $F(U)$ são *homeomorfos*.

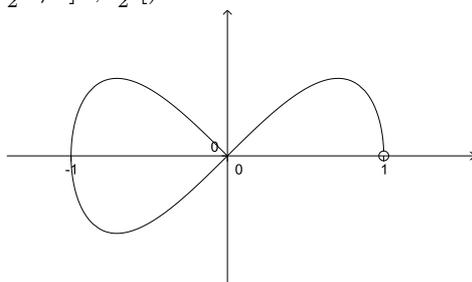
Vejamos três exemplos (um de um homeomorfismo, outro de um não-homeomorfismo e um último de um não-homeomorfismo que pode facilmente ser transformado num homeomorfismo).

Exemplo 4.1. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, |t|)$ é um homeomorfismo. A injectividade é imediata (basta reparar que a primeira componente de α é a função identidade); a continuidade também (tanto a identidade como a função módulo são contínuas); quanto a α^{-1} ser contínua, basta reparar que é a restrição ao conjunto $\alpha(\mathbb{R})$ de uma função $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, nomeadamente a projecção sobre a primeira coordenada $(x, y) \mapsto x$.

(Parte d) o conjunto $\alpha(\mathbb{R})$ está representado na figura seguinte. Este conjunto, composto por duas semi-rectas com a mesma origem $(0, 0)$, é portanto homeomorfo a \mathbb{R} .



Exemplo 4.2. A aplicação $\beta :]0, \frac{3\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(t) = (\cos t, \frac{1}{2} \sin 2t)$ é injectiva e contínua, mas não é um homeomorfismo, porque β^{-1} não é contínua em $(0, 0)$. Repare que $\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \beta(t) = (0, 0)$ e $(0, 0) \in \beta(]0, \frac{3\pi}{2}[)$ porque $(0, 0) = \beta(\frac{\pi}{2})$. Ora, consideremos a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $u_n = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}$. A sucessão de pontos de $\beta(]0, \frac{3\pi}{2}[)$ dada por $P_n = \beta(u_n)$ converge para $\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \beta(t) = (0, 0)$; no entanto, a sucessão $\beta^{-1}(P_n) = u_n$ não é convergente em $]0, \frac{3\pi}{2}[$ (porque $\frac{3\pi}{2} \notin]0, \frac{3\pi}{2}[$).



O conjunto $\beta(]0, \frac{3\pi}{2}[)$ está representado na figura acima. Poderíamos pensar que existe uma outra aplicação definida num intervalo de \mathbb{R} cuja imagem é este conjunto e que é um homeomorfismo. Não vamos dar aqui os detalhes do porquê, mas tal aplicação não existe: este conjunto não é homeomorfo a

nenhum intervalo de \mathbb{R} (o problema está na forma de Y perto de $(0, 0)$).

Exemplo 4.3. A aplicação $\gamma : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ é também injetiva e contínua, mas não é um homeomorfismo, porque γ^{-1} não é contínua em $(1, 0)$: a sucessão dos pontos $\gamma(2\pi - \frac{1}{n})$ tende para $(1, 0)$, mas a sucessão dos valores $2\pi - \frac{1}{n}$ não é convergente em $[0, 2\pi[$. Podemos facilmente obter um homeomorfismo a partir de γ , restringindo o domínio a $]0, 2\pi[$; no entanto, a imagem deixa de ser a circunferência S^1 , e passa a ser $S^1 \setminus \{(1, 0)\}$. Uma circunferência “menos um ponto” é de facto um conjunto homeomorfo a um intervalo aberto de \mathbb{R} , enquanto uma circunferência não é homeomorfa a um intervalo de \mathbb{R} .

Por uma questão de simplicidade, começámos por ver exemplos referentes a conjuntos homeomorfos (ou não) a intervalos de \mathbb{R} ; mas vamos estar mais interessados em conjuntos homeomorfos a subconjuntos abertos de \mathbb{R}^2 . Adaptando os exemplos acima, é fácil ver que as aplicações

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (u, |u|, v) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc}]0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (\cos u, \sin u, v) \end{array}$$

são homeomorfismos — os cilindros com bases $\alpha(\mathbb{R})$ e $\gamma(]0, 2\pi[)$, isto é, os conjuntos $\alpha(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ e $\gamma(]0, 2\pi[) \times \mathbb{R}$ são homeomorfos a \mathbb{R}^2 e $]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ respectivamente; mais geralmente, se X for homeomorfo a Y , $X \times Z$ será homeomorfo a $Y \times Z$. Também é fácil ver que as aplicações

$$\begin{array}{ccc}]0, \frac{3\pi}{2}[\times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (\cos u, \frac{1}{2} \sin 2u, v) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc}]0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (\cos u, \sin u, v) \end{array}$$

não são homeomorfismos. Mas aqui é preciso mais cuidado a tirar conclusões sobre os conjuntos envolvidos: $\beta(]0, \frac{3\pi}{2}[) \times \mathbb{R}$ de facto não é homeomorfo a um subconjunto de \mathbb{R}^2 ; mas $\gamma(]0, 2\pi[) \times \mathbb{R}$ (ou seja, o cilindro de base S^1) é homeomorfo a, por exemplo, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ — isto porque

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \log(u^2 + v^2) \right) \end{array}$$

é um homeomorfismo e a sua imagem é $S^1 \times \mathbb{R}$.

Claro que os cilindros, isto é, os conjuntos da forma $X \times \mathbb{R}$ (com $X \subseteq \mathbb{R}^2$) são apenas um caso particular dos subconjuntos de \mathbb{R}^3 . Mas de outros casos apenas observaremos (sem o provar) que, tal como a circunferência S^1 não é homeomorfa a um subconjunto de \mathbb{R} , a esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ não é homeomorfa a um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Mas se lhe retirarmos um meridiano (isto é, uma semi-circunferência máxima) ficamos com um conjunto homeomorfo a um rectângulo aberto: a aplicação

$$\begin{aligned}]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo e a sua imagem é o conjunto $S^2 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ e } x^2 + z^2 = 1\}$.

4.1 Definições iniciais

Definição 4.1. Uma parametrização de superfície de classe C^k ($k \geq 1$) é uma aplicação $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que σ é um homeomorfismo (sobre a sua imagem) e é de classe C^k .

À imagem $\sigma(U)$ de uma tal parametrização de superfície chamamos uma porção de superfície de classe C^k .

Exemplo 4.4. As aplicações

$$\begin{aligned} \sigma_1 :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u, \sin u, v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_2 :]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \end{aligned}$$

são parametrizações de superfície de classe C^∞ ; assim, os conjuntos

$$(S^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{(1, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad S^2 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ e } x^2 + z^2 = 1\}$$

são porções de superfície de classe C^∞ .

Exemplo 4.5. A aplicação

$$\begin{aligned} \sigma_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \log(u^2 + v^2) \right) \end{aligned}$$

é uma parametrização de superfície de classe C^∞ ; assim, o conjunto $S^1 \times \mathbb{R}$ é uma porção de superfície de classe C^∞ .

Exemplo 4.6. A aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, |u|, v) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo, mas de classe apenas C^0 : não é diferenciável nos pontos da forma $(0, v)$.

Na prática, vamos em geral trabalhar com porções de superfície. Mas interessa-nos saber que podemos considerar objectos mais gerais: superfícies.

Definição 4.2. Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma superfície de classe C^k ($k \geq 1$) se, para todo o ponto $P \in S$, existir uma vizinhança V de P tal que $S \cap V$ é uma porção de superfície de classe C^k .

Exemplo 4.7. Qualquer porção de superfície de classe C^k é uma superfície de classe C^k : basta tomar, para qualquer P , a vizinhança \mathbb{R}^3 .

Exemplo 4.8. A esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície de classe C^∞ . De facto, já vimos que $S^2 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ e } x^2 + z^2 = 1\}$ é uma porção de superfície; basta encontrar uma porção de superfície contida em S^2 e que inclua o meridiano $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ e } x^2 + z^2 = 1\}$; ora, a aplicação

$$\begin{aligned}]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (-\cos u \cos v, \sin v, \sin u \cos v) \end{aligned}$$

é uma parametrização de classe C^∞ , e a porção de superfície que parametriza é $S^2 \setminus \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0 \text{ e } x^2 + y^2 = 1\}$.

Assim, uma superfície é uma reunião de porções de superfície, cada uma com a sua parametrização.

Frequentemente, se σ parametriza uma porção de superfície contida numa superfície S , diz-se que σ é uma *parametrização local* de S .

Definição 4.3. Um atlas de uma superfície S é um conjunto $\{\sigma_i : i \in I\}$ de parametrizações $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $S = \bigcup_{i \in I} \sigma(U_i)$.

Exemplo 4.9. Considere as parametrizações $\sigma_1, \sigma_2 :]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por $\sigma_1(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ e $\sigma_2(u, v) = (-\cos u \cos v, \sin v, \sin u \cos v)$; o conjunto $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é um atlas de S^2 .

Exemplo 4.10. Considere as aplicações

$$\begin{aligned} \sigma_1 :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 & \sigma_2 :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u, \sin u, v) & (u, v) &\mapsto (\sin u, \cos u, v) \end{aligned}$$

e

$$\sigma_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \log(u^2 + v^2) \right);$$

cada um dos conjuntos

$$\{\sigma_1, \sigma_2\} \quad \text{e} \quad \{\sigma_3\}$$

é um atlas do cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

Tal como no caso dos caminhos, não é suficiente pedir que as parametrizações de superfície sejam diferenciáveis; vamos exigir também que sejam regulares:

Definição 4.4. Uma parametrização de superfície $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diz-se regular se, para todo $(u_0, v_0) \in U$,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0,$$

ou, equivalentemente, os vectores $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$ forem linearmente independentes.

Uma superfície diz-se regular se tiver um atlas composto de parametrizações regulares.

Exemplo 4.11. S^2 é uma superfície regular, já que as parametrizações σ_1, σ_2 do exemplo 4.9 são regulares:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} &= (-\operatorname{sen} u \cos v, \cos u \cos v, 0) \times (-\cos u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v) \\ &= (\cos u \cos^2 v, \operatorname{sen} u \cos^2 v, \operatorname{sen} v \cos v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} &= (\operatorname{sen} u \cos v, 0, \cos u \cos v) \times (\cos u \operatorname{sen} v, \cos v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v) \\ &= (-\cos u \cos^2 v, \operatorname{sen} v \cos v, \operatorname{sen} u \cos^2 v) \end{aligned}$$

e estes vectores são não nulos, pois

$$\left\| \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \right\| = \sqrt{\cos^4 v + \operatorname{sen}^2 v \cos^2 v} = \cos v \neq 0$$

($v \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

Exemplo 4.12. O cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ é também uma superfície regular: considerando o atlas $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ do exemplo 4.10,

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0) \neq 0$$

e

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} = (\cos u, -\operatorname{sen} u, 0) \times (0, 0, 1) = (-\operatorname{sen} u, -\cos u, 0) \neq 0$$

(o seno e o cosseno nunca se anulam simultaneamente).

A partir de agora, vamos limitar-nos a parametrizações de superfície e superfícies regulares, e vamos em geral omitir o adjectivo “regular”.

Suponhamos que $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ são duas parametrizações de superfície, de classe C^k , regulares, e que $\sigma(U) = S = \tilde{\sigma}(\tilde{U})$. Então a aplicação

$\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ dada por $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ é uma bijecção por ser a composta de duas bijecções; mas, além disso, Φ é de classe C^k . Para verificarmos esta última afirmação, vamos fixar um ponto $P = (x_0, y_0, z_0) = \sigma(u_0, v_0) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ e escrever

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{y}(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{z}(\tilde{u}, \tilde{v}));$$

como os vectores²¹ $\sigma_u(u_0, v_0)$ e $\sigma_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes, a matriz jacobiana de σ em (u_0, v_0) , que é uma matriz 3×2 cujas colunas correspondem precisamente a esses vectores, tem uma submatriz 2×2 invertível; sem perda de generalidade, suponhamos que essa submatriz é

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} ;$$

mas então, pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças V de (u_0, v_0) e W de (x_0, y_0) tais que a função

$$\begin{aligned} h : V &\rightarrow W \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

é bijectiva e a sua inversa é de classe C^k ; ora, se fizermos $\tilde{V} = \Phi^{-1}(V) = \tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma(V)$ e

$$\begin{aligned} \tilde{h} : \tilde{V} &\rightarrow \tilde{W} \\ (\tilde{u}, \tilde{v}) &\mapsto (\tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{y}(\tilde{u}, \tilde{v})) \end{aligned}$$

com $\tilde{W} = \tilde{h}(\tilde{V})$, ou seja, \tilde{W} igual à projecção sobre o plano xy de $\tilde{\sigma}(\tilde{V}) = \sigma(V)$, teremos $\tilde{W} = W$ e

$$\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma} = h^{-1} \circ \tilde{h};$$

como h^{-1} e \tilde{h} são de classe C^k , podemos concluir que Φ também o é em V ; e, como podemos repetir este argumento para todo o $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in \tilde{U}$, concluímos

²¹Usaremos normalmente a notação $\sigma_u, \sigma_v, \sigma_{uu}, \sigma_{uv}, \dots$ para $\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial v}, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v}, \dots$ respectivamente.

que Φ é de classe C^k .²² Analogamente, Φ^{-1} é de classe C^k .

