

INTUIÇÕES DE ALUNOS DO 9º ANO DE ESCOLARIDADE SOBRE PROBABILIDADE CONDICIONADA

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos
ferreiracorreiapaulo@gmail.com

José António Fernandes
Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

José Miguel Contreras
Universidad de Granada
jmcontreras@ugr.es

Resumo

Neste texto apresentam-se alguns resultados de um estudo centrado nas ideias intuitivas de probabilidade condicionada de alunos do 9.º ano de escolaridade.

Participaram no estudo 229 alunos do 9.º ano de escolaridade, a quem foi aplicado um questionário com várias tarefas sobre probabilidade condicionada, sendo aqui apenas exploradas as duas em que as frequências dos acontecimentos eram apresentadas sob a forma de tabela.

Em termos de resultados, salienta-se que as resoluções dos alunos revelam que estes possuem ideias intuitivas sobre o conceito de probabilidade condicionada, enfatizando-se a importância da leitura prévia dos dados fornecidos através de tabelas de frequências.

Palavras-chave: Probabilidade condicionada; Frequências dadas em tabelas; Alunos do 9.º ano.

1. Introdução

As Probabilidades é um tema útil na vida do dia-a-dia das pessoas, constitui um saber instrumental em outras disciplinas, é um conhecimento necessário em muitas profissões e intervém na tomada de decisões (Gal, 2005). Ora, essas variadas aplicações do tema têm-se reflectido na necessidade de aprofundar o seu ensino, tendo sido recentemente incluído nos programas escolares de muitos países.

Em Portugal, tal como em outros países, com a introdução do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007) verifica-se o aprofundamento do tema Organização e Tratamento de Dados, que inclui o estudo das Probabilidades e Estatística. Contudo, tal aprofundamento acontece mais em relação à Estatística do que às Probabilidades. Efectivamente, neste último caso, mantém-se essencialmente o que estava contemplado no programa anterior.

Neste contexto, tendo por propósito avaliar as possibilidades de ampliar o estudo do tema de Probabilidades no ensino básico, na presente investigação estudam-se as ideias intuitivas de alunos do 9.º ano sobre probabilidade condicionada, quando os dados são apresentados na forma de tabelas de frequências. Para tal, partimos dos estudos prévios de Estrada e Díaz (2006) e Contreras, Batanero, Díaz e Fernandes (2011), realizados com futuros professores, e introduzimos o caso de uma tabela simples e a leitura de uma tabela de contingência.

Neste estudo considera-se a definição de probabilidade condicionada decorrente da restrição do espaço amostral. Nesta perspectiva, a probabilidade condicionada de um acontecimento A dado que ocorreu o acontecimento B , $P(A|B)$, é a probabilidade de A considerando apenas os resultados possíveis da experiência aleatória que são elementos de B . Isto é, a probabilidade do acontecimento A é avaliada nas condições de um novo espaço amostral que resulta do condicionamento da ocorrência do acontecimento B (Hogg & Tanis, 1993, citado em Tarr & Lannin, 2005).

Neste estudo entendemos como ideias intuitivas aquelas que são desenvolvidas em contextos informais, não na escola (Fischbein, 1987), como era o caso dos alunos do 9.º ano que participaram no estudo, os quais não tinham ainda estudado o conceito de probabilidade condicionada na disciplina de Matemática.

2. Investigação prévia

Nas tarefas de cálculo de Probabilidades as frequências relativas aos acontecimentos podem apresentar-se em tabelas de frequências simples e em tabelas de contingência, tal como aconteceu no presente estudo. No caso das tabelas de frequências simples, no estudo de Fernandes (1999) foi incluída uma tarefa deste tipo, tendo-se obtido, em 100%, um nível de realização de cerca de 87% num item de probabilidade simples, 75% num item de soma de probabilidades e 53% num item de probabilidade condicionada.

No caso das tabelas de contingência, elas têm sido usadas para estudar o desenvolvimento do conceito de associação entre duas variáveis (e.g., Inhelder & Piaget, 1976) e as estratégias intuitivas e preconceções acerca da associação (Batanero, Estepa, Godino & Green, 1996). Mais recentemente têm sido também usadas no estudo do conceito de probabilidade, incluindo a noção de probabilidade condicionada, por parte de Estrada e Díaz (2006) que apresentaram a futuros

professores do ensino primário uma tarefa, contra-intuitiva, envolvendo frequências de dois acontecimentos numa tabela de contingência e interrogaram-nos sobre a determinação de uma probabilidade simples, uma probabilidade conjunta e uma probabilidade condicionada e a sua transposta, tendo-se obtido, respectivamente, as percentagens de respostas correctas: 75%, 52%, 56% e 52%.

