

5 - ELEMENTO DE PÓRTICO 3D DE TIMOSHENKO

5.1 - Introdução

Neste capítulo a teoria de Timoshenko descrita na secção 4.3 vai ser estendida a estruturas porticadas tridimensionais. Um nó deste tipo de estruturas é caracterizado por seis graus de liberdade (3 deslocamentos e 3 rotações). Uma barra pode estar submetida a seis componentes de esforços, designadamente, esforço axial, esforços de corte segundo os eixos principais centrais de inércia (EPCI) da secção da barra, momento torsor e momentos flectores segundo os EPCI. Se alguma das barras tiver desenvolvimento curvilíneo, um referencial suplementar aos considerados no capítulo 4 deverá ser considerado, de forma a caracterizar grandezas estabelecidas nos pontos de Gauss do elemento, nomeadamente, as extensões e as tensões. Por este facto, a secção seguinte é dedicada à definição dos referenciais utilizados na teoria de Timoshenko aplicada a estruturas porticadas tridimensionais.

5.2 - Referenciais

Considere-se uma peça curva definida no sistema de eixos global $g_i (g_1, g_2, g_3)$, pela sua directriz e e pela geometria das diferentes secções transversais planas de área $A_{(e)}$, ortogonais a e (ver Figura 5.1). Admita-se que esta secção é discretizada em elementos de pórtico 3D de Timoshenko. A geometria, os deslocamentos generalizados e os esforços generalizados desta peça estão definidos em diferentes referenciais, que se estabelecem a seguir.

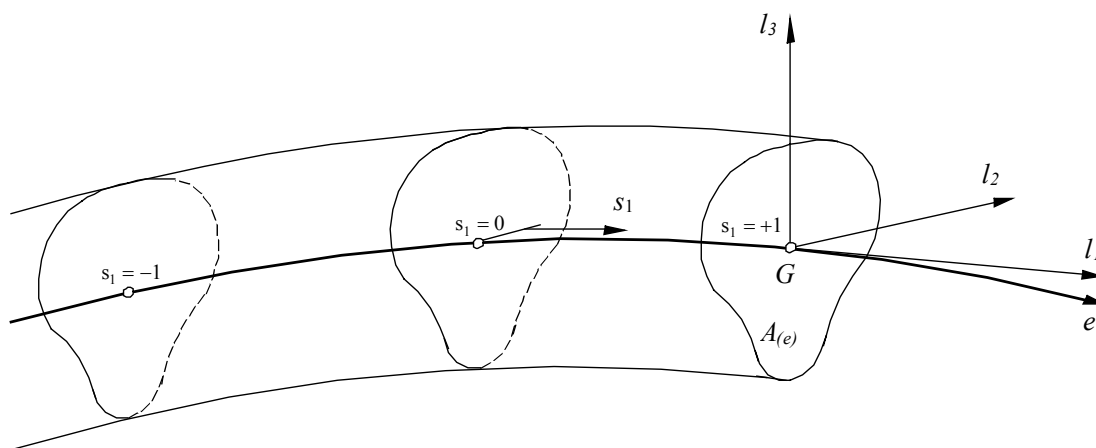


Figura 5.1 - Elemento de pórtico 3D de Timoshenko.

5.2.1 - Sistema coordenado global - $g_i (g_1, g_2, g_3)$

Sistema coordenado cartesiano usado para definir a geometria da estrutura no espaço (Figura 5.2). As coordenadas e os deslocamentos dos nós da estrutura, a matriz de rigidez

da estrutura e o vector das forças nodais equivalentes da estrutura são referidos a este sistema.

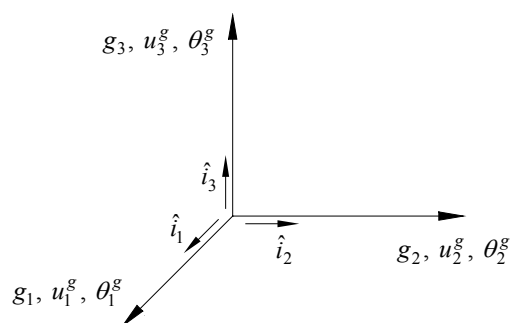


Figura 5.2 - Referencial global.

5.2.2 - Sistema coordenado normalizado - s_1

Sistema coordenado que serve de base à definição das funções de forma do elemento (ver secção 3.2). A coordenada normalizada s_1 varia de -1 a $+1$ ao longo do eixo do elemento. O eixo do elemento coincide com a linha que contém os centros de gravidade das secções da peça.

5.2.3 - Sistema coordenado local - $l_i(l_1, l_2, l_3)$

Sistema coordenado cartesiano definido localmente em qualquer secção do elemento. A definição deste referencial nos pontos de integração numérica (pontos de amostragem) serve de referência à definição dos estados de deformação e de tensão (Figura 5.3). A este referencial atribui-se por vezes a designação de tangencial pelo facto do eixo l_1 ser tangencial ao eixo do elemento.

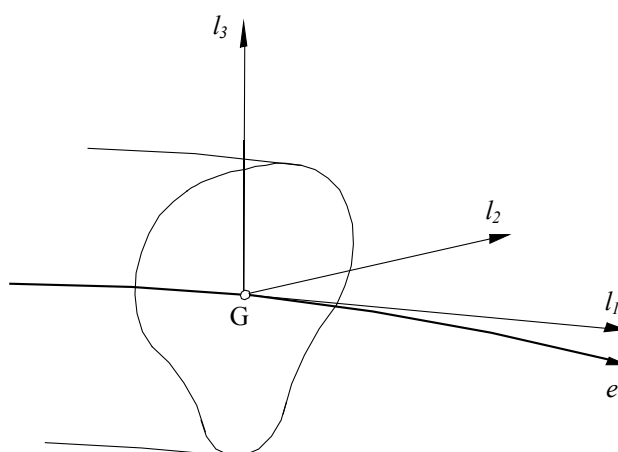


Figura 5.3 - Referencial local.

Para cada ponto de amostragem do elemento, este sistema é definido por intermédio do procedimento que se passa a descrever.

- Versor do eixo l_1

O vector \underline{l}_1 é tangente, no ponto de amostragem, ao eixo curvilíneo s_1 . Assim,

$$\underline{l}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_3}{\partial s_1} \end{bmatrix}^T \quad (5.1)$$

e

$$\hat{l}_1 = \frac{\underline{l}_1}{\|\underline{l}_1\|} = [l_{11} \quad l_{21} \quad l_{31}]^T \quad (5.2)$$

sendo \hat{l}_1 o versor de l_1 .

- Versor do eixo l_2

Para se definir o versor de l_2 vai-se começar por admitir que este eixo é ortogonal ao plano definido por \hat{i}_3 e \hat{l}_1 , pelo que

$$\begin{aligned} \hat{l}_2 &= \hat{i}_3 \times \hat{l}_1 \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ l_{11} & l_{21} & l_{31} \end{vmatrix} \frac{1}{\|\hat{i}_3 \times \hat{l}_1\|} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(l_{21})^2 + (l_{11})^2}} (-l_{21}\hat{i}_1 + l_{11}\hat{i}_2 + 0\hat{i}_3)$$

Se $l_{11} = l_{21} = 0$, então \hat{i}_3 e \hat{l}_1 são colineares. Se além disto $l_{31} > 0$, isto é, se a barra está orientada segundo o sentido positivo do eixo g_3 , como se ilustra na Figura 5.4a, então \hat{l}_2 obtém-se a partir do produto vectorial de \hat{l}_1 com \hat{i}_1 . Neste caso,

$$\hat{l}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T \quad (5.4)$$

Se $l_{31} < 0$, isto é, se a barra está orientada segundo o sentido negativo do eixo g_3 (ver Figura 5.b), então \hat{l}_2 obtém-se a partir do produto vectorial de \hat{i}_1 e \hat{l}_1 . Também neste caso,

$$\hat{l}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T \quad (5.5)$$

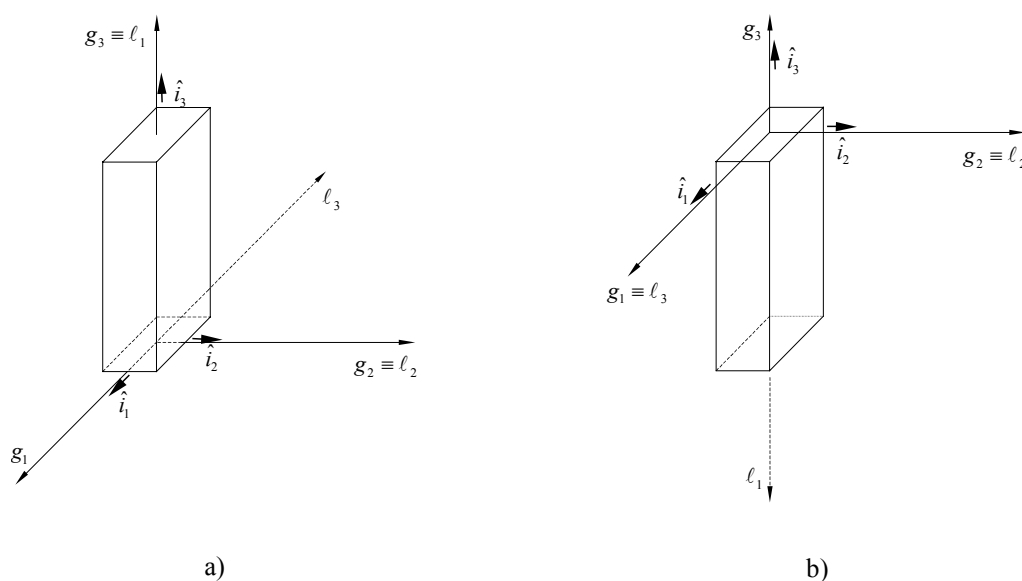


Figura 5.4 - Barra dirigida segundo o sentido positivo a) e negativo b) do eixo g_3 .