É também claro que, se tivermos uma parametrização de superfície $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k e tomarmos um homeomorfismo $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ (para algum $\tilde{U} \in \mathbb{R}^2$) de classe C^k com inversa de classe C^k , a composta $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$ será uma parametrização de superfície regular: que cumpre as condições da definição 4.1 é imediato, pois é a composta de dois homeomorfismos de classe C^k ; quanto a ser regular, escrevendo $(u, v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$ temos, pela regra da cadeia,

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} = \sigma_u u_{\tilde{u}} + \sigma_v v_{\tilde{u}} \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \sigma_u u_{\tilde{v}} + \sigma_v v_{\tilde{v}},$$

donde

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = (u_{\tilde{u}} v_{\tilde{v}} - v_{\tilde{u}} u_{\tilde{v}}) (\sigma_u \times \sigma_v) = \text{Jac } \Phi (\sigma_u \times \sigma_v)$$

(onde $\text{Jac } \Phi$ é o jacobiano de Φ — isto é, $\text{Jac } \Phi = \det(J\Phi)$, sendo $J\Phi$ a matriz jacobiana de Φ) e, como Φ é invertível e derivável, $\text{Jac } \Phi \neq 0$.²³

Definição 4.5. *Uma parametrização de superfície $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k é uma reparametrização de uma parametrização $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k se a função $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ dada por $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ for um homeomorfismo de classe C^k com inversa de classe C^k .*

A discussão acima prova o seguinte resultado:

Proposição 4.1. *Duas quaisquer parametrizações de uma mesma porção de superfície são reparametrização uma da outra.*

No caso de duas parametrizações *locais* da mesma superfície, isto é, de duas parametrizações de porções de superfície contidas numa mesma superfície (ou ainda, de dois elementos de um atlas de uma superfície), não podemos falar estritamente em “reparametrização” se essas porções de superfície forem distintas; mas, desde que a sua intersecção não seja vazia, podemos falar em “reparametrização local”, restringindo os domínios das parametrizações aos valores dos parâmetros que são enviados na intersecção dessas porções:

²²Este argumento é análogo à demonstração do teorema 3.1. É apenas mais simples, por impormos, por definição, que as parametrizações de superfície sejam homeomorfismos (ao contrário das parametrizações de curvas).

²³ $\Phi \circ \Phi^{-1}$ é a função identidade em U logo, pela regra da cadeia, $J\Phi J(\Phi^{-1}) = I_2$ e portanto $J\Phi$ é invertível.

Definição 4.6. Uma parametrização de superfície $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k é localmente uma reparametrização de uma parametrização $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k se os conjuntos $V = \sigma^{-1}(\sigma(U) \cap \sigma(\tilde{U}))$ e $\tilde{V} = \tilde{\sigma}^{-1}(\sigma(U) \cap \sigma(\tilde{U}))$ forem não vazios e a função $\Phi : \tilde{V} \rightarrow V$ dada por $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ for um homeomorfismo de classe C^k com inversa de classe C^k .

Teremos muitas oportunidades de utilizar o facto de duas parametrizações locais de uma superfície serem localmente reparametrização uma da outra (desde que parametrizem porções com intersecção não vazia) e, em especial, de nessa situação usar a relação

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \text{Jac}(\sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}) (\sigma_u \times \sigma_v).$$

4.2 Espaço tangente; orientação

Tal como um caminho, ou uma curva simples fechada, tem uma recta tangente em cada ponto, uma superfície tem um plano tangente em cada ponto. Este plano tangente é formado pelas rectas tangentes nesse ponto às curvas contidas na superfície. Para vermos melhor como isto funciona, e porque é mais fácil trabalhar com caminhos do que com curvas, vamos primeiro convencionar que dizemos que γ é um *caminho na superfície* S se a curva parametrizada por γ está contida em S .

Ora, se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um caminho na superfície S , e se $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização local de S com $\gamma(t_0) = \sigma(u_0, v_0)$, então existe um intervalo $J \subseteq I$, contendo t_0 , tal que $\gamma(t) \in \sigma(U)$, para todo o $t \in J$. Ora, $\sigma^{-1} \circ \gamma : J \rightarrow U$ é um caminho²⁴, que representaremos por $(u(t), v(t))$, de forma que, para $t \in J$,

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)).$$

²⁴Que $\sigma^{-1} \circ \gamma$ é diferenciável, pode ser visto facilmente usando um argumento análogo ao da página 61: em cada ponto (u_0, v_0) , a matriz jacobiana de σ tem uma submatriz 2×2 invertível; se esta corresponder, por exemplo, a $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, e se $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, tomamos $g(t) = (x(t), y(t))$ e então $\sigma^{-1} \circ \gamma = h^{-1} \circ g$ é evidentemente diferenciável. Que é regular, resulta da regularidade de γ e da relação $\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$ (mais abaixo): se fosse $(\sigma^{-1} \circ \gamma)'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0)) = (0, 0)$, viria $\gamma'(t_0) = 0$.

Usando a regra da cadeia, vemos que

$$\gamma'(t) = \sigma_u(u(t), v(t)) u'(t) + \sigma_v(u(t), v(t)) v'(t),$$

ou, omitindo os parâmetros por uma questão de simplicidade,

$$\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$$

(subentende-se que γ' , u' e v' são calculadas em t e σ_u e σ_v em $(u(t), v(t))$). Esta caracterização dos caminhos em superfícies e das suas derivadas vai ser útil muitas vezes.

Por enquanto, interessa-nos reparar que, fixando-nos num ponto $P = \gamma(t_0) = \sigma(u_0, v_0)$, a derivada do caminho γ (calculada em t_0) é combinação linear de σ_u e σ_v (claro, estas calculadas em (u_0, v_0)). Reciprocamente, sejam a, b dois números reais, pelo menos um dos quais não nulo (de forma que o vector $a\sigma_u + b\sigma_v$ é não nulo); por U ser aberto, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $]u_0 - a\varepsilon, u_0 + a\varepsilon[\times]v_0 - b\varepsilon, v_0 + b\varepsilon[\subseteq U$, e podemos definir um caminho $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\gamma(t) = \sigma(u_0 + at, v_0 + bt)$; será então

$$\gamma' = \sigma_u a + \sigma_v b.$$

Resumindo: as derivadas dos caminhos em S , tomadas em $P = \sigma(u_0, v_0)$, são precisamente as combinações lineares não nulas de σ_u e σ_v , calculadas em (u_0, v_0) .

Definição 4.7. *Dadas uma superfície S e um ponto $P \in S$, o espaço (vectorial) tangente a S em P , que representaremos por $\mathcal{T}_S(P)$, é o espaço vectorial formado pelo vector nulo e pelas derivadas $\gamma'(t_0)$ dos caminhos γ em S tais que $P = \gamma(t_0)$.*

O que vimos acima diz-nos que, se $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização local de S e $P = \sigma(u_0, v_0)$, então

$$\mathcal{T}_S(P) = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$$

(σ_u e σ_v calculadas em (u_0, v_0)).

Mas, para termos a certeza de que o espaço tangente está bem definido, falta ver que é invariante por reparametrização (não queremos que, num mesmo ponto P , duas parametrizações distintas forneçam espaços tangentes distintos). Ora, se $\tilde{\sigma}$ for outra parametrização local de S , teremos

$$\langle \tilde{\sigma}_{\tilde{u}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \rangle = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle,$$

pois $\langle \tilde{\sigma}_{\tilde{u}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \rangle$ é o espaço ortogonal ao vector $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$, $\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$ é o espaço ortogonal ao vector $\sigma_u \times \sigma_v$ e estes dois vectores são colineares, devido à relação $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \text{Jac}(\sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma})(\sigma_u \times \sigma_v)$.

Repare também que a regularidade de S (isto é, a independência linear de σ_u e σ_v) nos garante que $\mathcal{T}_S(P)$ tem dimensão 2: é um plano vectorial.

Analogamente à(s) tangente(s) a uma curva num ponto, é natural considerar também o plano afim tangente a S em P :

Definição 4.8. *Dadas uma superfície S e um ponto $P \in S$, o plano (afim) tangente a S em P é o plano $P + \mathcal{T}_S(P)$.*

Mas, para todos os efeitos técnicos, é o espaço vectorial tangente que nos interessa.

Um subespaço vectorial de \mathbb{R}^3 de dimensão 2 (ou mais geralmente, um hiperplano vectorial de um espaço de dimensão n) fica completamente determinado por um vector ortogonal. Assim, analogamente ao vector tangente unitário a um caminho, definimos vector normal unitário a uma superfície:

Definição 4.9. *Dadas uma superfície S , um ponto $P \in S$, e uma parametrização (local) σ de S , com $P = \sigma(u_0, v_0)$, o vector normal unitário em P , que representaremos por $N_\sigma(P)$, é o vector*

$$\frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$$

(σ_u e σ_v calculadas em (u_0, v_0)).

Se $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$ for localmente uma reparametrização de σ , será

$$N_{\tilde{\sigma}}(P) = \frac{\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}\|} = \frac{\text{Jac } \Phi(\sigma_u \times \sigma_v)}{\|\text{Jac } \Phi(\sigma_u \times \sigma_v)\|} = \frac{\text{Jac } \Phi}{\|\text{Jac } \Phi\|} N_\sigma(P),$$

ou seja,

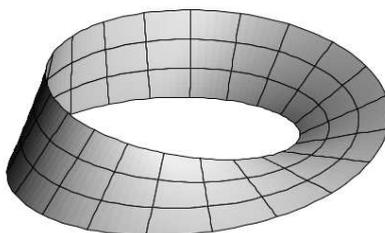
$$N_{\tilde{\sigma}}(P) = N_{\sigma}(P) \quad \text{se} \quad \text{Jac } \Phi > 0$$

e

$$N_{\tilde{\sigma}}(P) = -N_{\sigma}(P) \quad \text{se} \quad \text{Jac } \Phi < 0.$$

Definição 4.10. Uma superfície diz-se orientável se tiver um atlas \mathcal{A} tal que, para todas as parametrizações $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ em \mathcal{A} , para as quais $\sigma(U) \cap \tilde{\sigma}(\tilde{U}) \neq \emptyset$, se verifica $\text{Jac}(\sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}) > 0$.

Com um atlas nestas condições, tem-se $N_{\sigma} = N_{\tilde{\sigma}}$ em $\sigma(U) \cap \tilde{\sigma}(\tilde{U})$. Assim, se S for orientável, pode definir-se em S uma função contínua N_S que a cada P faz corresponder um vector unitário $N_S(P)$ normal a S .²⁵ O exemplo típico de uma superfície não orientável é a *fita*, ou *tira*, de Möbius; sem detalhes técnicos, esta superfície resulta de “colar” dois lados opostos de um rectângulo, depois de o “torcer”; está representada na figura seguinte.



De qualquer forma, repare que qualquer porção de superfície é orientável: tem um atlas composto por uma só parametrização.

Definição 4.11. Uma superfície orientada é uma superfície orientável S na qual está escolhida uma função N_S , que a cada $P \in S$ faz corresponder um vector $N_S(P)$ unitário, ortogonal a $\mathcal{T}_S(P)$.

Não havendo perigo de ambiguidade, escreveremos N em vez de N_S .

Exemplo 4.13. Considere a esfera S^2 com o atlas do exemplo 4.9. As contas do exemplo 4.11 dão-nos

$$N_{\sigma_1} = \frac{\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right\|} = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) = \sigma_1(u, v)$$

²⁵Se S não for orientável, pode definir-se uma função a cada $P \in S$ faz corresponder um vector unitário $N_S(P)$ normal a S , mas essa função não será contínua.

e

$$N_{\sigma_2} = \frac{\frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \right\|} = (-\cos u \cos v, \sin v, \sin u \cos v) = \sigma_2(u, v)$$

o que significa que, no caso particular de S^2 , podemos definir uma orientação pela função N_{S^2} tal que $N_{S^2}(x, y, z) = (x, y, z)$ (e, naturalmente, outra orientação pela função \tilde{N}_{S^2} tal que $\tilde{N}_{S^2}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$).