Contreras et al. (2011) noutra investigação com futuros professores do ensino primário envolvendo a determinação de uma probabilidade simples, uma probabilidade conjunta e uma probabilidade condicionada, dadas as frequências dos respectivos acontecimentos numa tabela de contingência, obtiveram, respectivamente, percentagens de respostas correctas ligeiramente inferiores às obtidas no estudo de Estrada e Díaz (2006), especificamente 66%, 41% e 44%. Em ambos os estudos, os futuros professores, antes de realizarem a tarefa, tinham estudado o conceito de probabilidade condicionada no âmbito de pelo menos uma disciplina do curso.

A exploração da mesma tarefa por alunos do 12.º ano (Fernandes & Fernandes, 2010), com ensino de Probabilidades, conduziu a resultados ligeiramente superiores. Neste estudo verificou-se ainda um impacto muito limitado do ensino de Probabilidades sobre as respostas dos alunos, diminuindo mesmo, do pré-ensino para o pós-ensino, a percentagem das respostas correctas, no caso das probabilidades condicionadas.

Por outro lado, em termos de raciocínios, outras investigações centradas no estudo da probabilidade condicionada referem-se a obstáculos, erros e dificuldades na aquisição do conceito. De entre esses estudos, salienta-se o estudo de Falk (1986), em que se verificou que muitos alunos não discriminam entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, isto é, entre as duas probabilidades $P(A|B)$ e $P(B|A)$. Falk designou este tipo de erro por *falácia da condicional transposta*.

Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) verificaram que os alunos confundem $P(A|B)$ com $P(A \cap B)$, isto é, não distinguem claramente os significados da condicional “se” e da conjunção “e”, o que se torna particularmente aparente aquando da passagem de um enunciado em linguagem corrente para linguagem simbólica das probabilidades.

A percepção de *causalidade* na avaliação de probabilidades está também na origem de raciocínios errados no cálculo de probabilidades condicionadas. Segundo Tversky e Kahneman (1982), a influência da causalidade manifesta-se através de *assimetrias*

inferenciais, em que as pessoas inferem com maior confiança efeitos das causas do que causas dos efeitos, e da *significação causal e diagnóstica da evidência*, em que as pessoas tendem a realçar o impacto causal dos dados para o futuro e a negligenciar as suas implicações diagnósticas acerca do passado. Neste último caso, no estudo de Falk (1986), também confirmado num estudo por Fernandes, Nascimento, Cunha e Contreras (2011), os estudantes afirmaram, numa elevada percentagem, que a questão era desprovida de sentido ou que a probabilidade de um acontecimento que ocorre depois não pode afectar a probabilidade de um acontecimento que ocorreu antes.

No estudo de Estrada e Díaz (2006), a que nos temos vindo a referir, os conflitos semióticos (Godino, 2003) mais frequentemente experienciados pelos futuros professores referem-se à confusão entre a probabilidade condicionada e a sua transposta (14%), entre a probabilidade condicionada e a probabilidade conjunta (13%) e entre a probabilidade de um acontecimento e do seu contrário (7%). Já no estudo de Contreras et al. (2011), no conjunto das três questões do estudo, destaca-se o erro resultante de confundir probabilidades, sendo mais frequente a confusão entre a probabilidade condicionada e a probabilidade conjunta (14%), seguindo-se, numa percentagem muito inferior, os erros de confundir outros objectos, fórmulas e acontecimentos, designadamente entre um acontecimento e o seu contrário. Considerando agora cada uma das três questões, a prevalência do erro confundir probabilidades foi superior no caso da probabilidade conjunta (25%), seguindo-se o caso da probabilidade condicionada (16%) e, por fim, com uma percentagem muito inferior (4%), surge o caso da probabilidade simples.

2. Método

No presente estudo pretendeu-se, fundamentalmente, avaliar as ideias intuitivas de alunos do 9.º ano de escolaridade acerca da probabilidade condicionada, quando as frequências dos acontecimentos são apresentadas em tabelas. Mais especificamente estudou-se o cálculo de probabilidades numa tabela simples e a leitura de dados e o cálculo de probabilidades numa tabela de contingência.