– Versor do eixo l_3

O versor do eixo l_3 obtém-se por intermédio do produto vectorial de \hat{l}_1 com \hat{l}_2

$$\hat{l}_3 = \hat{l}_1 \times \hat{l}_2 . \quad (5.6)$$

Assim, a matriz que converte entidades do referencial local para o referencial global apresenta a seguinte constituição:

$$\underline{\bar{T}}^{lg} = [\hat{l}_1 \quad \hat{l}_2 \quad \hat{l}_3] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} . \quad (5.7)$$

Considere-se agora que os eixos l_2 e l_3 não coincidem com os EPCI da secção (ver Figura 5.5). Por este facto, estes eixos são designados por l'_2 e l'_3 e ao sistema coordenado de eixos que formam com l'_1 designa-se por referencial l'_i . Neste caso, os versores de l'_i , \hat{l}'_i , são convertidos para o referencial dos EPCI por intermédio da relação seguinte,

$$\underline{U}^l = \underline{\bar{T}}^{l'l} \underline{U}^{l'} \quad (5.8a)$$

em que

$$\underline{T}^{\ell'\ell} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \tag{5.8b}$$

sendo α o ângulo entre ℓ'_2 e ℓ_2 (ou ℓ'_3 e ℓ_3), ver Figura 5.5. Assim,

$$\begin{aligned} \underline{U}^g &= \underline{T}^{\ell'g} \underline{U}^{\ell'} \\ &= \underline{T}^{\ell'g} \left[\underline{T}^{\ell'\ell} \right]^T \underline{U}^{\ell'} \\ &= \underline{T}^{\ell'g} \underline{U}^{\ell'} \end{aligned} \tag{5.9}$$

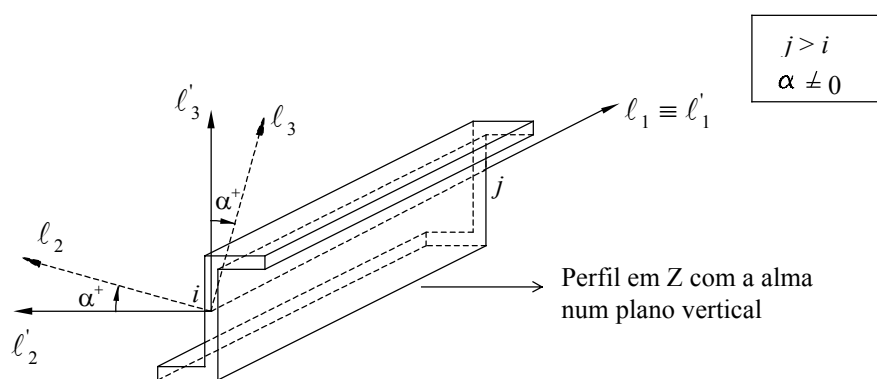


Figura 5.5 - Definição do referencial local da barra para α não nulo.

Na Figura 5.6 representam-se as situações em que os eixos ℓ'_2 e ℓ'_3 não coincidem com os EPCI, no caso de barra com eixo segundo o sentido positivo e negativo de g_3 .

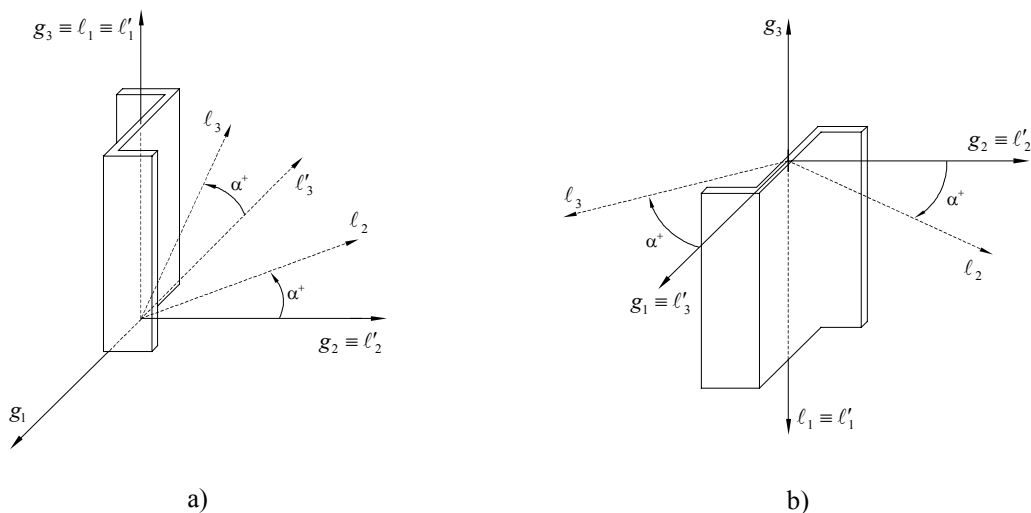


Figura 5.6 – Perfil em Z dirigido segundo o sentido positivo a) e negativo b) do eixo g_3 .

5.3 - Campo de deslocamentos

Considere-se a secção do elemento representada na Figura 5.7. O campo de deslocamentos define-se por intermédio das expressões seguintes,

$$u_1^\ell(x_1^\ell, x_2^\ell, x_3^\ell) = u_1^\ell(x_1^\ell) + x_3^\ell \theta_2^\ell(x_1^\ell) - x_2^\ell \theta_3^\ell(x_1^\ell) \quad (5.10a)$$

$$u_2^\ell(x_1^\ell, x_2^\ell, x_3^\ell) = u_2^\ell(x_1^\ell) - x_3^\ell \theta_1^\ell(x_1^\ell) \quad (5.10b)$$

$$u_3^\ell(x_1^\ell, x_2^\ell, x_3^\ell) = u_3^\ell + x_2^\ell \theta_1^\ell(x_1^\ell) \quad (5.10c)$$

em que

$$u_1^\ell(x_1^\ell) = u_1^\ell(x_1^\ell, x_2^\ell = 0, x_3^\ell = 0) \quad (5.11a)$$

$$u_2^\ell(x_1^\ell) = u_2^\ell(x_1^\ell, x_2^\ell = 0, x_3^\ell = 0) \quad (5.11b)$$

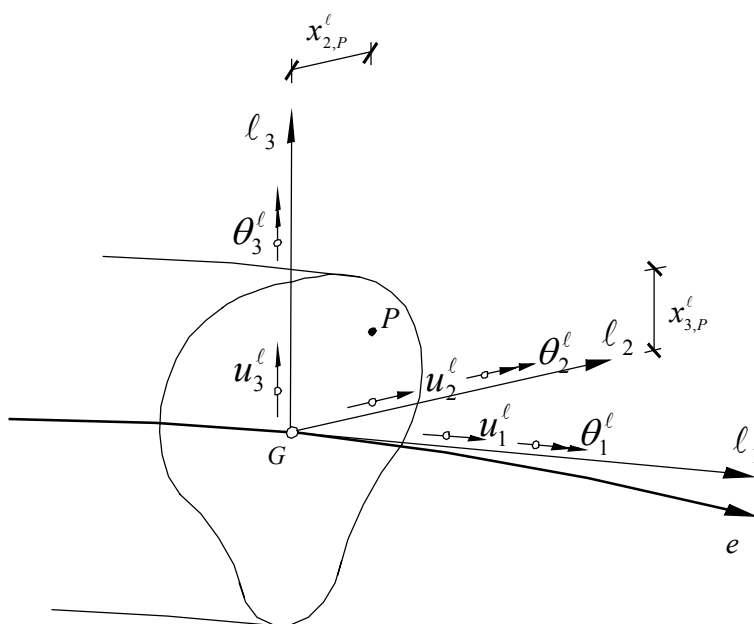


Figura 5.7 - Campo de deslocamentos.

No referencial local e global o vector dos deslocamentos tem as seguintes componentes,

$$\underline{U}^\ell = [u_1^\ell \quad u_2^\ell \quad u_3^\ell \quad \theta_1^\ell \quad \theta_2^\ell \quad \theta_3^\ell] \quad (5.12)$$

$$\underline{U}^g = [u_{1G}^g \quad u_{2G}^g \quad u_{3G}^g \quad \theta_1^g \quad \theta_2^g \quad \theta_3^g] \quad (5.13)$$

respectivamente. A conversão dos deslocamentos do referencial local para o referencial global efectua-se a partir da matriz de transformação $\underline{T}^{\ell g}$,

$$\underline{U}^g = \underline{T}^{\ell g} \underline{U}^\ell \quad (5.14)$$

em que

$$\underline{T}^{\ell g} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{T}}^{\ell g} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\bar{T}}^{\ell g} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

definida na secção anterior.