4.3 Primeira forma fundamental; comprimento e área

Sejam $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de superfície e $S = \sigma(U)$. Já vimos que, se γ é um caminho em S , existe um caminho $t \mapsto (u(t), v(t))$ tal que

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)),$$

donde

$$\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v';$$

assim,

$$\|\gamma'\|^2 = \gamma' \cdot \gamma' = (\sigma_u \cdot \sigma_u) u'^2 + 2(\sigma_u \cdot \sigma_v) u'v' + (\sigma_v \cdot \sigma_v) v'^2;$$

logo, fixando um t_0 , o comprimento de γ com origem em t_0 é

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(\sigma_u \cdot \sigma_u) u'^2 + 2(\sigma_u \cdot \sigma_v) u'v' + (\sigma_v \cdot \sigma_v) v'^2} dr.$$

Costuma-se usar a seguinte notação:

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u \quad F = \sigma_u \cdot \sigma_v \quad G = \sigma_v \cdot \sigma_v,$$

de forma que

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dr.$$

Fixando um $(u_0, v_0) \in U$, temos uma função

$$\begin{aligned} I_\sigma : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto Ea^2 + 2Fab + Gb^2, \end{aligned}$$

chamada *Primeira Forma (Quadrática) Fundamental* de σ em (u_0, v_0) .²⁶

Repare que

$$I_\sigma(a, b) = (a \ b) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Representamos por \mathcal{F}_{I_σ} a matriz $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ de I_σ , de forma que, se $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

$$I_\sigma(a, b) = A^T \mathcal{F}_{I_\sigma} A.$$

Se não houver perigo de ambigüidade, omitiremos o índice σ , escrevendo $I(a, b) = A^T \mathcal{F}_I A$.

Como

$$(\sigma_u \cdot \sigma_v)^2 = \|\sigma_u\|^2 \|\sigma_v\|^2 \cos^2 \angle(\sigma_u, \sigma_v)$$

e

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 = \|\sigma_u\|^2 \|\sigma_v\|^2 \sin^2 \angle(\sigma_u, \sigma_v),$$

temos que

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 + (\sigma_u \cdot \sigma_v)^2 = \|\sigma_u\|^2 \|\sigma_v\|^2,$$

ou seja, $\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 + F^2 = EG$, e portanto

$$\det \mathcal{F}_I = EG - F^2 = \|\sigma_u \times \sigma_v\|^2.$$

Infelizmente, a primeira forma fundamental (tal como foi definida aqui) não é invariante por reparametrização: se $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$ for (localmente) uma

²⁶Estes (a, b) destinam-se a ser interpretados como coordenadas de vectores de $\mathcal{T}_S(\sigma(u_0, v_0))$ na base (σ_u, σ_v) .

reparametrização de σ , a matriz da sua primeira forma fundamental será

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = (J\Phi)^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J\Phi,$$

ou seja,

$$\mathcal{F}_{I_{\tilde{\sigma}}} = (J\Phi)^T \mathcal{F}_{I_{\sigma}} J\Phi.^{27}$$

A primeira forma fundamental é útil em diversos problemas métricos — por exemplo, cálculo de ângulos entre curvas na superfície. No entanto, a única dessas questões que vamos ver aqui é o cálculo da área de uma porção de superfície.

Analogamente ao que fizemos para comprimento de caminhos, começamos por considerar uma aproximação da área de uma porção de superfície; e tal como então aproximámos esse comprimento por uma soma de comprimentos de segmentos de recta, agora aproximaremos esta área por uma soma de áreas de paralelogramos. Seja então σ uma parametrização da porção de superfície, e consideremos quatro pontos dessa porção, da forma $\sigma(u_0, v_0)$, $\sigma(u_0 + h, v_0)$, $\sigma(u_0, v_0 + k)$ e $\sigma(u_0 + h, v_0 + k)$ (ou seja, tais que os seus parâmetros são os vértices do rectângulo $[u_0, u_0 + h] \times [v_0, v_0 + k]$ ²⁸); se os números $|h|, |k|$ forem “muito pequenos”, esses pontos estarão próximos de ser os vértices de um paralelogramo²⁹, cuja área será uma aproximação da área de $\sigma([u_0, u_0 + h] \times [v_0, v_0 + k])$ ³⁰; mas a área de um paralelogramo cujos lados são (segmentos associados a)os vectores \vec{a}, \vec{b} é $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$ logo, neste caso, a área do paralelo-

²⁷É comum definir a primeira forma fundamental de uma forma um pouco diferente: como uma função $I_S : \mathcal{T}_S(P) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $I_S(\vec{w}) = \vec{w} \cdot \vec{w}$ (ou seja, os elementos do domínio são os próprios vectores do espaço tangente, em vez das suas coordenadas na base (σ_u, σ_v)). Nesse caso, a primeira forma fundamental é obviamente invariante por reparametrização — mas os seus coeficientes E, F, G não são. A matriz $J\Phi$ é a matriz de mudança de base de $(\tilde{\sigma}_u, \tilde{\sigma}_v)$ para (σ_u, σ_v) .

²⁸Ou, no caso de $h < 0$, do rectângulo $[u_0 + h, u_0] \times [v_0, v_0 + k]$, ou ...

²⁹Dois dos “lados” desse quase paralelogramo são o segmento que une $\sigma(u_0, v_0)$ a $\sigma(u_0 + h, v_0)$ e o segmento que une $\sigma(u_0, v_0 + k)$ a $\sigma(u_0 + h, v_0 + k)$; mas esses segmentos são “quase congruentes”, ou seja, os vectores correspondentes são “quase iguais”: $\sigma(u_0 + h, v_0 + k) - \sigma(u_0, v_0 + k) \approx h \sigma_u(u_0, v_0 + k) \approx h \sigma_u(u_0, v_0) \approx \sigma(u_0 + h, v_0) - \sigma(u_0, v_0)$.

³⁰Ver a nota 28.

gramo será

$$\begin{aligned} & \|(\sigma(u_0 + h, v_0) - \sigma(u_0, v_0)) \times (\sigma(u_0, v_0 + k) - \sigma(u_0, v_0))\| \\ &= \left\| \frac{\sigma(u_0 + h, v_0) - \sigma(u_0, v_0)}{h} \times \frac{\sigma(u_0, v_0 + k) - \sigma(u_0, v_0)}{k} \right\| |h| |k|. \end{aligned}$$

A nossa aproximação da área da porção de superfície será assim uma soma de parcelas desta forma. Ora, como

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left\| \frac{\sigma(u_0+h, v_0) - \sigma(u_0, v_0)}{h} \times \frac{\sigma(u_0, v_0+k) - \sigma(u_0, v_0)}{k} \right\| = \|\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)\|,$$

o limite $((h, k) \rightarrow (0, 0))$ dessa aproximação será

$$\iint_U \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv$$

(onde U é o domínio de σ).

Ainda como no caso do comprimento de caminhos, este argumento não pretende demonstrar nada, mas apenas motivar a seguinte definição de área de uma porção de superfície:

Definição 4.12. *Seja $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de superfície. A área da porção de superfície $\sigma(U)$ é*

$$\iint_U \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv.$$

É claro que, rigorosamente falando, esta área nem sempre existe, pois o integral pode ser divergente (exemplo simples e óbvio: a área de um plano).

Mas, existindo, a área de uma porção de superfície assim definida, é invariante por reparametrização: se $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ for uma reparametrização de σ e $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$,

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{U}} \|\tilde{\sigma}_u \times \tilde{\sigma}_v\| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} &= \iint_{\tilde{U}} \|\sigma_u \times \sigma_v\| |Jac \Phi| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \\ &= \iint_{\Phi(\tilde{U})} \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv = \iint_U \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv. \end{aligned}$$

Na prática, podemos aplicar a definição 4.12 ao cálculo da área de uma superfície que não seja simplesmente uma porção de superfície: se uma superfície S for a reunião de várias porções de superfície disjuntas (tipicamente reunidas com algumas curvas), a área de S será a soma das áreas dessas porções (as curvas não contribuem para a área total).

Exemplo 4.14. A área de S^2 é igual à área de $S^2 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \text{ e } x^2 + z^2 = 1\}$, que é (usando a parametrização σ_1 do exemplo 4.9)

$$\iint_{]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \left\| \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right\| du dv = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv du = 4\pi.$$

4.4 Segunda forma fundamental; curvatura

Nesta secção vamos estudar a curvatura de uma superfície num ponto genérico. Como veremos, é importante considerar que a superfície está orientada — e portanto, aparentemente, devemos limitar-nos a superfícies orientáveis. Mas, como nos interessa a curvatura *num ponto*, podemos antes concentrar-nos apenas numa porção de superfície que inclua esse ponto — e uma porção de superfície é sempre orientável.

No que se segue, S será uma porção de superfície orientada e P um ponto de S .

Definição 4.13. *Seja $\vec{w} \in \mathcal{T}_S(P)$. O plano normal a S em P segundo a direcção de \vec{w} é o plano*

$$P + \langle \vec{w}, N \rangle$$

(onde $N = N(P)$ é o vector normal unitário a S em P , correspondente à orientação de S).

Sejam $\vec{w} \in \mathcal{T}_S(P)$ e $\pi = P + \langle \vec{w}, N \rangle$; existe uma vizinhança V de P tal que $C = \pi \cap S \cap V$ é uma curva³¹, a que chamaremos *secção normal* de S em P segundo a direcção de \vec{w} . Como C é uma curva plana, o seu plano

³¹Consideremos um referencial ortonormado em que a origem das coordenadas é P , o eixo dos x é colinear com \vec{w} e o eixo dos z com N ; os planos $P + \mathcal{T}_S(P)$ e π terão equações $z = 0$ e $y = 0$, respectivamente; tomando uma parametrização $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de S neste referencial e calculando as suas derivadas parciais em

osculador será o plano π que a contém; portanto, o vector \vec{w} , pertencente a $\langle \vec{w}, N \rangle$ e tangente a S em P , será também tangente a C em P ; além disso, se \vec{n} for o vector normal principal de C em P , será $\vec{n} \perp \vec{w}$ e $\vec{n} \in \langle \vec{w}, N \rangle$, donde $\vec{n} // N$ e, como estes últimos são ambos unitários, $\vec{n} = \pm N$.

Definição 4.14. *Seja $\vec{w} \in \mathcal{T}_S(P)$. A curvatura normal de S em P segundo a direcção de \vec{w} é*

$$\kappa_n(\vec{w}) = \kappa_C \vec{n} \cdot N$$

onde κ_C é a curvatura (em P) da secção normal de S em P segundo a direcção de \vec{w} .

Ou seja, $\kappa_n(\vec{w}) = \kappa_C$ se $\vec{n} = N$ e $\kappa_n(\vec{w}) = -\kappa_C$ se $\vec{n} = -N$.

Sejam σ uma parametrização de S e γ uma parametrização de C por comprimento de arco com $\gamma(s_0) = P$; vamos escrever $\gamma(s) = (u(s), v(s))$. Serão $\gamma'(s_0)$ um vector unitário colinear com \vec{w} e $\gamma''(s_0) = \kappa_C \vec{n}$, donde (calculando tudo em s_0 ou $(u(s_0), v(s_0))$)

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \gamma'' \cdot N \\ &= (\sigma_{uu}u'^2 + \sigma_{uv}u'v' + \sigma_u u'' + \sigma_{vu}u'v' + \sigma_{vv}v'^2 + \sigma_v v'') \cdot N \\ &= (\sigma_{uu} \cdot N) u'^2 + 2(\sigma_{uv} \cdot N) u'v' + (\sigma_{vv} \cdot N) v'^2 \end{aligned}$$

(N é ortogonal quer a σ_u quer a σ_v). Vamos usar a seguinte notação:

$$e = \sigma_{uu} \cdot N \quad f = \sigma_{uv} \cdot N \quad g = \sigma_{vv} \cdot N,$$

de forma que

$$\kappa_n = e u'^2 + 2f u'v' + g v'^2$$

P , teremos $\sigma_u = (x_u, y_u, 0)$ e $\sigma_v = (x_v, y_v, 0)$, de forma que, escrevendo $A = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$, $|\det A| = \|\sigma_u \times \sigma_v\| \neq 0$; assim, pelo Teorema da Função Inversa, existirá localmente uma função $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ e compondo-a com σ podemos considerar uma parametrização local $(x, y) \mapsto (x, y, z(x, y))$ de S ; mas a intersecção de S com π é obtida fazendo $y = 0$ e portanto $\gamma(x) = (x, 0, z(x, 0))$ fornece um caminho que a parametriza localmente.

Por outro lado, repare que a intersecção $\pi \cap S$ não é sempre uma curva: por exemplo, se S for um cilindro e \vec{w} paralelo ao seu eixo, $\pi \cap S$ é constituída por um par de rectas paralelas (duas directrizes).

Fixando um $(u_0, v_0) \in U$, temos uma função

$$\begin{aligned} \text{II}_\sigma : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto ea^2 + 2fab + gb^2 \end{aligned}$$

chamada *Segunda Forma (Quadrática) Fundamental* de σ em (u_0, v_0) .