Participaram no estudo 229 alunos do 9.º ano de escolaridade, pertencentes a quatro escolas do distrito de Braga. Relativamente a estes alunos, as suas idades variavam entre os 14 e os 18 anos, com 14,5 anos de média de idades (que é a idade normal de frequência do 9.º ano); 50,7% dos alunos eram do sexo feminino e 49,3% do sexo

masculino; as suas classificações na disciplina de Matemática, no final do 1º período do 9.º ano e numa escala de 1 a 5, variavam entre 2 e 5, com uma média de 3,0; e, finalmente, 11,8% dos alunos tinham tido uma repetência e 3,9% tinham tido duas ou três repetências no seu percurso escolar.

Foi aplicado aos alunos um questionário que, para além de algumas questões centradas na aquisição de informação pessoal, incluía várias tarefas sobre probabilidades, das quais trataremos neste texto apenas as duas em que informação era apresentada numa tabela. Estas tarefas têm formato similar a outras duas tarefas, uma usada por Fernandes (1999) e a outra usada por Estrada e Díaz (2006) e Contreras et al. (2011).

O questionário foi aplicado em aulas dos alunos, de 90 minutos, no final do 2.º período escolar de 2010/2011, tendo-se revelado um tempo suficiente. Entretanto, os alunos tinham estudado os conteúdos de Probabilidades, previstos no programa da disciplina de Matemática do 9.º ano, no início do ano lectivo, nos quais não se inclui qualquer referência à probabilidade condicionada.

Por fim, a análise de dados foi efectuada com recurso ao programa de análise estatística *SPAW Statistics 18*, tendo-se determinado frequências de respostas correctas e incorrectas e de tipos de erros nas duas tarefas estudadas, organizadas e sintetizadas em tabelas.

3. Leitura de dados em tabelas e cálculo de probabilidades

Apresenta-se de seguida a análise das respostas dos alunos nas tarefas 1 e 2 do questionário quanto à percentagem de respostas correctas, respostas incorrectas e não respostas, bem como quanto aos erros identificados nas suas produções escritas.

3.1. Cálculo de probabilidades numa tabela de frequências simples

Na tarefa 1, partindo de uma tabela simples, pedia-se aos alunos para calcularem três probabilidades: uma probabilidade simples na questão a), uma soma de probabilidades na questão b) e uma probabilidade condicionada na questão c).

Tarefa 1. Escolheram-se, ao acaso, 60 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles o seu número de irmãos. A partir das respostas dadas, obtiveram-se os dados do quadro seguinte:

	Nº de irmãos	Nº de estudantes
	0 irmãos	8
	1 irmão	25
	2 irmãos	15
	3 ou mais irmãos	12

Escolhe-se, novamente ao acaso, um estudante do grupo dos 60 estudantes.

- a) Qual a probabilidade de o estudante escolhido ter exactamente 1 irmão?
b) Qual a probabilidade de o estudante escolhido ter mais que 1 irmão?
c) Sabe-se que o estudante escolhido tem irmãos. Qual a probabilidade de ter exactamente 1 irmão?

Na Tabela 1 apresentam-se as percentagens de respostas correctas, erradas e não respostas em cada questão da tarefa 1, envolvendo o cálculo das probabilidades $P(A)$, $P(B)$ e $P(A|C)$, sendo os acontecimentos A : ter exactamente um irmão, B : ter mais que 1 irmão e C : ter irmãos.

Tabela 1. Distribuição (em %) dos alunos segundo o tipo de resposta às questões da Tarefa 1

Conteúdos	Respostas		Não respostas
	Correctas	Erradas	
$P(A)$	88,6	10,5	0,9
$P(B)$	83,4	13,6	3,0
$P(A C)$	54,6	35,8	9,6

Da Tabela 1 destaca-se a elevada percentagem de respostas correctas no cálculo da probabilidade simples e da soma de probabilidades, e uma redução significativa da percentagem de respostas correctas na determinação da probabilidade condicionada, embora mais de metade dos alunos (54,6%) tenham respondido correctamente. É também na questão de probabilidade condicionada onde se observa uma maior percentagem de alunos a não responderem à questão (9,6%).

Consequentemente, como se observa na Tabela 2, a percentagem de erros é maior no caso da probabilidade condicionada do que no caso das outras duas probabilidades.