5.4- Campo de deformações

As extensões são definidas no referencial local, sendo as componentes não nulas as seguintes

$$\underline{\varepsilon}^\ell = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^\ell \\ \gamma_{12}^\ell \\ \gamma_{13}^\ell \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1^\ell}{\partial x_1^\ell} \\ \frac{\partial u_1^\ell}{\partial x_2^\ell} + \frac{\partial u_2^\ell}{\partial x_1^\ell} \\ \frac{\partial u_1^\ell}{\partial x_3^\ell} + \frac{\partial u_3^\ell}{\partial x_1^\ell} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1^\ell}{\partial x_1^\ell} + x_3^\ell \frac{\partial \theta_2^\ell}{\partial x_1^\ell} - x_2^\ell \frac{\partial \theta_3^\ell}{\partial x_1^\ell} \\ -\theta_3^\ell + \frac{\partial u_2^\ell}{\partial x_1^\ell} - x_3^\ell \frac{\partial \theta_1^\ell}{\partial x_1^\ell} \\ \theta_2^\ell + \frac{\partial u_3^\ell}{\partial x_1^\ell} + x_2^\ell \frac{\partial \theta_1^\ell}{\partial x_1^\ell} \end{Bmatrix} \quad (5.16a)$$

ou

$$\underline{\varepsilon}^\ell = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_3^\ell & -x_2^\ell \\ 0 & 1 & 0 & -x_3^\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_2^\ell & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^\ell}{\partial x_1^\ell} \\ \frac{\partial u_2^\ell}{\partial x_1^\ell} - \theta_3^\ell \\ \frac{\partial u_3^\ell}{\partial x_1^\ell} + \theta_2^\ell \\ \frac{\partial \theta_1^\ell}{\partial x_1^\ell} \\ \frac{\partial \theta_2^\ell}{\partial x_1^\ell} \\ \frac{\partial \theta_3^\ell}{\partial x_1^\ell} \end{bmatrix} \quad (5.16b)$$

que em notação matricial fica

$$\underline{\varepsilon}^\ell = \underline{R} \bar{\underline{\varepsilon}}^\ell \quad (5.16c)$$

sendo

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_3^\ell & -x_2^\ell \\ 0 & 1 & 0 & -x_3^\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_2^\ell & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

e

$$\bar{\underline{\varepsilon}}^\ell = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^\ell}{\partial x_1^\ell} \\ \frac{\partial u_2^\ell}{\partial x_1^\ell} - \theta_3^\ell \\ \frac{\partial u_3^\ell}{\partial x_1^\ell} + \theta_2^\ell \\ \frac{\partial \theta_1^\ell}{\partial x_1^\ell} \\ \frac{\partial \theta_2^\ell}{\partial x_1^\ell} \\ \frac{\partial \theta_3^\ell}{\partial x_1^\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_a^\ell \\ \underline{\varepsilon}_c^\ell \\ \underline{\varepsilon}_t^\ell \\ \underline{\varepsilon}_f^\ell \end{bmatrix} \quad (5.18a)$$

em que

$$\underline{\varepsilon}_a^\ell = \frac{\partial u_1^\ell}{\partial x_1^\ell} \quad (5.18b)$$

é a extensão axial,

$$\underline{\varepsilon}_c^\ell = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_{2G}^\ell}{\partial x_1^\ell} - \theta_3^\ell \\ \frac{\partial u_{3G}^\ell}{\partial x_1^\ell} + \theta_2^\ell \end{bmatrix} \quad (5.18c)$$

é o vector das extensões de corte,

$$\underline{\varepsilon}_t^\ell = \frac{\partial \theta_1^\ell}{\partial x_1^\ell} \quad (5.18d)$$

é a extensão de torção, e

$$\underline{\varepsilon}_f^\ell = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_2^\ell}{\partial x_1^\ell} \\ \frac{\partial \theta_3^\ell}{\partial x_1^\ell} \end{bmatrix} \quad (5.18e)$$

é o vector das extensões de flexão. Todas as componentes de extensão estão no referencial local.

5.5 - Tensões

As tensões são definidas no referencial local, sendo as componentes não nulas as seguintes (ver Figura 5.8)

$$\underline{\sigma}^t = [\sigma_1^\ell \quad \tau_{12}^\ell \quad \tau_{13}^\ell]^T \quad (5.19)$$

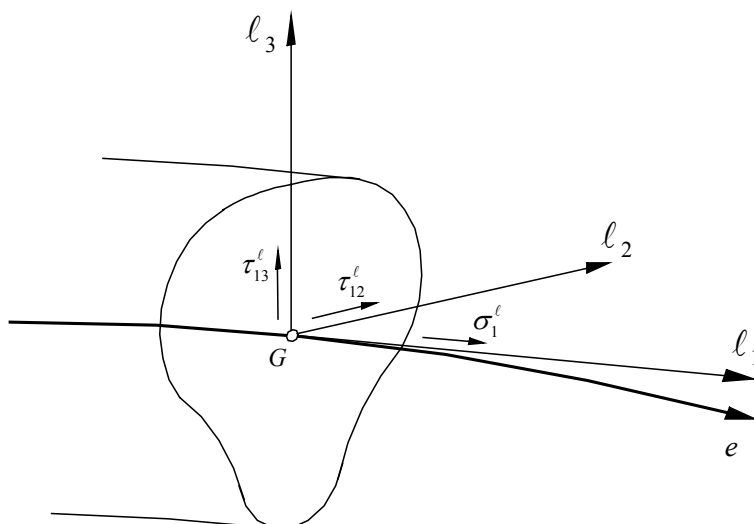


Figura 5.8 - Tensões.

5.6 - Lei de Hooke

A relação entre o vector das tensões e das extensões é estabelecida por intermédio da matriz constitutiva \underline{D} , no referencial local:

$$\underline{\sigma}^\ell = \underline{D} \underline{\varepsilon}^\ell \quad (5.20a)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^\ell \\ \tau_{12}^\ell \\ \tau_{13}^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^\ell \\ \gamma_{12}^\ell \\ \gamma_{13}^\ell \end{bmatrix} \quad (5.20b)$$

em que E é o módulo de elasticidade longitudinal do material e G_{12} , G_{13} são os módulos de elasticidade transversal do material nos planos $\ell_1\ell_2$ e $\ell_1\ell_3$, respectivamente. Se o material for homogéneo e isotrópico $G_{12} = G_{13} = G = E/(2(1+\nu))$ sendo ν o coeficiente de Poisson do material.

5.7 - Esforços

As componentes dos esforços numa secção do elemento, no referencial local, são as seguintes (Figura 5.9)

$$\underline{\bar{\sigma}}^\ell = [N_1^\ell \quad V_2^\ell \quad V_3^\ell \quad M_1^\ell \quad M_2^\ell \quad M_3^\ell]^T \quad (5.21)$$

em que

$$\begin{aligned} N_1^\ell &= \int_A \sigma_1^\ell dA, \\ V_2^\ell &= \int_A \tau_{12}^\ell dA, \\ V_3^\ell &= \int_A \tau_{13}^\ell dA, \\ M_1^\ell &= \int_A (-\tau_{12}^\ell x_3^\ell + \tau_{13}^\ell x_2^\ell) dA, \\ M_2^\ell &= \int_A \sigma_1^\ell x_3^\ell dA, \\ M_3^\ell &= -\int_A \sigma_1^\ell x_2^\ell dA \end{aligned} \quad (5.22)$$

são o esforço axial, o esforço de corte segundo o eixo ℓ_2 , o esforço de corte segundo o eixo ℓ_3 o momento torsor, o momento flector segundo o eixo ℓ_2 e o momento flector segundo o eixo ℓ_3 , respectivamente.

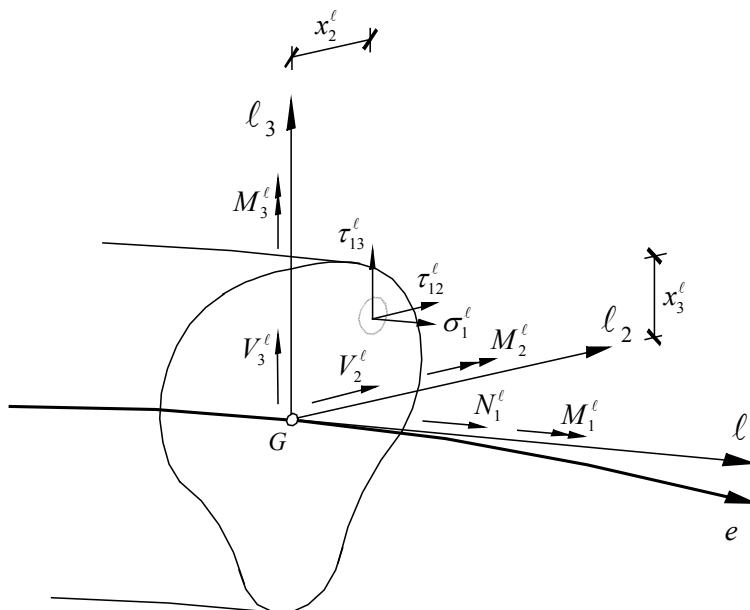


Figura 5.9 - Esforços na secção de um elemento de Timoshenko no espaço.