Repare que

$$\text{II}_\sigma(a, b) = (a \ b) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Representamos por $\mathcal{F}_{\text{II}_\sigma}$ a matriz $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ de II_σ , de forma que, se $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

$$\text{II}_\sigma(a, b) = A^T \mathcal{F}_{\text{II}_\sigma} A.$$

Se não houver perigo de ambiguidade, omitiremos o índice σ , escrevendo $\text{II}(a, b) = A^T \mathcal{F}_{\text{II}} A$.

Resumindo: se quisermos calcular a curvatura normal da (porção de) superfície $S = \sigma(U)$ em $P = \sigma(u_0, v_0)$ segundo a direção de $\vec{w} \in \mathcal{T}_S(P)$, basta-nos normalizar \vec{w} , fazendo

$$\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = a\sigma_u + b\sigma_v$$

e calcular a segunda forma fundamental de σ em P para (a, b) :

$$\kappa_n(\vec{w}) = \text{II}(a, b) = ea^2 + 2fab + gb^2$$

(naturalmente, σ_u, σ_v, e, f e g calculados em (u_0, v_0)).

Então, para termos todos os valores possíveis da curvatura normal num ponto P , necessitamos apenas de considerar as curvaturas normais segundo os vectores unitários de $\mathcal{T}_S(P)$. Ora, o conjunto $\{\vec{w} \in \mathcal{T}_S(P) : \|\vec{w}\| = 1\}$ é fechado e limitado, e κ_n (em P) é uma função real contínua³², logo tem um valor máximo e um valor mínimo nesse conjunto (e, pelo que já foi dito, em

³²As coordenadas de \vec{w} no referencial (σ_u, σ_v) , isto é a e b , são funções contínuas de \vec{w} , e II é uma função contínua de (a, b) .

todo o seu domínio $\mathcal{T}_S(P) \setminus \{0\}$.

Definição 4.15. *Aos valores máximo e mínimo da curvatura normal de S em P chamamos curvaturas principais de S em P . Às direcções dos vectores segundo os quais a curvatura normal atinge esses valores extremos chamamos direcções principais.*

Para calcularmos as curvaturas principais de $S = \sigma(U)$ em $P = \sigma(u_0, v_0)$ podemos aplicar o Método dos Multiplicadores de Lagrange a II com a condição $\|a\sigma_u + b\sigma_v\| = 1$, que é equivalente a $\text{I}(a, b) = 1$: se (a, b) for um tal ponto de extremo de II , verificar-se-á

$$\nabla \text{II}(a, b) = \lambda \nabla \text{I}(a, b) \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mas $\nabla \text{II}(a, b) = (2ea + 2fb, 2fa + 2gb)$ e $\nabla \text{I}(a, b) = (2Ea + 2Fb, 2Fa + 2Gb)$; assim, as condições a verificar são

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \text{I}(a, b) = 1,$$

ou seja, escrevendo $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{F}_{II}A = \lambda \mathcal{F}_I A \quad \text{e} \quad A^T \mathcal{F}_I A = 1.$$

A primeira condição pode ainda ser escrita como $(\mathcal{F}_{II} - \lambda \mathcal{F}_I)A = 0$, ou ainda, já que \mathcal{F}_I é invertível ($\det \mathcal{F}_I = EG - F^2 = \|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 \neq 0$),

$$(\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} - \lambda I_2)A = 0;$$

isto é, λ será um valor próprio e A um vector próprio de $\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}$. Mais ainda, a curvatura normal segundo o vector $a\sigma_u + b\sigma_v$ (que, recordemos, será uma curvatura principal) será

$$\text{II}(a, b) = A^T \mathcal{F}_{II} A = A^T (\lambda \mathcal{F}_I A) = \lambda A^T \mathcal{F}_I A = \lambda.$$

Está assim demonstrado o seguinte resultado.

Proposição 4.2. *As curvaturas principais de $S = \sigma(U)$ em P são os valores próprios da matriz $\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}$; e as direcções principais são as dos vectores cujas coordenadas na base (σ_u, σ_v) constituem vectores próprios da mesma matriz.*

Exemplo 4.15. Considere a parametrização local

$$\begin{aligned} \sigma :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u, \sin u, v) \end{aligned}$$

do cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. Os coeficientes da sua primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E &= (-\sin u, \cos u, 0) \cdot (-\sin u, \cos u, 0) = 1, \\ F &= (-\sin u, \cos u, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0, \quad G = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1, \end{aligned}$$

o vector normal unitário é

$$N = \frac{(-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)}{\|(-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)\|} = (\cos u, \sin u, 0)$$

e os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} e &= (-\cos u, -\sin u, 0) \cdot (\cos u, \sin u, 0) = -1, \\ f &= (0, 0, 0) \cdot N = 0, \quad g = (0, 0, 0) \cdot N = 0; \end{aligned}$$

logo, temos

$$\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obviamente, os valores próprios desta matriz são -1 e 0 , e $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são vectores próprios associados (respectivamente a -1 e a 0); assim, as curvaturas principais de $S^1 \times \mathbb{R}$, com a orientação dada por N , num ponto $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, são

$$\kappa_1 = -1 \quad \text{e} \quad \kappa_2 = 0$$

e as direcções principais são, respectivamente, as direcções dos vectores

$$\vec{t}_1 = 1(-\sin u, \cos u, 0) + 0(0, 0, 1) = (-\sin u, \cos u, 0)$$

e

$$\vec{t}_2 = 0(-\sin u, \cos u, 0) + 1(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

(o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ tem curvatura normal nula na direcção “vertical”, i. e., da terceira coordenada; a outra direcção principal é “horizontal” — e obviamente tangente ao cilindro — e nesta a curvatura normal é, em módulo, igual à curvatura de S^1 ; o sinal $-$ vem do facto de esta parametrização induzir um vector N “virado para fora”).

A matriz $\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}$, sendo uma matriz real 2×2 , pode (à partida) ter 0, 1 ou 2 valores próprios reais; mas como já sabemos que a curvatura normal tem um máximo e um mínimo, fica excluída a hipótese de $\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}$ não ter valores próprios reais. No caso de ter apenas um valor próprio, concluímos que esse é o valor máximo e simultaneamente mínimo da curvatura normal — isto é, nesse caso a curvatura normal é igual para todas as direcções, e assim toda a direcção é direcção principal; este caso merece um nome especial.

Definição 4.16. *Um ponto $P \in S$ para o qual todas as curvaturas normais são iguais diz-se um ponto umbílico.*

Por exemplo, todo o ponto de um plano, ou todo o ponto de uma esfera, é umbílico (exercício).

No caso de $\mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II}$ ter dois valores próprios distintos, teremos então duas curvaturas principais, κ_1 e κ_2 , associadas a duas direcções principais, que podem ser representadas por dois vectores unitários $\vec{t}_1, \vec{t}_2 \in \mathcal{T}_S(P)$.

Proposição 4.3. *Seja P um ponto não umbílico de S . Então as direcções principais de S em P são ortogonais.*

Demonstração. Sejam κ_1, κ_2 as curvaturas principais de S em P e

$$\vec{t}_1 = a_1\sigma_u + b_1\sigma_v, \quad \vec{t}_2 = a_2\sigma_u + b_2\sigma_v$$

vectores representativos das direcções principais; assim, escrevendo $T_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ e $T_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ temos

$$\mathcal{F}_{II}T_1 = \kappa_1\mathcal{F}_IT_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{II}T_2 = \kappa_2\mathcal{F}_IT_2.$$

Como

$$\begin{aligned} \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 &= (a_1\sigma_u + b_1\sigma_v) \cdot (a_2\sigma_u + b_2\sigma_v) \\ &= Ea_1a_2 + F(a_1b_2 + a_2b_1) + Gb_1b_2 = T_1^T \mathcal{F}_IT_2 \end{aligned}$$

(e, analogamente, $\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_1 = T_2^T \mathcal{F}_IT_1$) vem que

$$T_2^T \mathcal{F}_{II}T_1 = \kappa_1 T_2^T \mathcal{F}_IT_1 = \kappa_1 (\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_1) \quad \text{e} \quad T_1^T \mathcal{F}_{II}T_2 = \kappa_2 T_1^T \mathcal{F}_IT_2 = \kappa_2 (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2).$$

Mas tanto $T_2^T \mathcal{F}_{II}T_1$, sendo uma matriz 1×1 (um número real), como \mathcal{F}_{II} são matrizes simétricas, logo são iguais às suas transpostas, e portanto

$$T_2^T \mathcal{F}_{II}T_1 = T_1^T \mathcal{F}_{II}^T T_2 = T_1^T \mathcal{F}_{II}T_2,$$

ou seja,

$$\kappa_1 (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2) = \kappa_1 (\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_1) = \kappa_2 (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2),$$

donde, se $\kappa_1 \neq \kappa_2$, vem que $\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = 0$. □

Vamos agora definir duas novas medidas da curvatura de uma superfície num ponto.

Definição 4.17. *Sejam κ_1, κ_2 as curvaturas principais de S em P . A curvatura gaussiana de S em P é*

$$K = \kappa_1\kappa_2$$

e a curvatura média de S em P é

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Repare que, se trocarmos a orientação de S , o sinal de ambas as curvaturas

principais mudam, de forma que a curvatura média também muda de sinal, mas a curvatura gaussiana não.

A curvatura gaussiana goza de propriedades muito interessantes, mas aqui vamos usá-la apenas para classificar os pontos de uma superfície:

Definição 4.18. *Seja K a curvatura gaussiana de S em P . O ponto P diz-se*

- *um ponto elíptico se $K > 0$;*
- *um ponto hiperbólico se $K < 0$;*
- *um ponto parabólico se $K = 0$ e $H \neq 0$;*
- *um ponto planar se $K = H = 0$.*

P é elíptico se as curvaturas principais forem ambas positivas ou ambas negativas — o que significa que os vectores normais principais de todas as secções normais por P têm o mesmo sentido; o exemplo típico de ponto elíptico é um ponto qualquer de um elipsóide.

P é hiperbólico se uma curvatura principal for positiva e outra negativa — o que significa que há secções normais por P com vectores normais principais com sentidos opostos; um exemplo de ponto hiperbólico é um ponto qualquer de um hiperbolóide de uma folha.

P é parabólico se uma curvatura principal (e só uma) for nula — o que significa que uma (e uma só) secção normal por P não tem vector normal principal; o exemplo típico é um ponto qualquer de um cilindro circular.

P é planar se ambas as curvaturas principais forem nulas — o que significa que nenhuma secção normal por P tem vector normal principal; o exemplo óbvio é um ponto qualquer de um plano.³³

³³Mas atenção: um ponto pode ser planar sem que a superfície seja (nem sequer localmente) plana — ou seja, sem que a superfície (nem sequer numa vizinhança do ponto) esteja contida num plano: por exemplo, no cilindro de equação $y = x^4$, que pode ser parametrizado por $\sigma(u, v) = (u, u^4, v)$, os pontos da recta $x = 0, y = 0$ são planares (exercício).

Tópicos de Geometria – 2010/2011

Parte III Análise Vectorial

Nesta última parte vamos calcular integrais de funções vectoriais ao longo de caminhos e curvas e em superfícies.

5 Integrais de linha

5.1 Integrais de campos de vectores ao longo de caminhos e curvas

Na Parte II (Geometria Diferencial) convencionámos que “caminho” significaria “caminho C^1 regular” e “curva” significaria “curva C^1 regular”. Mas, para o que queremos fazer nesta última parte, essas condições são demasiado fortes. Assim, essas convenções serão substituídas por outras.

Definição 5.1. *A um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (ou seja, a um caminho cujo domínio é um intervalo fechado) chamamos um caminho compacto.*

Uma curva é compacta se tem uma parametrização compacta.

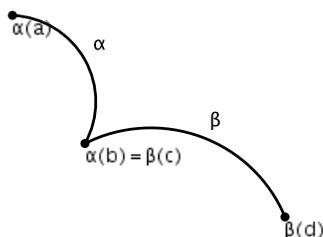
Exemplo 5.1. A circunferência S^1 é uma curva compacta, pois é a imagem do caminho compacto $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Mas atenção: S^1 é também a imagem do caminho não compacto $\gamma|_{[0, 2\pi[}$.

A partir de agora consideraremos apenas caminhos e curvas compactos, C^1 regulares por pedaços (ou seja, C^1 e regulares excepto num número finito, possivelmente 0, de pontos). Será essa precisamente a convenção adoptada: “caminho” quererá dizer “caminho compacto C^1 regular por pedaços” e “curva” quererá dizer “curva compacta C^1 regular por pedaços”.

Para reduzir facilmente o tratamento destes caminhos e curvas ao caso C^1 regular, vamos definir a concatenação de dois caminhos compactos tais que o ponto final de um é igual ao ponto inicial do outro.

Definição 5.2. Dados dois caminhos $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $\alpha(b) = \beta(c)$, o caminho $\alpha + \beta$ é a aplicação $[a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $(\alpha + \beta)(t) = \alpha(t)$ se $a \leq t \leq b$ e $(\alpha + \beta)(t) = \beta(t - b + c)$ se $b < t \leq b + d - c$.