Tabela 2. Distribuição (em %) dos alunos segundo o tipo de erro nas questões da Tarefa 1

Erros	Conteúdo das questões
-------	-----------------------

	$P(A)$	$P(B)$	$P(A C)$
$P(A)$		0,4	19,3
$P(B)$	–		0,4
$P(A C)$	1,3	–	
$P(C)$	–	1,3	3,5
$1/P(A)$	1,3	–	0,9
$1/P(B)$	–	0,9	–
$1/P(A C)$	–	–	0,9
CF ou CP	1,7	4,5	3,1
Outras probabilidades	0,9	0,4	1,3
Outros valores	5,3	6,1	6,4
Total	10,5	13,6	35,8

Nota: CF = casos favoráveis; CP = casos possíveis.

O erro predominante ocorreu no cálculo da probabilidade condicionada, com 19,3% dos alunos a considerarem apenas o acontecimento condicionado A e a ignorarem o acontecimento condicionante C e, conseqüentemente, a apresentarem a mesma resposta para as questões a) e c), como é o caso do aluno A_{50} .

$$P(\text{ter exatamente 1 irmão}) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$$

Figura 1. Resposta do aluno A_{50} às questões a) e c).

Contrariamente ao caso anterior, 3,5% dos alunos ignoraram o acontecimento condicionado, calculando assim $P(C)$, como é o caso do aluno A_{19} na questão c).

$$\begin{aligned} \text{nº de casos favoráveis: } & 52 \\ \text{nº de casos possíveis: } & 60 \\ P(C) &= \frac{52}{60} = \frac{13}{15} \end{aligned}$$

Figura 2. Resposta do aluno A_{19} à questão c).

Na categoria *CF ou CP* a razão de probabilidade apresentada contém apenas um erro relativo ou aos casos favoráveis ou aos casos possíveis, como é exemplo disso a resposta do aluno A_{203} que apresenta $P(B) = 30/60$ na questão b), resultado de uma identificação incorrecta do número de casos favoráveis ao acontecimento B .

Na categoria *Outras probabilidades* foram incluídas as respostas dos alunos que consideram uma probabilidade, diferente das explicitadas na Tabela 2, mas com significado no contexto do problema, como é o caso do aluno A_{147} que, na questão c), apresentou o valor de $P(\bar{C})$.

Por oposição às categorias antes referidas, considerou-se a categoria *Outros valores*, onde foram incluídas respostas como a do aluno A_{136} que na questão a) apresenta para $P(A)$ a resposta $1/25$, entendida como a razão entre o valor da variável *número de irmãos* (1) e *o número de estudantes com 1 irmão* (25). Trata-se, portanto, de respostas sem sentido na situação apresentada. Nesta categoria 1,3% dos alunos apresentaram a mesma resposta (errada) para $P(A)$ e $P(A|C)$, aspecto que poderá indiciar que estes alunos também ignoraram o acontecimento condicionante C na obtenção de $P(A|C)$.

3.2. Leitura de dados numa tabela de contingência

Com a questão a) da tarefa 2 pretendia-se averiguar sobre o significado atribuído pelos alunos aos números 14, 10 e 6 da tabela de contingência apresentada. O apelo à leitura destes valores relaciona-se com a sua importância no cálculo das probabilidades da questão b).

Tarefa 2

Escolheram-se, ao acaso, 25 estudantes de uma escola e perguntou-se a cada um deles se praticava ou não desporto. Os dados obtidos foram registados, segundo o sexo dos estudantes, no quadro seguinte.

	Rapariga	Rapaz	Total
Pratica desporto	8	6	14
Não pratica desporto	7	4	11
Total	15	10	25

a) No quadro anterior, o que representa: O número 14? O número 10? O número 6?

Na leitura da tabela de contingência, quase todos os alunos interpretaram correctamente o significado dos números 14, 10 e 6, tendo sido obtidas as percentagens de respostas correctas 96,9%, 94,8% e 97,8%, respectivamente.

3.3. Cálculo de probabilidades numa tabela de contingência

Na segunda parte da tarefa 2, partindo de uma tabela de contingência, pedia-se aos alunos para calcularem quatro probabilidades: uma probabilidade simples na 1.^a pergunta; uma probabilidade conjunta na 2.^a pergunta; e uma probabilidade condicionada e a sua transposta, respectivamente, na 3.^a e 4.^a perguntas. A tarefa tem um formato similar à que foi usada nos estudos de Estrada e Díaz (2006) e Contreras et al. (2011), variando o contexto e a grandeza dos valores das frequências.