A relação (5.22) pode ser rescrita da seguinte forma

$$\underline{\bar{\sigma}}^\ell = \begin{bmatrix} N_1^\ell \\ V_2^\ell \\ V_3^\ell \\ M_1^\ell \\ M_2^\ell \\ M_3^\ell \end{bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x_3^\ell & x_2^\ell \\ x_3^\ell & 0 & 0 \\ -x_2^\ell & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^\ell \\ \tau_{12}^\ell \\ \tau_{13}^\ell \end{bmatrix} dA \tag{5.23}$$

pelo que

$$\underline{\bar{\sigma}}^\ell = \int_A \underline{R}^T \underline{\sigma}^\ell dA \tag{5.24}$$

Substituindo (5.20) em (5.24) e tendo em atenção a relação (5.16c) obtém-se

$$\begin{aligned} \underline{\bar{\sigma}}^\ell &= \int_A \underline{R}^T \underline{D} \underline{\varepsilon}^\ell dA \\ &= \int_A \underline{R}^T \underline{D} \underline{R} \underline{\bar{\varepsilon}}^\ell dA \end{aligned} \tag{5.25}$$

Efectuando o produto matricial $\underline{R}^T \underline{D} \underline{R}$ obtém-se

$$\int_A \underline{R}^T \underline{D} \underline{R} dA = \int_A \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & x_3^\ell E & -x_2^\ell E \\ 0 & G_{12} & 0 & -x_3^\ell G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{13} & x_2^\ell G_{13} & 0 & 0 \\ 0 & -x_3^\ell G_{12} & x_2^\ell G_{13} & G_{12}(x_3^\ell)^2 + G_{13}(x_2^\ell)^2 & 0 & 0 \\ x_3^\ell E & 0 & 0 & 0 & (x_3^\ell)^2 E & -x_2^\ell x_3^\ell E \\ -x_2^\ell E & 0 & 0 & 0 & -x_2^\ell x_3^\ell E & (x_2^\ell)^2 E \end{bmatrix} dA \quad (5.26)$$

Como os eixos ℓ_1 e ℓ_2 são principais centrais de inércia, e admitindo-se material homogéneo e isotrópico,

$$\int_A E dA = EA \quad (5.27a)$$

$$\int_A G_{12} dA = \alpha_{12} GA = GA_2^{\ell*} \quad (5.27b)$$

$$\int_A G_{13} dA = \alpha_{13} GA = GA_3^{\ell*} \quad (5.27c)$$

$$\int_A E x_i^\ell dA = E \int_A x_i^\ell dA = 0 \quad p/i = 2,3 \quad (5.27d)$$

$$\int_A G x_i^\ell dA = G \int_A x_i^\ell dA = 0 \quad p/i = 2,3 \quad (5.27e)$$

$$\int_A E x_i^\ell x_j^\ell dA = E \int_A x_i^\ell x_j^\ell dA = 0 \quad p/i = 2,3 \quad c/i \neq j \quad (5.27f)$$

$$\int_A E (x_3^\ell)^2 dA = E \int_A (x_3^\ell)^2 dA = E I_2^\ell \quad (5.27g)$$

$$\int_A E (x_2^\ell)^2 dA = E \int_A (x_2^\ell)^2 dA = E I_3^\ell \quad (5.27h)$$

$$\int_A [G_{13}(x_2^\ell)^2 + G_{12}(x_3^\ell)^2] dA = G \int_A [(x_2^\ell)^2 + (x_3^\ell)^2] dA = G I_1^\ell \quad (5.27i)$$

em que $A_2^{\ell*}$ e $A_3^{\ell*}$ são as áreas reduzidas de corte segundo os eixos ℓ_2 e ℓ_3 , I_2^ℓ e I_3^ℓ são os momentos de inércia em torno dos eixos ℓ_2 e ℓ_3 e I_1^ℓ é o momento de inércia em torno de ℓ_1 . Assim,

$$\hat{D} = \int_A \underline{R}^T \underline{D} \underline{R} dA = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GA_2^{\ell*} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GA_3^{\ell*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_1^{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_2^{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_3^{\ell} \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Desta forma, os esforços determinam-se por intermédio da relação seguinte

$$\underline{\sigma}^{\ell} = \hat{D} \underline{\varepsilon}^{\ell} \quad (5.29a)$$

$$\begin{bmatrix} N_1^{\ell} \\ V_2^{\ell} \\ V_3^{\ell} \\ M_1^{\ell} \\ M_2^{\ell} \\ M_3^{\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GA_2^{\ell*} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GA_3^{\ell*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_1^{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_2^{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_3^{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^{\ell}}{\partial x_1^{\ell}} \\ \frac{\partial u_2^{\ell}}{\partial x_1^{\ell}} - \theta_3^{\ell} \\ \frac{\partial u_3^{\ell}}{\partial x_1^{\ell}} + \theta_2^{\ell} \\ \frac{\partial \theta_1^{\ell}}{\partial x_1^{\ell}} \\ \frac{\partial \theta_2^{\ell}}{\partial x_1^{\ell}} \\ \frac{\partial \theta_3^{\ell}}{\partial x_1^{\ell}} \end{bmatrix} \quad (5.29b)$$

em que

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} \bar{D}_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{D}_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_f \end{bmatrix} \quad (5.30a)$$

sendo

$$\bar{D}_a = EA, \quad (5.30b)$$

$$\bar{D}_c = \begin{bmatrix} GA_2^{\ell*} & 0 \\ 0 & GA_3^{\ell*} \end{bmatrix}, \quad (5.30c)$$

$$\bar{D}_t = GI_1^{\ell}, \quad (5.30d)$$

e

$$\underline{\underline{D}}_f = \begin{bmatrix} EI_2^\ell & 0 \\ 0 & EI_3^\ell \end{bmatrix}. \quad (5.30e)$$

as submatrizes associadas à rigidez axial, corte, torção e flexão, respectivamente.

Na formulação de Timoshenko, a distribuição das tensões de corte τ_{12} e τ_{13} é considerada constante em toda a secção transversal. Tal facto deriva da hipótese de que as secções transversais se mantêm planas após a deformação, o que não acontece na realidade, pois há uma distorção da secção. Assim, para ter em conta essa distorção e, conseqüentemente, uma distribuição de tensões ao longo da secção diferente da linear, multiplica-se a área A_2^ℓ e A_3^ℓ da secção pelos coeficientes α_2^ℓ e α_3^ℓ , respectivamente. Estes coeficientes são designados por coeficientes de forma ou de distorção. A sua obtenção, para cada direcção, ℓ_2 e ℓ_3 , é feita aplicando o *PTV*, de forma a que o trabalho de deformação da tensão tangencial constante coincida com o exacto da teoria das vigas (Barros 1989, 1997). As áreas resultantes são designadas por áreas reduzidas de corte ($A_2^{\ell*}$ e $A_3^{\ell*}$).

5.8 - Trabalho interno de deformação

Substituindo as componentes do vector das extensões e das tensões na parcela do trabalho interno de deformação (4.13) do princípio dos trabalhos virtuais obtém-se

$$\delta W_{\text{int}}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}^\ell)^T \underline{\underline{\sigma}}^\ell dV = \int_{V^{(e)}} (\delta\varepsilon_1^\ell \sigma_1^\ell + \delta\gamma_{12}^\ell \tau_{12}^\ell + \delta\gamma_{13}^\ell \tau_{13}^\ell) dV. \quad (5.31)$$

Desenvolvendo esta expressão e tendo em conta as relações (5.16c), (5.20a) e (5.28) obtém-se

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}^{(e)} &= \int_{V^{(e)}} \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}^\ell)^T \underline{\underline{\sigma}}^\ell dV \\ &= \int_{V^{(e)}} \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}^\ell)^T \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}}^\ell dV \\ &= \int_{V^{(e)}} \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}^\ell)^T \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{R}} \underline{\underline{\varepsilon}}^\ell dV \\ &= \int_{L^{(e)}} \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}^\ell)^T \left(\int_{A^{(e)}} \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{R}} dA \right) \underline{\underline{\varepsilon}}^\ell dL \\ &= \int_{L^{(e)}} \delta(\underline{\underline{\varepsilon}}^\ell)^T \underline{\underline{\hat{D}}} \underline{\underline{\varepsilon}}^\ell dL \end{aligned} \quad (5.32)$$

5.9 - Formulação do elemento de pórtico 3D de Timoshenko por elementos finitos isoparamétricos de classe C_0

5.9.1 - Definição da geometria

As coordenadas cartesianas de um ponto qualquer do elemento, na coordenada normalizada s_1 , obtêm-se por intermédio da seguinte relação

$$\underline{x}^g(s_1) = \sum_{k=1}^n N_k(s_1) \underline{x}_k^g \quad (5.33a)$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_1^g \\ x_2^g \\ x_3^g \end{bmatrix} (s_1) = \begin{bmatrix} N_1(s_1) & 0 & 0 & \dots & N_n(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(s_1) & 0 & \dots & 0 & N_n(s_1) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(s_1) & \dots & 0 & 0 & N_n(s_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1}^g \\ x_{2,1}^g \\ x_{3,1}^g \\ \vdots \\ x_{1,n}^g \\ x_{2,n}^g \\ x_{3,n}^g \end{bmatrix} \quad (5.33b)$$

em que n é o número de nós do elemento, $N_k(s_1)$ é a função de forma do elemento relativa ao nó k , avaliada na coordenada normalizada s_1 e $x_{i,k}^g$ $c/i=1,2,3$ representa as coordenadas do nó k no referencial global. A relação (5.33b) pode ainda ser rescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1^{g_0} \\ x_2^{g_0} \\ x_3^{g_0} \end{bmatrix} (s_1) &= \begin{bmatrix} \underline{N}_{x1}(s_1) \\ \underline{N}_{x2}(s_1) \\ \underline{N}_{x2}(s_1) \end{bmatrix}^{(e)} \underline{X}^{g(e)} \\ &= \underline{N}_x^{(e)}(s_1) \underline{X}^{g(e)} \end{aligned} \quad (5.33c)$$

em que $\underline{X}^{g(e)}$ é o vector contendo as coordenadas, no referencial global, dos nós do elemento.