Isto é, $\alpha + \beta$ corresponde exactamente a α de a até b e reproduz β de b até $b + d - c$.



É claro que, se α e β forem C^1 regulares, $\alpha + \beta$ será C^1 regular por pedaços, sendo $t = b$ o único ponto de (eventual) não derivabilidade, não continuidade ou anulamento da derivada. Reciprocamente, se γ for C^1 regular por pedaços, será

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n,$$

com cada γ_i de classe C^1 e regular.

No que se segue a maior parte dos raciocínios será desenvolvida para caminhos (e curvas) C^1 regulares, devendo o leitor convencer-se de que podem ser estendidos ao caso C^1 regular por pedaços (por se aplicarem directamente a cada pedaço C^1).

Definição 5.3. Um campo de vectores em \mathbb{R}^n é uma função $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^n .

Vamos considerar apenas campos de vectores contínuos.

Vamos também assumir que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$ (na sequência de as definições da parte II serem em \mathbb{R}^2 e/ou \mathbb{R}^3).

Definição 5.4. Dados um campo de vectores contínuo $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ de classe C^1 , o integral de F ao longo de γ , representado por

$$\int_{\gamma} F \cdot dr,$$

é o integral

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Repare que, sendo F contínuo e γ de classe C^1 (e portanto γ' de classe C^0), a função real $t \mapsto F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ é contínua, e portanto este integral existe.

Frequentemente, escrevendo $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ ou $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, consoante $n = 2$ ou $n = 3$ respectivamente, escreve-se também

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = \int_{\gamma} Pdx + Qdy \quad \text{ou} \quad \int_{\gamma} F \cdot dr = \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

respectivamente. Informalmente, estas notações podem ser motivadas dizendo que (no caso $n = 2$; $n = 3$ é análogo) fazemos $r = \gamma(t) = (x, y)$ e portanto $F \cdot dr = F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = (P, Q) \cdot (dx, dy) = Pdx + Qdy$.³⁴

Quanto à própria definição deste tipo de integral (normalmente chamado *integral de linha*), é habitualmente motivada recorrendo ao conceito físico de trabalho desenvolvido por uma força (representada pelo campo de vectores) sobre uma partícula que se move (descrevendo o caminho γ): para uma deslocação suficientemente pequena para ser aproximada por um segmento de recta (e suficientemente pequena para F ser aproximadamente constante), esse trabalho é considerado como sendo medido pelo produto interno do vector força pelo vector deslocamento; como esse deslocamento é $\gamma(t_1) - \gamma(t_0) = \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}(t_1 - t_0)$, o somatório dos produtos internos de F (calculado por exemplo no momento inicial de cada deslocamento) por estes deslocamentos será

$$\sum_i F(\gamma(t_i)) \cdot \frac{\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)}{t_{i+1} - t_i}(t_{i+1} - t_i)$$

e o limite deste somatório (quando cada $t_{i+1} - t_i$ tende para zero) será

³⁴Mais formalmente, seria necessário falar em *formas diferenciais*: uma introdução elementar aparece em [Marsden, Tromba, sec. 8.6]; um tratamento mais avançado pode ser consultado em [EL Lima, cap. 4 §1; cap. 7 §1-2]; pode consultar também [FR Dias Agudo, §2.6-2.7].

$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$. Uma motivação mais matemática para a razoabilidade desta definição aparecerá mais adiante.

Vamos agora estender esta definição a caminhos C^1 por pedaços — isto é, à concatenação de caminhos C^1 . Imagine que acontece $\alpha + \beta$ ser ainda C^1 , será (pela definição de $\alpha + \beta$ e pelas propriedades dos integrais de funções reais, e usando as letras da definição 5.2)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha+\beta} F \cdot dr &= \int_a^{b+d-c} F((\alpha + \beta)(t)) \cdot (\alpha + \beta)'(t) dt \\ &= \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt + \int_b^{b+d-c} F(\beta(t-b+c)) \cdot \beta'(t) dt \\ &= \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt + \int_c^d F(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt \\ &= \int_{\alpha} F \cdot dr + \int_{\beta} F \cdot dr \end{aligned}$$

Isto mostra que a seguinte definição faz sentido.

Definição 5.5. *Dados um campo de vectores contínuo $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ de classe C^1 por pedaços, com $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ e cada γ_i de classe C^1 ($1 \leq i \leq n$), o integral de F ao longo de γ é*

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = \int_{\gamma_1} F \cdot dr + \int_{\gamma_2} F \cdot dr + \dots + \int_{\gamma_n} F \cdot dr.$$

Vamos agora examinar o que acontece quando se passa de um caminho γ para uma sua reparametrização. Aqui a orientação é um dado fundamental. Se $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma reparametrização de $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com a mesma orientação, isto é, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu$ com $\mu' > 0$ (onde $\tilde{\gamma}'$ existir), teremos, fazendo $t = \mu(u)$ (de forma que “ $dt = \mu'(u) du$ ”),

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} F \cdot dr &= \int_c^d F(\tilde{\gamma}(u)) \cdot \tilde{\gamma}'(u) du = \int_c^d F(\gamma \circ \mu(u)) \cdot \gamma'(\mu(u)) \mu'(u) du = \\ &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} F \cdot dr. \end{aligned}$$

(É claro que, para sermos rigorosos, deveríamos dividir estes integrais em

integrais ao longo de intervalos onde $\tilde{\gamma}$, γ e μ sejam C^1 e somá-los; mas já foi dito que, por simplicidade, estes cálculos/raciocínios serão geralmente desenvolvidos apenas nos casos em que as funções envolvidas são C^1 .)

Assim, a definição seguinte faz sentido.

Definição 5.6. *Dados um campo de vectores contínuo $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma curva $C \subseteq U$ orientada, o integral de F em C , representado por*

$$\int_C F \cdot dr,$$

é o integral $\int_\gamma F \cdot dr$, onde γ é uma parametrização de C (com a orientação considerada).

Repare que, se γ e $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu$ tiverem orientações opostas, será $b = \mu(c)$ e $a = \mu(d)$, de forma que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} F \cdot dr &= \int_c^d F(\tilde{\gamma}(u)) \cdot \tilde{\gamma}'(u) du = \int_c^d F(\gamma \circ \mu(u)) \cdot \gamma'(\mu(u))\mu'(u) du = \\ &= \int_b^a F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_\gamma F \cdot dr. \end{aligned}$$

Se representarmos por C^+ e C^- a curva C com duas orientações opostas, teremos

$$\int_{C^+} F \cdot dr = - \int_{C^-} F \cdot dr.$$

5.2 Campos conservativos e campos de gradientes

Vamos ver dois tipos de campos de vectores com propriedades especiais, e relacioná-los (verificando que afinal correspondem aos mesmos campos de vectores). Mas antes é necessário definir caminho fechado.

Definição 5.7. *Um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se fechado se $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Definição 5.8. *Um campo de vectores $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se conservativo se, para todo o caminho fechado $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, $\int_\gamma F \cdot dr = 0$.*

Os campos conservativos têm a propriedade de que o seu integral ao longo de uma curva orientada depende apenas dos pontos inicial e final desta:

Proposição 5.1. *Sejam $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo conservativo e $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ e $\beta : [c, d] \rightarrow U$ dois caminhos tais que $\alpha(a) = \beta(c)$ e $\alpha(b) = \beta(d)$; então*

$$\int_{\alpha} F \cdot dr = \int_{\beta} F \cdot dr.$$

Demonstração. Representemos por $(-\beta)$ um caminho que parametrize a mesma curva que β , mas com orientação oposta³⁵, e por $\alpha - \beta$ o caminho $\alpha + (-\beta)$; então $\alpha - \beta$ é um caminho fechado (o seu ponto inicial é $\alpha(a)$ e o seu ponto final é $\beta(c)$, que são coincidentes). Mas então, sendo F um campo conservativo, temos

$$0 = \int_{\alpha - \beta} F \cdot dr = \int_{\alpha} F \cdot dr + \int_{(-\beta)} F \cdot dr = \int_{\alpha} F \cdot dr - \int_{\beta} F \cdot dr. \quad \square$$

Vamos agora ver o outro tipo especial de campos de vectores.

Definição 5.9. *Um campo de vectores $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se de gradientes se existir uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$.*

Uma tal função f é uma primitiva, ou um potencial, do campo F .

Teorema 5.2. *Sejam $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de gradientes, com $F = \nabla f$, e $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ um caminho; então*

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Equivalentemente, se C for uma curva em U orientada com ponto inicial A e ponto final B ,

$$\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A).$$

Demonstração. Seja $[a, b]$ o domínio de γ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (no caso de $n = 2$; o caso $n = 3$ é análogo); repare que

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t_0)) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t_0)) \frac{dy}{dt}(t_0) = (\nabla f \circ \gamma)(t_0) \cdot \gamma'(t_0)$$

³⁵Por exemplo: $(-\beta) : [c, d] \rightarrow U$, com $(-\beta)(t) = \beta(c + d - t)$.

e portanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot dr &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (\nabla f \circ \gamma)(t) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a). \quad \square \end{aligned}$$

A igualdade

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A)$$

sugere (sem necessidade de recorrer a conceitos físicos) que a definição de integral de linha é razoável, já que este funciona como o operador inverso do gradiente, tal como a integração e derivação de funções $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são operações inversas.

Mas esta proposição tem ainda uma outra consequência interessante: se $F = \nabla f$ e se γ for um caminho fechado ($\gamma(a) = \gamma(b)$), vem que

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0.$$

Ou seja,

Corolário 5.3. *Todo o campo de gradientes é conservativo.*

Mas, na realidade, todo o campo de vectores contínuo conservativo é também um campo de gradientes.

Teorema 5.4. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (onde U é um aberto de \mathbb{R}^n) um campo de vectores contínuo; então as seguintes condições são equivalentes:*

1. F é conservativo;
2. para todos os caminhos $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ e $\beta : [c, d] \rightarrow U$ tais que $\alpha(a) = \beta(c)$ e $\alpha(b) = \beta(d)$, $\int_{\alpha} F \cdot dr = \int_{\beta} F \cdot dr$;
3. F é um campo de gradientes.

Demonstração. Basta ver que 1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1. Mas 1. \Rightarrow 2. já foi visto (proposição 5.1), assim como 3. \Rightarrow 1. (corolário 5.3). Falta apenas ver 2. \Rightarrow 3.

Suponhamos então que o integral de F ao longo de uma curva orientada depende apenas dos pontos inicial e final desta; queremos ver que F é um campo de gradientes.

Inicialmente vamos supor também que U é conexo por arcos.

Fixemos um ponto $A \in U$, e definamos a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma: para cada $X \in U$,

$$f(X) = \int_{\gamma} F \cdot dr,$$

onde $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ é um qualquer caminho com $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = X$ (por U ser conexo por arcos um tal caminho existe e pela primeira suposição f fica bem definida). Vamos ver que $\nabla f = F$.

Supondo $n = 2$ (o caso $n = 3$ é perfeitamente análogo), vamos escrever $F = (P, Q)$, de forma que queremos verificar $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$. Ora,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

e

$$f(x+h, y) - f(x, y) = \int_{\alpha} F \cdot dr - \int_{\beta} F \cdot dr,$$

onde $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ é um caminho com $\alpha(a) = A$ e $\alpha(b) = X = (x, y)$ e $\beta : [c, d] \rightarrow U$ é um caminho com $\beta(c) = A$ e $\beta(d) = X + (h, 0)$. Como β é um caminho qualquer nestas condições, podemos tomar $\beta = \alpha + \gamma$, onde $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ é um caminho com $\gamma(0) = X$ e $\gamma(1) = X + (h, 0)$ (isto é, γ percorre primeiro a curva parametrizada por α , de A a X , e depois percorre alguma curva em U de X a $X + (h, 0)$), de forma que

$$\int_{\alpha} F \cdot dr - \int_{\beta} F \cdot dr = \int_{\gamma} F \cdot dr.$$

Como U é aberto, contém alguma bola centrada em X , e para o cálculo do limite acima podemos considerar só valores de h tais que $X + (h, 0)$ esteja contido nessa bola, e portanto tais que o segmento de recta com extremos X

e $X + (h, 0)$ está contido em U ; podemos então tomar

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow U \\ t &\mapsto X + t(h, 0) \end{aligned} ;$$

virá

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot dr &= \int_0^1 (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) \cdot (h, 0) dt = \int_0^1 P(\gamma(t)) h dt \\ &= \int_0^1 P(x + ht, y) h dt = \int_0^h P(x + u, y) du \end{aligned}$$

(fazendo a mudança de variável $u = ht$); $u \mapsto P(x + u, y)$ é uma função contínua $[0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ ou $[h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ (consoante $h > 0$ ou $h < 0$) que tem portanto uma primitiva p , de forma que

$$\int_0^h P(x + u, y) du = p(h) - p(0)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(h) - p(0)}{h} = \left. \frac{dp}{du} \right|_{u=0} = P(x, y).$$

Analogamente se pode verificar que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y)$. Assim,

$$\nabla f = F.$$

Se U não for conexo por arcos, será $U = U_0 \cup U_1 \cup \dots$, onde cada U_i é conexo por arcos; podemos então definir f por “ramos”, em cada U_i fixando um ponto A_i e repetindo o raciocínio acima. \square

Como reconhecer se um dado campo de vectores é conservativo/de gradientes? A próxima proposição fornece um teste de eliminação, para campos C^1 .