Tarefa 2

b) Escolhe-se, ao acaso, um estudante do grupo dos 25 estudantes.

Qual a probabilidade de que esse estudante seja rapaz?

Qual a probabilidade de que esse estudante seja rapaz e pratique desporto?

Sabe-se que o estudante pratica desporto. Qual a probabilidade de ser rapaz?

Sabe-se que o estudante é rapaz. Qual a probabilidade de praticar desporto?

Na Tabela 3 apresentam-se as percentagens de respostas correctas, erradas e não respostas em cada pergunta da questão b), envolvendo o cálculo das probabilidades $P(R)$, $P(R \cap D)$, $P(R|D)$ e $P(D|R)$, sendo os acontecimentos R : ser rapaz e D : praticar desporto.

Tabela 3. Distribuição (em %) dos alunos segundo o tipo de resposta à questão b) da Tarefa 2

Conteúdos	Respostas		Não respostas
	Correctas	Erradas	
$P(R)$	90,8	7,9	1,3
$P(R \cap D)$	74,7	22,3	3,0
$P(R D)$	71,2	27,1	1,7
$P(D R)$	65,5	31,9	2,6

Da observação da Tabela 3 conclui-se ter havido uma elevada percentagem de acertos em todas as perguntas da questão b), embora se verifique uma diminuição progressiva da percentagem de respostas correctas ao longo das quatro perguntas.

Comparativamente com as questões da tarefa 1, registou-se uma melhoria dos resultados, com especial destaque para o cálculo da probabilidade condicionada, cuja percentagem de respostas correctas passa de 54,6% para 68,4% (considerando a média das percentagens de respostas correctas obtidas no cálculo da probabilidade condicionada $P(R|D)$ e da sua transposta $P(D|R)$). Também merece destaque a redução da percentagem de não respostas.

Comparativamente com a tarefa 1, por observação da Tabela 4 conclui-se que o aumento das percentagens de respostas correctas nas perguntas de probabilidade condicionada deve-se simultaneamente à diminuição da percentagem de não respostas e à diminuição das percentagens de erros.

Tabela 4. Distribuição (em %) dos alunos segundo o tipo de erro na questão b) da Tarefa 2

Erros	Conteúdo das questões			
	$P(R)$	$P(R \cap D)$	$P(R D)$	$P(D R)$
$P(R)$		0,4	2,7	2,7
$P(R \cap D)$	0,4		5,8	8,3
$P(R D)$	–	5,2		7,4
$P(D R)$	–	8,0	2,2	
$P(D)$	0,4	0,4	5,2	–
$1/P(R)$	1,8	–	–	–
$1/P(R \cap D)$	–	0,9	–	0,4
$1/P(R D)$	–	0,4	1,8	–
$1/P(D R)$	–	0,4	0,9	2,2
Outras probabilidades	1,3	0,9	1,3	0,9
CF ou CP	1,8	2,2	0,4	4,4
Outros valores	2,2	3,5	6,8	5,6
Total	7,9	22,3	27,1	31,9

Nota: CF = casos favoráveis; CP = casos possíveis.

Da leitura da Tabela 4 destaca-se a dificuldade dos alunos em distinguir a probabilidade conjunta da probabilidade condicionada e em distinguir a probabilidade condicionada $P(R|D)$ da sua transposta $P(D|R)$. Dado que na categoria *Outros valores* 2,2% dos alunos apresentam a mesma resposta (errada) para $P(R \cap D)$ e $P(R|D)$, 1,3% apresentam a mesma resposta (errada) para $P(R \cap D)$ e $P(D|R)$ e 2,2% apresentam a mesma resposta (errada) para $P(R|D)$ e $P(D|R)$, este aspecto também poderá ser um indicador das dificuldades dos alunos na distinção entre estas probabilidades.

Comparativamente com a questão c) da tarefa 1, relativa ao cálculo da probabilidade condicionada $P(A|C)$, verifica-se uma redução na percentagem dos erros que resultam de ignorar ou o acontecimento condicionado ou o acontecimento condicionante no cálculo das probabilidades $P(R|D)$ e $P(D|R)$, embora 5,2% dos alunos ainda tenham ignorado o acontecimento condicionado R no cálculo de $P(R|D)$.