5.9.2 - Deslocamentos

Conhecidos os deslocamentos dos nós do elemento no referencial global, $\underline{U}^{g(e)}$, os deslocamentos de um ponto qualquer do elemento, na coordenada normalizada s_1 , obtêm-se por intermédio da relação seguinte

$$\underline{U}^g(s_1) = \sum_{k=1}^n N_k(s_1) \underline{U}_k^g \quad (5.34a)$$

$$\begin{bmatrix} u_1^g \\ u_2^g \\ u_3^g \\ \theta_1^g \\ \theta_2^g \\ \theta_3^g \end{bmatrix} (s_1) = \begin{bmatrix} N_1(s_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_n(s_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1(s_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_n(s_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1(s_1) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_n(s_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1(s_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_n(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1(s_1) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_n(s_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1(s_1) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_n(s_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1}^g \\ u_{2,1}^g \\ u_{3,1}^g \\ \theta_{1,1}^g \\ \theta_{2,1}^g \\ \theta_{3,1}^g \\ \dots \\ u_{1,n}^g \\ u_{2,n}^g \\ u_{3,n}^g \\ \theta_{1,n}^g \\ \theta_{2,n}^g \\ \theta_{3,n}^g \end{bmatrix} \quad (5.34b)$$

em que $u_{i,k}^g$ e $\theta_{i,k}^g$ $c/i=1,2,3$ representam os deslocamentos e as rotações do nó k no referencial global. A relação (5.34b) pode ainda ser rescrita da seguinte forma

$$\underline{U}^g(s_1) = \underline{N}_u^{(e)}(s_1) \underline{U}^{g(e)} \quad (5.34c)$$

5.9.2 - Matrizes de deformação

As extensões num ponto do elemento, na coordenada normalizada s_1 , obtêm-se a partir dos deslocamentos dos nós dos elemento, efectuando a seguinte operação (ver (5.18))

$$\underline{\bar{\varepsilon}}^\ell(s_1) = \sum_{k=1}^n \underline{B}_k(s_1) \underline{U}_k^\ell \quad (5.35)$$

em que

$$\underline{U}_k^\ell = [u_{1,k}^\ell \quad u_{2,k}^\ell \quad u_{3,k}^\ell \quad \theta_{1,k}^\ell \quad \theta_{2,k}^\ell \quad \theta_{3,k}^\ell]^T \quad (5.36)$$

é o vector dos deslocamentos do nó k , no referencial local do elemento, e

$$\underline{B}_k(s_1) = \begin{bmatrix} \frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} & 0 & 0 & 0 & -N_k(s_1) \\ 0 & 0 & \frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} & 0 & N_k(s_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

é a matriz de deformação relativa ao nó k , avaliada na coordenada normalizada s_1 , e \underline{U}_k^ℓ é o vector dos deslocamentos do nó k , no referencial local. Substituindo (5.14) em (5.35) obtém-se

$$\underline{\bar{\varepsilon}}^\ell(s_1) = \sum_{k=1}^n \underline{B}_k(s_1) [\underline{T}^{\ell g}(s_1)]^T \underline{U}_k^g \quad (5.38a)$$

ou

$$\underline{\bar{\varepsilon}}^\ell(s_1) = \sum_{k=1}^n \underline{\bar{B}}_k(s_1) \underline{U}_k^g \quad (5.38b)$$

em que

$$\underline{U}_k^g = [u_{1,k}^g \quad u_{2,k}^g \quad u_{3,k}^g \quad \theta_{1,k}^g \quad \theta_{2,k}^g \quad \theta_{3,k}^g]^T \quad (5.39)$$

é o vector dos deslocamentos do nó k , no referencial global, $\underline{T}^{\ell g}(s_1)$ é a matriz de transformação do referencial local para o referencial global, definida na secção 5.2.3, e

$$\underline{\bar{B}}_k(s_1) = \underline{B}_k(s_1) [\underline{T}^{\ell g}(s_1)]^T \quad (5.40)$$

Para calcular $dN_k(s_1)/dx_1^\ell$ da matriz \underline{B}_k efectua-se procedimento similar ao descrito na secção 3.3. Assim,

$$\frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} = \frac{dN_k(s_1)}{ds_1} \frac{ds_1}{dx_1^\ell} \quad (5.41)$$

Como

$$dx_1^\ell = \sqrt{(dx_1^g)^2 + (dx_2^g)^2 + (dx_3^g)^2} \quad (5.42)$$

então

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^\ell}{ds_1} &= \frac{\sqrt{(dx_1^g)^2 + (dx_2^g)^2 + (dx_3^g)^2}}{ds_1} \\ &= \left\{ \left(\frac{dx_1^g}{ds_1} \right)^2 + \left(\frac{dx_2^g}{ds_1} \right)^2 + \left(\frac{dx_3^g}{ds_1} \right)^2 \right\}^{1/2} . \end{aligned} \quad (5.43a)$$

Substituindo (5.33) em (5.43a) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^\ell}{ds_1} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{dN_k(s_1)}{ds_1} x_{1,k}^g \right)^2 + \left(\frac{dN_k(s_1)}{ds_1} x_{2,k}^g \right)^2 + \left(\frac{dN_k(s_1)}{ds_1} x_{3,k}^g \right)^2 \right\}^{1/2} \\ &= J^{(e)} \end{aligned} \quad (5.43b)$$

que é o Jacobiano avaliado na coordenada normalizada s_1 . Substituindo (5.43) em (5.41) obtém-se

$$\frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} = \frac{dN_k(s_1)}{ds_1^\ell} \frac{1}{J^{(e)}} . \quad (5.44)$$

Na secção 5.4, o vector das extensões foi decomposto nas componentes de extensão axial, extensões de corte, extensão por torção e extensões por flexão. Para determinar estas componentes de extensão a partir dos deslocamentos dos nós efectua-se o procedimento que se passa a descrever.

– *Matriz de deformação axial*

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_a^\ell(s_1) &= \sum_{k=1}^n \underline{B}_{a,k}(s_1) \underline{U}_{a,k}^\ell \\ &= \sum_{k=1}^n \underline{B}_{a,k}(s_1) \left[\underline{T}_a^{\ell g}(s_1) \right]_k^T \underline{U}_{a,k}^g \end{aligned} \quad (5.45)$$

em que $\left[\underline{T}_a^{\ell g}(s_1) \right]_k^T = \hat{\ell}_{1,k}^T(s_1)$ é o versor do eixo local ℓ_1 no referencial global, pelo que é constituído pelos cosenos dos ângulos que esse eixo faz com os eixos g_i (g_1, g_2, g_3) do referencial global e

$$\underline{U}_a^\ell = \left[\underline{T}_a^{\ell g}(s_1) \right]^T \underline{U}_a^g . \quad (5.46)$$

Por sua vez,

$$\underline{B}_{a,k}(s_1) = \frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} \quad (5.47)$$

é o termo correspondente ao nó k da matriz de deformação axial,

$$\underline{U}_{a,k}^\ell = u_{1,k}^\ell \quad (5.48)$$

é o deslocamento do nó k segundo o eixo local ℓ_1 , e

$$\underline{U}_{a,k}^g = [u_{1,k}^g \quad u_{2,k}^g \quad u_{3,k}^g]^T \quad (5.49)$$

é o vector dos deslocamentos do nó k segundo os eixos globais g_i (g_1, g_2, g_3).