Proposição 5.5. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de gradientes de classe C^1 ; então a matriz jacobiana de F é simétrica em todos os pontos de U .*

Demonstração. Seja f um potencial de F ; então f é de classe C^2 e portanto

a sua matriz hessiana é simétrica; mas a matriz hessiana de f é a matriz jacobiana de F . \square

Assim, se $F = (P, Q)$ for de classe C^1 , para ser um campo de gradientes terá de acontecer

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

(pois, sendo $F = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, esta condição é equivalente a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$); e se $F = (P, Q, R)$ for de classe C^1 , para ser um campo de gradientes terá de acontecer

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Veremos (em parte na próxima secção e em parte na secção 6.2) que a implicação recíproca (JF simétrica $\Rightarrow F$ conservativo) é válida desde que o domínio de U seja *simplesmente conexo* (isto é, desde que qualquer curva fechada em U possa ser contraída continuamente até um ponto); mas não é válida em geral:

Exemplo 5.2. Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

Tem-se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

no entanto, sendo S^{1+} a circunferência S^1 orientada no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, por exemplo parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \int_{S^{1+}} F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\right) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

O conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ não é simplesmente conexo: S^1 não pode ser contraída continuamente até um ponto em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Veremos na próxima secção

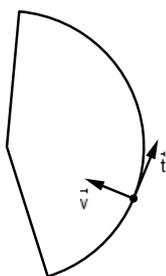
que a “falha” aqui, mais especificamente, é a seguinte: o domínio de F não inclui o ponto $(0, 0)$ e este pertence à região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ delimitada por S^1 .

5.3 Teorema de Green

Definição 5.10. Uma curva simples fechada é a imagem de um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$ e $\gamma|_{[a, b]}$ é uma aplicação injetiva.³⁶

É intuitivamente óbvio (embora não seja simples de provar) que qualquer curva simples fechada em \mathbb{R}^2 é a fronteira de duas regiões disjuntas de \mathbb{R}^2 : uma interior e outra exterior. Diremos que a região interior é *delimitada* pela curva simples fechada.

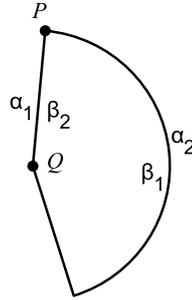
Diremos também que a curva simples fechada está *orientada positivamente* quando é percorrida no sentido “contrário ao dos ponteiros do relógio”; isto é, quando selecionamos a orientação tal que, se nos colocarmos num qualquer ponto da curva, olhando no sentido do vector tangente unitário, a região delimitada pela curva fica “à esquerda”; ou, dito ainda de outro modo, quando selecionamos a orientação tal que, em cada ponto da curva, o vector tangente unitário \vec{t} e um vector normal \vec{v} que aponte no sentido da região delimitada pela curva formam uma base (\vec{t}, \vec{v}) de \mathbb{R}^2 com orientação positiva.



Formalmente, para cada curva simples fechada há infinitas orientações positivas, que diferem entre si no ponto inicial (e final) considerado. Mas essa diferença é irrelevante para o cálculo de um integral ao longo da curva: se

³⁶Recorde que uma curva simples aberta é a imagem de um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ injetivo. Poderíamos definir *curva simples* como uma curva que é simples aberta ou simples fechada.

$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ forem duas parametrizações da curva simples fechada C , ambas determinando orientação positiva, mas com $\alpha(a) = \alpha(b) = P \neq Q = \beta(c) = \beta(d)$, podemos dividir C em duas curvas simples abertas com extremos P e Q , parametrizadas por restrições α_1, α_2 de α e β_2, β_1 de β , de forma que $\int_{\alpha} F \cdot dr = \int_{\alpha_1} F \cdot dr + \int_{\alpha_2} F \cdot dr = \int_{\beta_2} F \cdot dr + \int_{\beta_1} F \cdot dr = \int_{\beta_1} F \cdot dr + \int_{\beta_2} F \cdot dr = \int_{\beta} F \cdot dr$. Assim, faz sentido falar em $\int_{C^+} F \cdot dr$, onde C^+ representa C com uma (qualquer) orientação positiva.



Teorema 5.6 (Green). *Sejam U um aberto limitado de \mathbb{R}^2 , cuja fronteira é uma curva simples fechada C , V um outro aberto de \mathbb{R}^2 com $\bar{U} \subseteq V$, e $F = (P, Q) : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vectores de classe C^1 ; então*

$$\int_{C^+} F \cdot dr = \iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

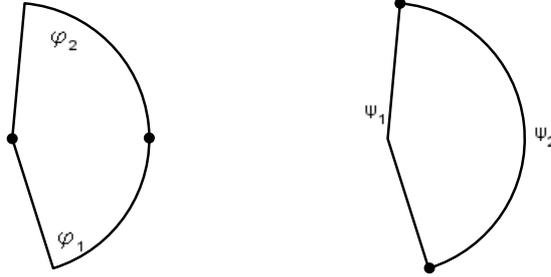
(onde C^+ representa a curva C orientada positivamente).

Demonstração. Não vamos dar uma demonstração completa, mas indicaremos como poderia ser obtida.

Vamos supor inicialmente que a região U pode ser descrita das duas formas seguintes:

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \text{ e } \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < d \text{ e } \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\} \end{aligned}$$

para alguns $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e algumas funções $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$.



Considere então os seguintes caminhos, baseados na primeira das duas descrições de U :

$$\begin{aligned} \alpha_1 : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \alpha_2 : [\varphi_1(b), \varphi_2(b)] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x, \varphi_1(x)) & y &\mapsto (b, y) \\ \\ \alpha_3 : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \alpha_4 : [\varphi_1(a), \varphi_2(a)] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x, \varphi_2(x)) & y &\mapsto (a, y) \end{aligned}$$

(α_2 e α_4 só existem se a curva C incluir algum segmento de recta vertical, no “extremo esquerdo” ou “extremo direito”, respectivamente; senão $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ e/ou $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$); usando a notação da demonstração da proposição 5.1, o caminho

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$$

(ou $\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4$, ou $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$, ou $\alpha_1 - \alpha_3$ caso α_2 e/ou α_4 não exista) parametriza a curva C , com orientação positiva.

Como é claro,

$$\int_{C^+} F \cdot dr = \int_{C^+} (P, Q) \cdot dr = \int_{C^+} (P, 0) \cdot dr + \int_{C^+} (0, Q) \cdot dr.$$

Vamos calcular $\int_{C^+} (P, 0) \cdot dr$ usando a parametrização $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$:

$$\begin{aligned} \int_{C^+} (P, 0) \cdot dr &= \int_{\alpha_1} (P, 0) \cdot dr + \int_{\alpha_2} (P, 0) \cdot dr - \int_{\alpha_3} (P, 0) \cdot dr - \int_{\alpha_4} (P, 0) \cdot dr \\ &= \int_a^b (P(x, \varphi_1(x)), 0) \cdot (1, \varphi_1'(x)) dx + \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} (P(b, y), 0) \cdot (0, 1) dy \\ &\quad - \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)), 0) \cdot (1, \varphi_2'(x)) dx - \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} (P(a, y), 0) \cdot (0, 1) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx + 0 - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx - 0 \\
&= \int_a^b (P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))) dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\iint_U \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b [P(x, y)]_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx \\
&= \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\int_{C^+} (P, 0) \cdot dr = - \iint_U \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

De forma análoga se poderia usar a segunda descrição de U para parametrizar C e seguidamente calcular $\int_{C^+} (0, Q) \cdot dr$ e $\iint_U \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$; a conclusão seria

$$\int_{C^+} (0, Q) \cdot dr = \iint_U \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

e portanto

$$\int_{C^+} F \cdot dr = \int_{C^+} (P, 0) \cdot dr + \int_{C^+} (0, Q) \cdot dr = \iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

O Teorema de Green está assim provado para regiões que podem ser descritas das duas formas indicadas no início da demonstração. Vamos agora estendê-lo a regiões que podem ser decompostas em regiões dessas.

Suponhamos que U_1 e U_2 são duas regiões, delimitadas pelas curvas C_1 e C_2 respectivamente, tais que o Teorema de Green é válido para cada uma delas; isto é, tais que para qualquer campo $F = (P, Q)$ de classe C^1 ,

$$\int_{C_1^+} F \cdot dr = \iint_{U_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{e} \quad \int_{C_2^+} F \cdot dr = \iint_{U_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy;$$

suponhamos ainda que U_1 e U_2 são disjuntas, mas C_1 e C_2 têm intersecção não vazia, e essa intersecção é uma curva C_3 , de modo que a curva $C =$

$(C_1 \cup C_2) \setminus C_3$ é a fronteira da região $U = U_1 \cup U_2$.³⁷ Parametrizando C_1^+ com $\alpha + \gamma$, de forma que γ é uma parametrização de C_3 , C_2^+ terá uma parametrização da forma $\beta - \gamma$ (pois C_3 terá de ser percorrida em sentidos inversos para C_1^+ e C_2^+ — basta reparar que, em cada ponto, os vectores normais \vec{v}_1, \vec{v}_2 que apontam para U_1, U_2 têm de ter sentidos opostos); então, $\alpha + \beta$ será uma parametrização de C^+ e

$$\begin{aligned} \int_{C^+} F \cdot dr &= \int_{\alpha} F \cdot dr + \int_{\beta} F \cdot dr \\ &= \int_{\alpha} F \cdot dr + \int_{\gamma} F \cdot dr + \int_{\beta} F \cdot dr - \int_{\gamma} F \cdot dr \\ &= \int_{C_1^+} F \cdot dr + \int_{C_2^+} F \cdot dr. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{U_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{U_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

e portanto

$$\int_{C^+} F \cdot dr = \iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy;$$

ou seja, o Teorema de Green é válido para U .

Restaria ver que qualquer região U delimitada por uma curva simples fechada C pode ser decomposta em regiões que podem ser descritas das duas formas indicadas no início da demonstração. Essa possibilidade pode ser comprovada em casos particulares (e pode ser elucidativo fazê-lo). Mas em vez de tentar ver que a possibilidade é mesmo geral, repare que qualquer triângulo pode ser descrito dessas duas formas; e, como qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos, o Teorema de Green é válido para qualquer polígono. Então, considere uma aproximação poligonal C_n de C com n lados

³⁷Esta frase não está correcta; para C ser efectivamente uma curva e igual à fronteira de U (que deve ser um conjunto aberto), deveria ser: a curva $C = \overline{(C_1 \cup C_2) \setminus C_3}$ é a fronteira da região $U = \overline{U_1 \cup U_2}$; mas a diferença entre $(C_1 \cup C_2) \setminus C_3$ e $\overline{(C_1 \cup C_2) \setminus C_3}$ são dois pontos, que não afectam um integral ao longo de C , e a diferença entre $U_1 \cup U_2$ e $\overline{U_1 \cup U_2}$ é uma curva, que não afecta um integral em U .

(ou seja, uma curva poligonal com n vértices, todos pertencentes a C); C_n delimitará uma região U_n ; e será

$$\int_{C_n^+} F \cdot dr = \iint_{U_n} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy;$$

ora, quando $n \rightarrow +\infty$, o integral da esquerda tende para $\int_{C^+} F \cdot dr$, e o da direita para $\iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$. \square

Como uma primeira aplicação do Teorema de Green, vejamos a implicação “ JF simétrica $\Rightarrow F$ conservativo” para campos de vectores em \mathbb{R}^2 com domínios simplesmente conexos. Mas primeiro vamos definir formalmente “conjunto simplesmente conexo”.

Definição 5.11. *Um conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se simplesmente conexo se for conexo por arcos e, dado qualquer caminho fechado $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, existir uma função contínua $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ tal que a aplicação $t \mapsto H(t, 1)$ é igual a γ , para cada $u_0 \in]0, 1[$, a aplicação $t \mapsto H(t, u_0)$ é um caminho fechado e a aplicação $t \mapsto H(t, 0)$ é constante.*

Esta definição não faz mais do que formalizar a ideia (que já tinha sido referida) de que um conjunto U é simplesmente conexo se toda a curva fechada em U pode ser contraída continuamente até um ponto (sem sair de U , evidentemente). O que é importante aqui é reparar que se $U \subseteq \mathbb{R}^2$ for simplesmente conexo, e se C for uma curva simples fechada em U , então a região delimitada por C está contida em U .