Quanto ao erro que resulta de considerar o inverso da resposta numérica correcta (embora pouco expressivo nas tarefas 1 e 2), ele ocorre em percentagens muito

próximas nas duas tarefas. O mesmo se passa em relação aos erros incluídos na categoria *Outros valores* (com maior expressividade nas duas tarefas do que o erro anterior), em que se incluem respostas descontextualizadas ou respostas numéricas absurdas no contexto de probabilidades. São disso exemplo, a resposta $P(R|D) = \#D/\#R$, apresentada pelo aluno A₉₀, e a resposta $P(R \cap D) = \#(R \cap D)$, apresentada pelo aluno A₁₀₉.

4. Conclusão

De uma maneira geral, os alunos revelaram possuir ideias intuitivas correctas sobre o conceito de probabilidade condicionada, quando os dados são apresentados na forma de tabela, pois a maioria dos alunos respondeu correctamente às questões colocadas.

Entre as duas formas de apresentação dos dados, através de uma tabela de frequências simples e de uma tabela de contingência, observaram-se diferenças ao nível da percentagem de respostas correctas, com especial destaque na probabilidade condicionada. No caso da tabela de frequências simples, a dificuldade mais sentida pelos alunos foi a de considerar o condicionamento de C no cálculo de $P(A|C)$, calculando simplesmente $P(A)$. No estudo de Fernandes (1999), numa tarefa análoga à tarefa 1, foi obtida uma percentagem de respostas correctas semelhante à obtida neste estudo.

Também em relação à tabela de contingência, a dificuldade que mais se destacou foi no cálculo das probabilidades condicionadas, embora neste caso a percentagem de respostas correctas tenha sido superior à obtida no caso da tabela de frequências simples. Talvez esta melhoria nas respostas dos alunos se deva ao facto de, previamente, os alunos terem sido questionados sobre os significados dos dados implicados nas probabilidades. Ainda neste caso, destacaram-se dificuldades em distinguir a probabilidade conjunta da probabilidade condicionada e o erro da *falácia da condicional transposta* (Falk, 1986).

Por outro lado, ainda no caso da tabela de contingência, neste estudo obtiveram-se melhores resultados do que nos estudos de Contreras et al. (2011) e Estrada e Díaz (2006), envolvendo futuros professores do ensino primário. É de salientar que nestes estudos a grandeza dos dados da tabela de contingência era consideravelmente superior.

Além disso, no estudo de Estrada e Díaz foi explorada uma situação contra-intuitiva, o que poderá também explicar as menores percentagens de sucesso.

O elevado desempenho dos alunos nas questões em que se pedia para calcular uma probabilidade simples, uma soma de probabilidades e uma probabilidade conjunta mostra que elas têm potencial para serem usadas na sala de aula aquando da leccionação do tema Probabilidades.

Finalmente, os resultados obtidos nas duas tarefas encorajam a possibilidade de introduzir o estudo do conceito de probabilidade condicionada no 9.º ano de escolaridade, pelo menos na forma como foi explorado neste trabalho. Acrescenta-se ainda que as tarefas aqui utilizadas parecem reunir potencial para serem usadas na introdução deste conceito, enfatizando a leitura dos dados das tabelas antes de calcular probabilidades.

Referências bibliográficas

- Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D., & Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 151-169.
- Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C., & Fernandes, J. A. (2011). Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Rzeszów, Poland, 9th to 13th February 2011.
- Estrada, A., & Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploration study with future teachers. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education, CD-ROM.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic* (pp. 292-297). Victoria, BC: University of Victoria.
- Fernandes, J. A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga.
- Fernandes, J. A., & Fernandes, M. C. (2010). Influência do ensino no raciocínio de alunos do 12.º ano em probabilidade condicionada. In H. Gomes, L. Menezes, & I. Cabrita (Orgs.), *Actas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 315-329). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, CD-ROM.
- Fernandes, J. A., Nascimento, M. M., Cunha, M. C., & Contreras, J. M. (2011). Desenvolvimento do conceito de probabilidade condicionada em alunos do 12.º ano através do ensino. *Actas da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Recife, Brasil, 26-30 Junho.

- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in schools: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York, NY: Springer.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Inhelder, B., & Piaget, J. (1976). *Da lógica da criança à lógica do adolescente: Ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais*. São Paulo: Livraria Pioneira Editora.
- Ministério da Educação (2007). *Programa ajustado de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255 – 269.
- Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In J. Graham (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). New York, NY: Springer.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge: Cambridge University Press.