– *Matriz de deformação de corte*

Neste caso,

$$\begin{aligned} \bar{\underline{\varepsilon}}_c^\ell(s_1) &= \sum_{k=1}^n \underline{B}_{c,k}(s_1) \underline{U}_{c,k}^\ell \\ &= \sum_{k=1}^n \underline{B}_{c,k}(s_1) [\underline{T}_c^{\ell g}(s_1)]_k^T \underline{U}_{c,k}^g \end{aligned} \quad (5.50)$$

em que

$$\underline{T}_{c,k}^{\ell g}(s_1) = \begin{bmatrix} \hat{\ell}_2 & \hat{\ell}_3 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{T}^{\ell g} \end{bmatrix}_k \quad (5.51)$$

é a matriz de transformação associada aos graus de liberdade de corte e

$$\underline{U}_c^\ell = [\underline{T}_c^{\ell g}(s_1)]^T \underline{U}_c^g \quad (5.52)$$

Por sua vez,

$$\underline{B}_{c,k}(s_1) = \begin{bmatrix} \frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} & 0 & 0 & 0 & -N_k(s_1) \\ 0 & \frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} & 0 & N_k(s_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

são os termos correspondentes no nó k da matriz de deformação de corte,

$$\underline{U}_{c,k}^\ell = [u_{2,k}^\ell \quad u_{3,k}^\ell \quad \theta_{1,k}^\ell \quad \theta_{2,k}^\ell \quad \theta_{3,k}^\ell]^T \quad (5.54)$$

é o vector dos deslocamento do nó k no referencial local, e

$$\underline{U}_{c,k}^g = [u_{1,k}^g \quad u_{2,k}^g \quad u_{3,k}^g \quad \theta_{1,k}^g \quad \theta_{2,k}^g \quad \theta_{3,k}^g]^T \quad (5.55)$$

é o vector dos deslocamentos do nó k no referencial global.

– *Matriz de deformação de torção*

A extensão de torção obtém-se a partir dos deslocamentos, por intermédio da relação seguinte,

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_t(s_1) &= \sum_{k=1}^n \underline{B}_{t,k}(s_1) \underline{U}_{t,k}^\ell \\ &= \sum_{k=1}^n \underline{B}_{t,k}(s_1) [\underline{T}_t^{\ell g}(s_1)]_k^T \underline{U}_{t,k}^g \end{aligned} \quad (5.56)$$

em que $[\underline{T}_t^{\ell g}(s_1)]_k^T = \hat{\ell}_{1,k}^T(s_1)$ é o versor do eixo local ℓ_1 no referencial global e

$$\underline{U}_t^\ell = [\underline{T}_t^{\ell g}(s_1)]^T \underline{U}_t^g \quad (5.57)$$

Por sua vez,

$$\underline{B}_{t,k}(s_1) = \frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} \quad (5.58)$$

é o termo correspondente ao nó k da matriz de deformação de torção,

$$\underline{U}_{t,k}^\ell = \theta_{1,k}^\ell \quad (5.59)$$

é a rotação do nó k segundo o eixo local ℓ_1 , e

$$\underline{U}_{t,k}^g = [\theta_{1,k}^g \quad \theta_{2,k}^g \quad \theta_{3,k}^g]^T \quad (5.60)$$

é o vector das rotações do nó k no referencial global.

– *Matriz de deformação de flexão*

As extensões de flexão obtêm-se a partir dos deslocamentos, aplicando a expressão seguinte,

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_f(s_1) &= \sum_{k=1}^n \underline{B}_{f,k}(s_1) \underline{U}_{f,k}^\ell \\ &= \sum_{k=1}^n \underline{B}_{f,k}(s_1) [\underline{T}_f^{\ell g}(s_1)]_k^T \underline{U}_{f,k}^g \end{aligned} \quad (5.61)$$

em que

$$\underline{T}_{f,k}^{\ell g}(s_1) = \begin{bmatrix} \hat{\ell}_2 & \hat{\ell}_3 \end{bmatrix}_k \quad (5.62)$$

é a matriz de transformação associada aos graus de liberdade de flexão e

$$\underline{U}_f^\ell = \left[\underline{T}_{f,k}^{\ell g}(s_1) \right]^T \underline{U}_f^g \quad (5.63)$$

Por sua vez,

$$\underline{B}_{f,k}(s_1) = \begin{bmatrix} \frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} & 0 \\ 0 & \frac{dN_k(s_1)}{dx_1^\ell} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

são os termos correspondentes ao nó k da a matriz de deformação de flexão,

$$\underline{U}_{f,k}^\ell = \begin{bmatrix} \theta_{2,k}^\ell & \theta_{3,k}^\ell \end{bmatrix}^T \quad (5.65)$$

é o vector das rotações do nó k no referencial local, e

$$\underline{U}_{f,k}^g = \begin{bmatrix} \theta_{1,k}^g & \theta_{2,k}^g & \theta_{3,k}^g \end{bmatrix}^T \quad (5.66)$$

é o vector das rotações do nó k no referencial global.

5.9.3 - Matriz de rigidez

Substituindo as expressões (5.38) em (5.32) obtém-se

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}^{(e)} &= \int_{L^{(e)}} \delta \left(\underline{\bar{\varepsilon}}^\ell \right)^T \hat{\underline{D}}^\ell \underline{\bar{\varepsilon}}^\ell dL \\ &= \int_{L^{(e)}} \delta \left[\underline{U}^{g(e)} \right]^T \underline{T}^{\ell g} \underline{B}^T \hat{\underline{D}}^\ell \underline{B} \left[\underline{T}^{\ell g} \right]^T \underline{U}^{g(e)} dL \end{aligned} \quad (5.67)$$

Convertendo (5.67) para coordenadas normalizadas resulta

$$\delta W_{\text{int}}^{(e)} = \delta \left[\underline{U}^{g(e)} \right]^T \int_{-1}^{+1} \underline{T}^{\ell g} \underline{B}^T \hat{\underline{D}}^\ell \underline{B} \left[\underline{T}^{\ell g} \right]^T J^{(e)} ds_1 \underline{U}^{g(e)} \quad (5.68)$$

em que

$$\underline{K}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \underline{T}^{\ell g} \underline{B}^T \hat{\underline{D}}^\ell \underline{B} \left[\underline{T}^{\ell g} \right]^T J^{(e)} ds_1 \quad (5.69)$$

é a matriz de rigidez do elemento. Aplicando a integração numérica de Gauss Legendre (ver secção 3.3.3) ao cálculo da matriz de rigidez, a relação (5.70) reduz-se à seguinte,

$$\underline{K}^{(e)} = \sum_{p=1}^{N_{s_1}} \left\{ \underline{T}^{\ell g} \underline{B}^T \hat{\underline{D}}^{\ell} \underline{B} [\underline{T}^{\ell g}]^T \underline{J} \right\}_{s_1^p}^{(e)} W_p \quad (5.70)$$

em que N_{s_1} , é o número de pontos de integração na direcção s_1 , em correspondência com a regra de integração seleccionada, W_p é o peso associado ao ponto de integração de coordenadas s_1^p e J é o Jacobiano.

A matriz de rigidez de um elemento pode ser obtida calculando-se as submatrizes de rigidez associadas à deformação axial, às deformações de corte, à deformação de torção e às deformações de flexão. Assim, substituindo (5.18a) e (5.30a) em (5.32) obtém-se

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}^{(e)} &= \int_{L^{(e)}} \delta(\underline{\bar{\varepsilon}}^{\ell})^T \hat{\underline{D}}^{\ell} \underline{\bar{\varepsilon}}^{\ell} dL \\ &= \int_{L^{(e)}} \left[\delta(\underline{\bar{\varepsilon}}_a^{\ell})^T \quad \delta(\underline{\bar{\varepsilon}}_c^{\ell})^T \quad \delta(\underline{\bar{\varepsilon}}_t^{\ell})^T \quad \delta(\underline{\bar{\varepsilon}}_f^{\ell})^T \right] \begin{bmatrix} D_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{D}_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{D}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\bar{\varepsilon}}_a^{\ell} \\ \underline{\bar{\varepsilon}}_c^{\ell} \\ \underline{\bar{\varepsilon}}_t^{\ell} \\ \underline{\bar{\varepsilon}}_f^{\ell} \end{bmatrix} dL \end{aligned} \quad (5.71)$$

Efectuando os produtos matriciais em (5.71) e fazendo intervir as relações (5.45), (5.50) (5.56) e (5.61) obtém-se