Mais adiante será útil o seguinte facto, simples de verificar: se X é simplesmente conexo e f é um homeomorfismo, então $f(X)$ é também simplesmente conexo.

Proposição 5.7. *Sejam U um aberto simplesmente conexo de \mathbb{R}^2 e $F = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vectores de classe C^1 ; suponhamos que, em todo o ponto de U , se verifica $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$; então F é um campo conservativo.*

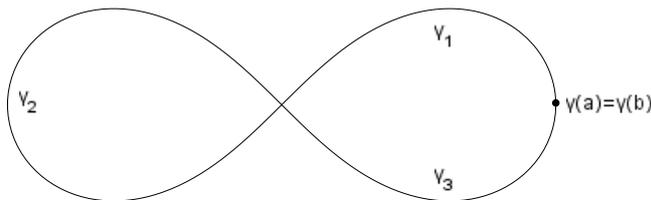
Demonstração. Seja γ um caminho fechado em U ; queremos provar que $\int_{\gamma} F \cdot dr = 0$.

Vamos supor inicialmente que γ é simples — ou seja, que a curva C parametrizada por γ é simples fechada. Então C delimita uma região V , e por U ser simplesmente conexo, tem-se $V \subseteq U$. Assim,

$$\int_{C^+} F \cdot dr = \iint_V \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_V 0 dx dy = 0;$$

e, como $\int_{\gamma} F \cdot dr = \int_{C^+} F \cdot dr$ ou $\int_{\gamma} F \cdot dr = -\int_{C^+} F \cdot dr$, vem $\int_{\gamma} F \cdot dr = 0$.

Se γ não for simples, podemos dividir a curva C parametrizada por γ em curvas simples fechadas, e aplicar o raciocínio anterior a cada uma delas. Não vamos entrar em detalhes, mas pode ver que, na situação representada abaixo, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (γ_2 com o sentido dos ponteiros do relógio e γ_1 e γ_3 com o sentido oposto ao dos ponteiros do relógio) e



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot dr &= \int_{\gamma_1} F \cdot dr + \int_{\gamma_2} F \cdot dr + \int_{\gamma_3} F \cdot dr \\ &= \int_{\gamma_1 + \gamma_3} F \cdot dr + \int_{\gamma_2} F \cdot dr = 0 + 0 = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Pode agora reparar que o que falhava no exemplo 5.2 (pág. 88) era que o Teorema de Green não se podia aplicar: a região delimitada por S^1 não estava contida no domínio de F .

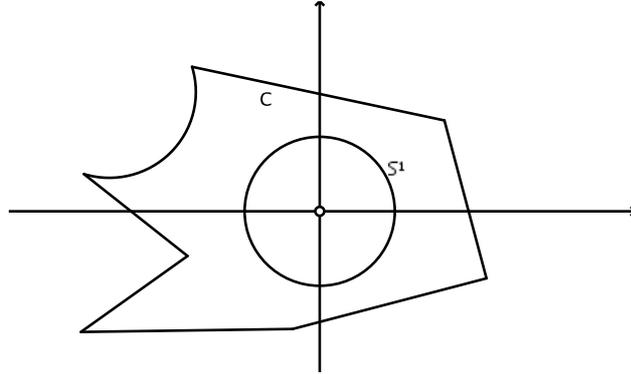
Mas o Teorema de Green pode ser útil mesmo em situações em que o domínio de um campo de vetores não é simplesmente conexo.

Exemplo 5.3. Considere outra vez o campo de vetores F do exemplo 5.2; recorde que o domínio de F é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e a sua matriz jacobiana é simétrica. Considere ainda uma curva simples fechada K contida no primeiro quadrante $Q_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$. O conjunto Q_1 é simplesmente conexo,

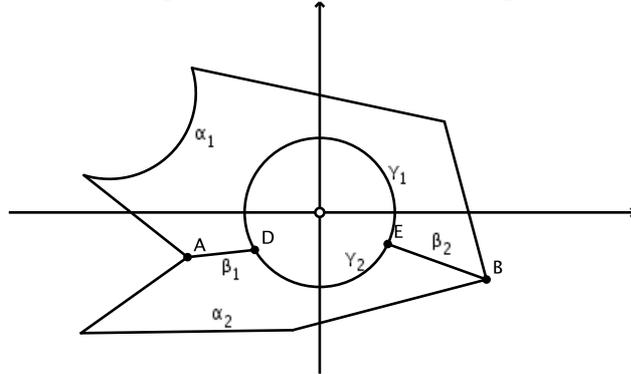
logo o campo $F|_{Q_1}$ é conservativo:

$$\int_{K^+} F \cdot dr = \int_{K^+} F|_{Q_1} \cdot dr = 0.$$

Exemplo 5.4. Continuando com o campo F do exemplo 5.2: considere a circunferência S^1 e uma outra curva simples fechada C , tal que o ponto $(0, 0)$ pertence à região delimitada por C .



Imagine que quer calcular $\int_{C^+} F \cdot dr$. Como a matriz jacobiana de F é simétrica, se $(0, 0)$ não pertencesse à região delimitada por C , este integral seria nulo. Já sabemos que neste caso isso não funciona, mas podemos fazer o seguinte: seleccionemos dois pontos A, B de C e dois pontos D, E de S^1 ;



consideremos caminhos α_1, α_2 e γ_1, γ_2 tais que $\alpha_1 + \alpha_2$ parametriza C^+ (α_1 de B até A e α_2 de A até B) e $\gamma_1 + \gamma_2$ parametriza S^{1+} (γ_1 de E até D e γ_2 de D até E); consideremos ainda um caminho β_1 de A até D e um caminho β_2 de E até B . Teremos que $\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 + \beta_2$ e $\alpha_2 - \beta_2 - \gamma_2 - \beta_1$ parametrizam duas

curvas simples fechadas que delimitam regiões onde F está definido. Assim,

$$\int_{\alpha_1+\beta_1-\gamma_1+\beta_2} F \cdot dr = 0 = \int_{\alpha_2-\beta_2-\gamma_2-\beta_1} F \cdot dr.$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_{C^+} F \cdot dr - \int_{S^{1+}} F \cdot dr &= \int_{\alpha_1+\alpha_2} F \cdot dr - \int_{\gamma_1+\gamma_2} F \cdot dr \\ &= \int_{\alpha_1} F \cdot dr + \int_{\alpha_2} F \cdot dr + \int_{\beta_1} F \cdot dr - \int_{\beta_1} F \cdot dr \\ &\quad + \int_{\beta_2} F \cdot dr - \int_{\beta_2} F \cdot dr - \int_{\gamma_1} F \cdot dr - \int_{\gamma_2} F \cdot dr \\ &= \int_{\alpha_1+\beta_1-\gamma_1+\beta_2} F \cdot dr + \int_{\alpha_2-\beta_2-\gamma_2-\beta_1} F \cdot dr \\ &= 0; \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{C^+} F \cdot dr = \int_{S^{1+}} F \cdot dr = 2\pi.$$

6 Integrais de superfície

6.1 Integrais de campos de vectores em porções de superfície

Nesta secção vamos definir integral de um campo de vectores sobre uma porção de superfície orientada. A limitação a porções de superfície deve-se apenas a uma questão de simplicidade: com um pouco mais de trabalho, é perfeitamente possível estender a definição que daremos a integral de um campo de vectores sobre uma superfície orientada. Mas a limitação a (porções de) superfícies *orientadas* é essencial (repare que também no caso de curvas definimos integral ao longo de uma curva *orientada*).

Tal como na parte II, sempre que dissermos que S é uma porção de superfície orientada e σ uma parametrização de S , quereremos dizer que σ determina essa orientação (a não ser que algo seja dito em contrário).

Definição 6.1. *Sejam S uma porção de superfície orientada, V um aberto de \mathbb{R}^3 tal que $S \subseteq V$ e $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vectores contínuo. O integral de F sobre S , que representaremos por*

$$\iint_S F \cdot dA,$$

é o integral

$$\iint_U F(\sigma(u, v)) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) du dv,$$

onde $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização de S (com a orientação considerada).

Vejamos que este integral está bem definido: se $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ for uma reparametrização (global) de S com a mesma orientação, será

$$\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$$

com $\Phi(\tilde{U}) = U$, $Jac \Phi > 0$ (donde $|Jac \Phi| = Jac \Phi$) e $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = Jac \Phi (\sigma_u \times \sigma_v)$; nesse caso,

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{U}} F(\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v})) \cdot (\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}) d\tilde{u} d\tilde{v} &= \iint_{\tilde{U}} F(\sigma \circ \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) Jac \Phi d\tilde{u} d\tilde{v} \\ &= \iint_U F(\sigma(u, v)) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) du dv \end{aligned}$$

(pelo teorema de mudança de variáveis para integrais duplos).

Repare que, se tomar em S a orientação oposta à original, ou seja, se tomar uma reparametrização $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi$ com $Jac \Phi < 0$, será $|Jac \Phi| = -Jac \Phi$ e portanto

$$\iint_{\tilde{U}} F(\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v})) \cdot (\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}) d\tilde{u} d\tilde{v} = - \iint_U F(\sigma(u, v)) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) du dv;$$

isto é, uma mudança de orientação numa superfície produz uma mudança de sinal no integral de um campo de vectores sobre essa superfície.

6.2 Teorema de Stokes

Nesta última secção veremos um teorema que é em boa medida o equivalente ao Teorema de Green para curvas em \mathbb{R}^3 .³⁸ Para simplificar um pouco o enunciado desse teorema, vamos definir rotacional³⁹ de um campo de vectores.

Definição 6.2. *Sejam U um aberto de \mathbb{R}^3 e $F = (P, Q, R)$ um campo de vectores derivável em U . O rotacional de F é a função $\text{rot } F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

O rotacional de F é frequentemente representado por $\nabla \times F$ devido ao facto (muito útil para evitar decorar a expressão acima) de que, se interpretarmos $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ formalmente como um vector,

$$\text{rot}(P, Q, R) = \nabla \times (P, Q, R).$$

O seguinte teorema, embora contenha já o essencial do Teorema de Stokes, é uma versão preliminar, enunciada em termos de parametrizações.

Teorema 6.1 (Teorema de Stokes para parametrizações). *Sejam $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de superfície, com U simplesmente conexo, $K \subseteq U$ uma curva simples fechada que é a fronteira do aberto simplesmente conexo D , $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ uma parametrização de K com orientação positiva, $B = \sigma(D)$, V um aberto de \mathbb{R}^3 tal que $\sigma(U) \subseteq V$ e $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vectores de classe C^1 ; então*

$$\int_{\sigma \circ \gamma} F \cdot dr = \iint_B \text{rot } F \cdot dA.$$

³⁸Chamar-lhe-emos “Teorema de Stokes”, como é habitual em textos introdutórios. Mas é bom avisar que a expressão “Teorema de Stokes” (por vezes “Teorema de Stokes generalizado”) se aplica a um teorema mais geral, referente a variedades diferenciáveis de dimensão arbitrária (muito simplificada: uma variedade de dimensão n é um conjunto localmente homeomorfo a um aberto de \mathbb{R}^n ; uma curva simples é uma variedade de dimensão 1 e uma superfície é uma variedade de dimensão 2). Cf. [Marsden, Tromba, sec. 8.6], [EL Lima, cap. 7, §8] ou [FR Dias Agudo, § 2.7].

³⁹Em inglês, o rotacional é habitualmente chamado “curl”.

Demonstração. Vamos escrever $F = (P, Q, R)$. Repare que

$$\int_{\sigma \circ \gamma} F \cdot dr = \int_{\sigma \circ \gamma} (P, 0, 0) \cdot dr + \int_{\sigma \circ \gamma} (0, Q, 0) \cdot dr + \int_{\sigma \circ \gamma} (0, 0, R) \cdot dr.$$

Escrevendo também $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ e $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, será

$$(\sigma \circ \gamma)'(t) = (x_u u' + x_v v', y_u u' + y_v v', z_u u' + z_v v')$$

(onde $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v$ são calculados em $(u(t), v(t))$ e u', v' em t) e portanto

$$\begin{aligned} \int_{\sigma \circ \gamma} (P, 0, 0) \cdot dr &= \int_a^b (P(\sigma \circ \gamma(t)), 0, 0) \cdot (\sigma \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \int_a^b P(\sigma \circ \gamma(t)) (x_u u' + x_v v') dt = \int_a^b (P \circ \sigma(u(t), v(t))) (x_u, x_v) \cdot (u', v') dt; \end{aligned}$$

mas este é o integral do campo de vectores em \mathbb{R}^2

$$(u, v) \mapsto (P \circ \sigma(u, v)) (x_u, x_v) = (P \circ \sigma(u, v) x_u, P \circ \sigma(u, v) x_v)$$

ao longo do caminho γ e, aplicando o Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} \int_{\sigma \circ \gamma} (P, 0, 0) \cdot dr &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u} ((P \circ \sigma) x_v) - \frac{\partial}{\partial v} ((P \circ \sigma) x_u) \right) du dv \\ &= \iint_D (P_x x_u x_v + P_y y_u x_v + P_z z_u x_v + (P \circ \sigma) x_{uv} \\ &\quad - P_x x_v x_u - P_y y_v x_u - P_z z_v x_u - (P \circ \sigma) x_{vu}) du dv \\ &= \iint_D (P_y y_u x_v + P_z z_u x_v - P_y y_v x_u - P_z z_v x_u) du dv \\ &= \iint_D \left(0, \frac{\partial P}{\partial z} (\sigma(u, v)), -\frac{\partial P}{\partial y} (\sigma(u, v)) \right) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) du dv \\ &= \iint_B \left(0, \frac{\partial P}{\partial z}, -\frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot dA; \end{aligned}$$

analogamente,

$$\int_{\sigma \circ \gamma} (0, Q, 0) \cdot dr = \iint_B \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cdot dA$$

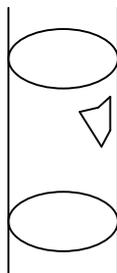
e

$$\int_{\sigma \circ \gamma} (0, 0, R) \cdot dr = \iint_B \left(\frac{\partial R}{\partial y}, -\frac{\partial R}{\partial x}, 0 \right) \cdot dA;$$

somando estes integrais temos o resultado a que queríamos chegar. \square

Para enunciarmos o Teorema de Stokes de uma forma mais directa (sem recorrermos a parametrizações), temos de analisar o que pode significar uma curva simples fechada numa superfície delimitar uma região nessa superfície, e qual a relação entre as orientações de uma superfície e das curvas simples fechadas nessa superfície.

Uma curva simples fechada no plano delimita uma região — isto é, é a fronteira de um único aberto limitado (o qual é simplesmente conexo). No entanto, numa superfície S , uma curva simples fechada C poderá delimitar uma, duas ou nenhuma região limitada e simplesmente conexa. Imagine a circunferência de equações $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ no cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$: divide o cilindro em duas “metades”, nenhuma limitada (e, já agora, nenhuma simplesmente conexa). Imagine em vez disso, no mesmo cilindro, uma curva simples fechada como na figura abaixo: claramente, delimita uma única região (que é simplesmente conexa). Finalmente, imagine uma circunferência na esfera S^2 (por exemplo, um “paralelo”): divide a esfera em duas regiões, ambas limitadas e simplesmente conexas.



Mas, se nos limitarmos a porções de superfície, a possibilidade das duas regiões desaparece; e, se nos limitarmos a porções de superfície simplesmente conexas, uma curva simples fechada delimita uma e uma só região simples-

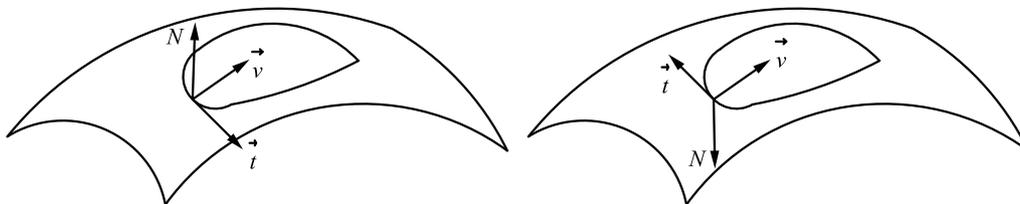
mente conexa: se $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ for uma parametrização de superfície, U simplesmente conexo (o que é equivalente a $\sigma(U)$ ser uma porção de superfície simplesmente conexa) e $C \subseteq S = \sigma(U)$ uma curva simples fechada, $K = \sigma^{-1}(C)$ será uma curva simples fechada que delimitará uma única região $D \subseteq U$; então, em S , C delimitará a região $B = \sigma(D)$ simplesmente conexa, e $S \setminus (B \cup C)$ não será simplesmente conexa (por $\sigma^{-1}(S \setminus (B \cup C)) = U \setminus (D \cup K)$ não o ser).⁴⁰

Quanto às possíveis orientações, repare que: qualquer curva simples fechada tem duas orientações possíveis (a menos da questão do ponto inicial e final, que é irrelevante para o cálculo de integrais); se C for uma curva simples fechada, com uma parametrização α , numa porção de superfície parametrizada por $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, então $\gamma = \sigma^{-1} \circ \alpha$ será uma parametrização de uma curva simples fechada em U — e estaremos nas condições do Teorema de Stokes para parametrizações; sendo assim, se $\sigma^{-1} \circ \alpha$ for uma parametrização com orientação positiva, teremos, para um qualquer campo de vectores F , $\int_{\alpha} F \cdot dr = \iint_B \text{rot } F \cdot dA$ (e, claro, se $\sigma^{-1} \circ \alpha$ tiver orientação negativa, $\int_{\alpha} F \cdot dr = -\iint_B \text{rot } F \cdot dA$); logo, faz sentido dizer que C está *orientada positivamente* relativamente à região que delimita em $\sigma(U)$ quando consideramos a orientação dada por $\sigma \circ \gamma$, onde γ é uma (qualquer) parametrização de $K = \sigma^{-1}(C)$ com orientação positiva.

Isto é equivalente a dizer que C está *orientada positivamente*, relativamente à região B que delimita na porção de superfície orientada S , quando está orientada de forma que, se nos colocarmos num qualquer ponto de C , com a cabeça para cima (sendo o sentido de “cima” indicado pelo vector normal unitário de S) e olharmos no sentido do vector tangente unitário, a região B fica “à esquerda”; ou, dito de outro modo, quando seleccionamos a orientação tal que, em cada ponto da curva, o vector tangente unitário \vec{t} , um vector unitário \vec{v} normal à curva (e tangente a S) que aponte no sentido da região delimitada pela curva e o vector normal unitário da superfície N

⁴⁰Se tivermos uma curva simples fechada numa superfície, como uma esfera, delimitando duas regiões simplesmente conexas, podemos escolher considerar uma ou outra — necessitaremos apenas de considerar uma porção de superfície que inclua a região que escolhemos; nessa porção, esta será única.

formam uma base (\vec{t}, \vec{v}, N) de \mathbb{R}^3 com orientação positiva.⁴¹



Assim, o resultado seguinte é uma consequência imediata do Teorema 6.1.

Teorema 6.2 (Stokes). *Sejam S uma porção de superfície orientada, $C \subseteq S$ uma curva simples fechada que delimita uma região simplesmente conexa $B \subseteq S$, V um aberto de \mathbb{R}^3 tal que $S \subseteq V$ e $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vectores de classe C^1 ; então*

$$\int_{C^+} F \cdot dr = \iint_B \text{rot } F \cdot dA$$

(onde C^+ representa a curva C orientada positivamente em relação a B).

Como uma aplicação do Teorema de Stokes, vejamos a implicação “ JF

⁴¹Consideremos um ponto qualquer $P \in C$, supondo que C está orientada positivamente (ou seja, com a orientação dada por $\sigma \circ \gamma \dots$), e tomemos os vectores \vec{t} , \vec{v} e N em P ; queremos ver que (\vec{t}, \vec{v}, N) tem orientação positiva — ou, equivalentemente, que $\det(\vec{t}, \vec{v}, N) = 1$. Consideremos também uma outra curva simples fechada C_1 , tangente a C em P (ou seja, as duas curvas têm esse ponto, e a recta tangente nesse ponto, em comum) e contida na região B delimitada por C (com a única excepção do ponto P); o vector unitário normal a C_1 e tangente a S em P que aponta para a região delimitada por C_1 será evidentemente o mesmo \vec{v} ; se $\sigma^{-1}(C_1)$ for parametrizada com orientação positiva por γ_1 , será $\gamma_1' = k\gamma'$, com $k > 0$ (estas derivadas calculadas nos valores dos parâmetros correspondentes a $\sigma^{-1}(P)$) donde, em P , $(\sigma \circ \gamma_1)' = k(\sigma \circ \gamma)'$ e o vector tangente unitário a C_1 será o mesmo \vec{t} ; então, para o cálculo de $\det(\vec{t}, \vec{v}, N)$ em P , podemos substituir C por uma qualquer curva C_1 nestas condições. Tomemos agora para \mathbb{R}^3 um referencial ortonormado tal que P seja a origem e N tenha coordenadas $(0, 0, 1)$ (e portanto o plano $P + T_S(P)$ tenha equação $z = 0$); poderemos considerar uma parametrização local $(x, y) \mapsto (x, y, z(x, y))$ de S (v. nota 31 nas págs. 71–72) e uma curva C_1 nas condições acima que esteja contida na porção de superfície coberta por esta parametrização; teremos $\vec{t} = (t_1, t_2, 0)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ e $\det(\vec{t}, \vec{v}, N) = t_1v_2 - t_2v_1$; mas a curva $\gamma^{-1}(C_1)$ será a projecção de C_1 nas duas primeiras coordenadas e portanto os seus vectores unitários tangente e normal apontando para o interior terão coordenadas (t_1, t_2) e (v_1, v_2) e, como devem constituir uma base de \mathbb{R}^2 ortonormada com orientação positiva, tem de ser $t_1v_2 - t_2v_1 = 1$.

simétrica $\Rightarrow F$ conservativo” para campos de vectores em \mathbb{R}^3 com domínios simplesmente conexos. Repare que:

1. a condição $\text{rot } F = 0$ é equivalente a JF ser simétrica;
2. se $U \subseteq \mathbb{R}^3$ é um aberto simplesmente conexo e C é uma curva simples fechada em U , então podemos definir uma superfície S contendo C e na qual C delimita uma região simplesmente conexa (esta região pode ser o conjunto $H([a, b] \times [0, 1])$, nos termos da definição 5.11).

Então, de forma análoga à da proposição 5.7, podemos concluir o seguinte resultado:

Proposição 6.3. *Sejam U um aberto simplesmente conexo de \mathbb{R}^3 e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vectores de classe C^1 ; suponhamos que, em todo o ponto de U , a matriz jacobiana de F é simétrica; então F é um campo conservativo.*

Referências

- [PV Araújo] Paulo Ventura Araújo, *Geometria Diferencial*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.
- [Brannan, Esplen, Gray] David A. Brannan, Matthew F. Esplen, Jeremy J. Gray, *Geometry*, Cambridge University Press, 1999.
- [MP Carmo] Manfredo P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [FR Dias Agudo] F. R. Dias Agudo, *Análise Real*, vol. II, Escolar Editora, 1990.
- [EL Lima] Elon Lages Lima, *Curso de Análise*, vol. 2, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1995.
- [Marsden, Tromba] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba, *Vector Calculus*, W. H. Freeman, 2003 (5.^a ed.).
- [A Pressley] Andrew Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, 2001.

As quádricas da página 20, as hélices das páginas 24 e 45 e a fita de Möbius da página 66 foram desenhadas com o programa *3D-XplorMath-J*.
Todas as outras figuras foram desenhadas com o programa *Geogebra*.

Conteúdo

| | |
|--|-----------|
| I Cónicas e quádricas | 2 |
| 1 Cónicas | 2 |
| 1.1 Secções cónicas | 2 |
| 1.2 Circunferências | 3 |
| 1.3 Elipses | 4 |
| 1.4 Hipérbolas | 5 |
| 1.5 Parábolas | 7 |
| 1.6 Caracterização das cónicas pela excentricidade | 8 |
| 1.7 Reconhecimento de cónicas | 11 |
| 1.8 As secções planas do cone | 15 |
| 2 Quádricas | 17 |
| | |
| II Geometria Diferencial | 21 |
| 3 Curvas e caminhos | 21 |
| 3.0 Continuidade e derivação de funções vectoriais | 21 |
| 3.1 Definições iniciais | 23 |
| 3.2 Reparametrizações; orientação | 27 |
| 3.3 Comprimento de arco | 32 |
| 3.4 Curvatura | 36 |
| 3.5 Triedro de Frenet; torção | 41 |
| Apêndice (parametrizações de curvas simples abertas) | 52 |
| 4 Superfícies | 54 |
| 4.0 Homeomorfismos | 54 |
| 4.1 Definições iniciais | 57 |
| 4.2 Espaço tangente; orientação | 63 |
| 4.3 Primeira forma fundamental; comprimento e área | 67 |
| 4.4 Segunda forma fundamental; curvatura | 71 |

| | |
|--|-----------|
| <i>CONTEÚDO</i> | 107 |
| III Análise Vectorial | 79 |
| 5 Integrais de linha | 79 |
| 5.1 Integrais de campos de vectores ao longo de caminhos e curvas | 79 |
| 5.2 Campos conservativos e campos de gradientes | 83 |
| 5.3 Teorema de Green | 89 |
| 6 Integrais de superfície | 97 |
| 6.1 Integrais de campos de vectores em porções de superfície . . . | 97 |
| 6.2 Teorema de Stokes | 99 |