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}^{(e)} &= [\delta(\underline{U}_a^g)]^T \int_{L^{(e)}} \underline{T}_a^{\ell g} \underline{B}_a^T D_a \underline{B}_a [\underline{T}_a^{\ell g}]^T dL \underline{U}_a^g + [\delta(\underline{U}_c^g)]^T \int_{L^{(e)}} \underline{T}_c^{\ell g} \underline{B}_c^T \underline{D}_c \underline{B}_c [\underline{T}_c^{\ell g}]^T dL \underline{U}_c^g + \\ &[\delta(\underline{U}_t^g)]^T \int_{L^{(e)}} \underline{T}_t^{\ell g} \underline{B}_t^T D_t \underline{B}_t [\underline{T}_t^{\ell g}]^T dL \underline{U}_t^g + [\delta(\underline{U}_f^g)]^T \int_{L^{(e)}} \underline{T}_f^{\ell g} \underline{B}_f^T \underline{D}_f \underline{B}_f [\underline{T}_f^{\ell g}]^T dL \underline{U}_f^g \end{aligned} \quad (5.72)$$

em que

$$\underline{K}_a^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{T}_a^{\ell g} \underline{B}_a^T D_a \underline{B}_a [\underline{T}_a^{\ell g}]^T dL \quad (5.73a)$$

$$\underline{K}_c^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{T}_c^{\ell g} \underline{B}_c^T \underline{D}_c \underline{B}_c [\underline{T}_c^{\ell g}]^T dL \quad (5.73b)$$

$$\underline{K}_t^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{T}_t^{\ell g} \underline{B}_t^T D_t \underline{B}_t [\underline{T}_t^{\ell g}]^T dL \quad (5.73c)$$

$$\underline{K}_f^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{T}_f^{\ell g} \underline{B}_f^T \underline{D}_f \underline{B}_f [\underline{T}_f^{\ell g}]^T dL \quad (5.73d)$$

são as submatrizes de rigidez axial, corte, torção e flexão, respectivamente. Aplicando a integração numérica de Gauss-Legendre, as relações (5.73) convertem-se nas seguintes

$$\underline{K}_a^{(e)} = \sum_{p=1}^{N_{s_1}^a} \left\{ \underline{T}_a^{\ell g} \underline{B}_a^T \underline{D}_a \underline{B}_a \left[\underline{T}_a^{\ell g} \right]^T \underline{J} \right\}_{s_1^p}^{(e)} W_p \quad (5.74a)$$

$$\underline{K}_c^{(e)} = \sum_{p=1}^{N_{s_1}^c} \left\{ \underline{T}_c^{\ell g} \underline{B}_c \underline{D}_c \underline{B}_c \left[\underline{T}_c^{\ell g} \right]^T \underline{J} \right\}_{s_1^p}^{(e)} W_p \quad (5.74b)$$

$$\underline{K}_t^{(e)} = \sum_{p=1}^{N_{s_1}^t} \left\{ \underline{T}_t^{\ell g} \underline{B}_t^T \underline{D}_t \underline{B}_t \left[\underline{T}_t^{\ell g} \right]^T \underline{J} \right\}_{s_1^p}^{(e)} W_p \quad (5.74c)$$

$$\underline{K}_f^{(e)} = \sum_{p=1}^{N_{s_1}^f} \left\{ \underline{T}_f^{\ell g} \underline{B}_f \underline{D}_f \underline{B}_f \left[\underline{T}_f^{\ell g} \right]^T \underline{J} \right\}_{s_1^p}^{(e)} W_p \quad (5.74d)$$

em que $N_{s_1}^a$, $N_{s_1}^c$, $N_{s_1}^t$ e $N_{s_1}^f$ são número de pontos de Gauss associados à integração numérica da matriz de rigidez axial, corte, torção e flexão, respectivamente, fornecidos no Quadro 5.1.

Quadro 5.1 - Pontos de Gauss para integração numérica das submatrizes de rigidez do elemento de Timoshenko no espaço.

Ordem de integração	Elemento		
	Função de forma	Linear	Quadrática
Completa	Axial	1	2
	Corte	2	3
	Torção	1	2
	Flexão	1	2
Reduzida = Selectiva	Axial	1	2
	Corte	1	2
	Torção	1	2
	Flexão	1	2

5.9.4 - Vector solicitação

5.9.4.1 - Introdução

Para complementar o sistema de equações de equilíbrio será necessário determinar as forças nodais, equivalentes às acções exteriores. Nesta secção descrevem-se os procedimentos necessários à obtenção das forças nodais equivalentes aos tipos de acções seguintes:

Forças aplicadas em pontos nodais da estrutura;
 Forças aplicadas em pontos do interior de elementos;
 Forças de volume;
 Forças distribuídas por unidade de comprimento;
 Deslocamentos prescritos.

5.9.4.2 - Forças aplicadas em pontos nodais da estrutura

Considere-se que num ponto P da estrutura está aplicado o vector de forças

$$\underline{Q}_P^g = [F_1^g \quad F_2^g \quad F_3^g \quad M_1^g \quad M_2^g \quad M_3^g]^T_P \quad (5.75)$$

cujas componentes estão referidas ao sistema global de eixos e estão em correspondência com os graus de liberdade definidos em (5.13). Admite-se que o ponto P coincide com o centro de gravidade da secção. Neste caso, as forças nodais equivalentes à acção de \underline{Q}_P^g obtêm-se espalhando \underline{Q}_P^g no vector das forças nodais equivalentes da estrutura, $\underline{Q}^{g(E)}$.

5.9.4.3 Forças aplicadas em pontos do interior de elementos

No ponto A de coordenada local s_1^A do elemento representado na Figura 5.10 está aplicado o vector de forças

$$\underline{Q}_A^g = [F_1^g \quad F_2^g \quad F_3^g \quad M_1^g \quad M_2^g \quad M_3^g]^T_A \quad (5.76)$$

cujas componentes estão referidas ao sistema global de eixos e estão em correspondência com os graus de liberdade definidos em (5.13).

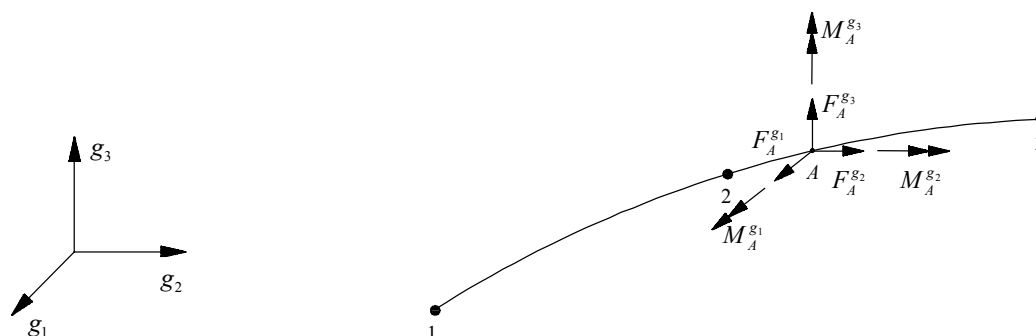


Figura 5.11 - Forças generalizadas aplicadas em pontos do interior de elementos.

Para determinar as forças nodais equivalentes ao vector (5.76) aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais obtendo-se,

$$\begin{Bmatrix} F_1^g \delta u_1^g \\ F_2^g \delta u_2^g \\ F_3^g \delta u_3^g \\ M_1^g \delta \theta_1^g \\ M_2^g \delta \theta_2^g \\ M_3^g \delta \theta_3^g \end{Bmatrix}_m = \begin{Bmatrix} F_1^g \\ F_2^g \\ F_3^g \\ M_1^g \\ M_2^g \\ M_3^g \end{Bmatrix}_A N_m^{(e)}(s_{1,A}) \begin{Bmatrix} \delta u_1^g \\ \delta u_2^g \\ \delta u_3^g \\ \delta \theta_1^g \\ \delta \theta_2^g \\ \delta \theta_3^g \end{Bmatrix}_m \quad (5.77)$$

em que,

$$\begin{Bmatrix} \delta u_1^g \\ \delta u_2^g \\ \delta u_3^g \\ \delta \theta_1^g \\ \delta \theta_2^g \\ \delta \theta_3^g \end{Bmatrix}_m = \delta \underline{U}_m^g \quad (5.78)$$

é o vector dos deslocamentos virtuais no nó m , no referencial global. Como os deslocamentos virtuais são quaisquer, (5.77) simplificar-se-á para,

$$\begin{Bmatrix} F_1^g \\ F_2^g \\ F_3^g \\ M_1^g \\ M_2^g \\ M_3^g \end{Bmatrix}_m = N_m^{(e)}(s_{1,A}) \begin{Bmatrix} F_1^g \\ F_2^g \\ F_3^g \\ M_1^g \\ M_2^g \\ M_3^g \end{Bmatrix}_A \quad (5.79a)$$

ou

$$\underline{Q}_m^g = N_m(s_{1,A}) \underline{Q}_A^g \quad (5.79b)$$

As coordenadas locais do ponto de aplicação do vector de forças \underline{Q}_A^g podem ser obtidas recorrendo-se à condição de se estar a trabalhar com elementos finitos isoparamétricos. Assim, a coordenada $s_{1,A}$ determina-se por intermédio da resolução da seguinte equação não linear

$$x_{i,A}^g = \sum_{m=1}^n N_m(s_{1,A}) x_{i,m}^g \quad c/i=1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3 \quad (5.80)$$

em que $x_{i,m}^g$ é a componente i do nó m do elemento, no referencial global, e $x_{i,A}^g$ é a componente i do ponto A do elemento, no referencial global. Substituindo o valor de $s_{1,A}$

em (5.79) determinam-se as forças nodais equivalentes ao vector de forças generalizadas aplicadas num ponto genérico A do interior de um elemento.

5.9.4.4 - Forças de volume

Neste trabalho despreza-se os efeitos de acelerações rotacionais, pelo que apenas se simula os efeitos de acelerações que geram forças segundo o sistema coordenado global. Assim, uma porção de volume de um elemento de pórtico 3D de Timoshenko fica submetido às seguintes forças

$$\begin{Bmatrix} dQ_{V,1}^g \\ dQ_{V,2}^g \\ dQ_{V,3}^g \end{Bmatrix} = \rho \begin{Bmatrix} g_1^g \\ g_2^g \\ g_3^g \end{Bmatrix} dV \quad (5.81a)$$

ou

$$d\underline{F}_V^g = \rho \underline{g}^g dV \quad (5.81b)$$

em que g_1^g , g_2^g e g_3^g são acelerações segundo x_1^g , x_2^g e x_3^g , respectivamente, e ρ é a massa por unidade de volume do material que constitui o elemento. Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais e integrando na área do elemento e obtém-se,

$$\left(\underline{F}_V^\ell \delta \underline{U}^\ell \right)_m^{(e)} = \int_{L^{(e)}} N_m \delta \underline{U}_m^\ell \rho^{(e)} \underline{g}^\ell A dL \quad (5.82a)$$

$$\left(\underline{F}_V^\ell \delta \underline{U}^\ell \right)_m^{(e)} = \int_{L^{(e)}} N_m \delta \underline{U}_m^\ell \rho^{(e)} \left[\underline{T}^{\ell g} \right]^T \underline{g}^g A dL \quad (5.82b)$$

em que

$$\delta \underline{U}_m^\ell = \begin{bmatrix} u_1^\ell & u_2^\ell & u_3^\ell \end{bmatrix}_m^T \quad (5.83)$$

são os deslocamentos de translação segundo os eixos locais.

Como os deslocamentos virtuais devem ser quaisquer, a relação (5.82a) converte-se na seguinte

$$\underline{F}_{V,m}^{\ell(e)} = \int_{L^{(e)}} N_m \rho^{(e)} \left[\underline{T}^{\ell g} \right]^T \underline{g}^g A dL \quad (5.84)$$

Aplicando a integração numérica de Gauss Legendre ao integral de (5.84) obtém-se,

$$\begin{aligned}
\underline{F}_{V,m}^{\ell(e)} &= \int_{-1}^1 \left\{ N_m \rho^{(e)} \left[\underline{T}^{\ell g} \right]^T \underline{g}^g A J \right\} ds_1 \\
&= \sum_{p=1}^{N_{s1}} \left[N_m \rho^{(e)} \left[\underline{T}^{\ell g} \right]^T \underline{g}^g A J \right]_{(s_{1,p})}^{(e)} W_p \\
&= \sum_{p=1}^{N_{s1}} \left[N_m \underline{F}_V^{\ell} J \right]_{(s_{1,p})}^{(e)} W_p
\end{aligned} \tag{5.85}$$

em que

$$\underline{F}_V^{\ell}(s_{1,p}) = \left(\rho^{(e)} \left[\underline{T}^{\ell g} \right]^T \underline{g}^g A \right)_{(s_{1,p})} \tag{5.86}$$

são as forças segundo os eixos do referencial local associado ao ponto de Gauss, avaliadas nesse ponto.

5.9.4.5 - Forças distribuídas por unidade de comprimento

Um elemento de barra 3D de Timoshenko pode ser solicitado por forças generalizadas distribuídas em correspondência com os graus de liberdade, conforme se representa na Figura 5.12. Nesta figura $\bar{q}_{L,k}^{\ell_j}$ ($q = f$ para forças e $q = m$ para momentos) representa a força generalizada atribuída ao nó k do elemento, dirigida segundo o eixo ℓ_j , $c/j=1,2,3$, do referencial local de um ponto do elemento. Por sua vez, $q_L^{\ell_j}$ ($q = f$ para forças e $q = m$ para momentos) é a força generalizada distribuída por unidade de comprimento ao longo do elemento, dirigida segundo o eixo ℓ_j .

Para uma determinada posição s_1 ao longo do elemento, o valor da carga uniformemente distribuída obtém-se por intermédio das relações seguintes (no caso de elementos de três nós),

$$\begin{aligned}
f_L^{\ell_1}(s_1) &= N_1(s_1) \bar{f}_{L,1}^{\ell_1} + N_2(s_1) \bar{f}_{L,2}^{\ell_1} + N_3(s_1) \bar{f}_{L,3}^{\ell_1} \\
f_L^{\ell_2}(s_1) &= N_1(s_1) \bar{f}_{L,1}^{\ell_2} + N_2(s_1) \bar{f}_{L,2}^{\ell_2} + N_3(s_1) \bar{f}_{L,3}^{\ell_2} \\
f_L^{\ell_3}(s_1) &= N_1(s_1) \bar{f}_{L,1}^{\ell_3} + N_2(s_1) \bar{f}_{L,2}^{\ell_3} + N_3(s_1) \bar{f}_{L,3}^{\ell_3} \\
m_L^{\ell_1}(s_1) &= N_1(s_1) \bar{m}_{L,1}^{\ell_1} + N_2(s_1) \bar{m}_{L,2}^{\ell_1} + N_3(s_1) \bar{m}_{L,3}^{\ell_1} \\
m_L^{\ell_2}(s_1) &= N_1(s_1) \bar{m}_{L,1}^{\ell_2} + N_2(s_1) \bar{m}_{L,2}^{\ell_2} + N_3(s_1) \bar{m}_{L,3}^{\ell_2} \\
m_L^{\ell_3}(s_1) &= N_1(s_1) \bar{m}_{L,1}^{\ell_3} + N_2(s_1) \bar{m}_{L,2}^{\ell_3} + N_3(s_1) \bar{m}_{L,3}^{\ell_3}
\end{aligned} \tag{5.87a}$$

ou,

$$\underline{q}_L^{\ell}(s_1) = \underline{N}^{(e)}(s_1) \left[\underline{\bar{q}}_L^{\ell} \right]^T \tag{5.87b}$$

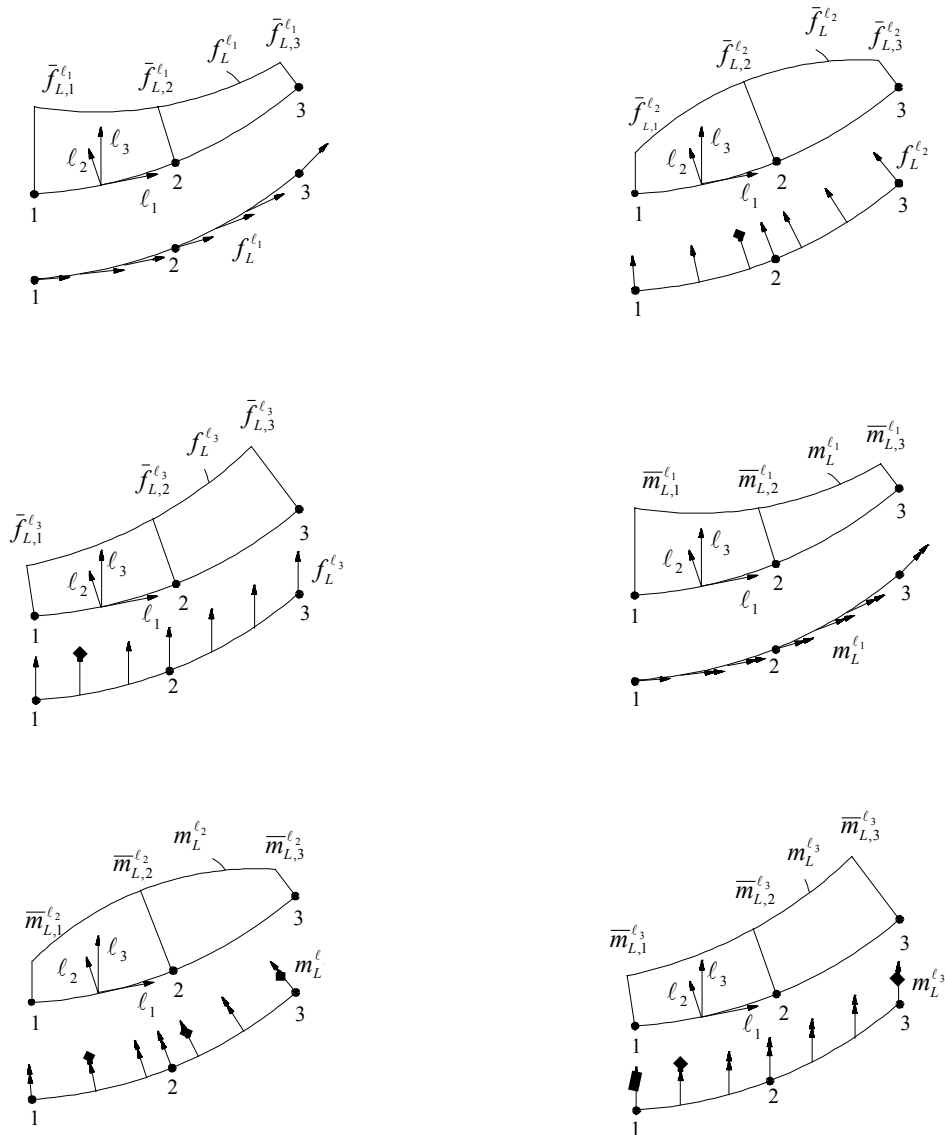


Figura 5.12 - Forças distribuídas por unidade de comprimento num elemento de barra 3D de Timoshenko de 3 nós.

em que

$$\underline{N}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

e

$$\underline{\bar{q}}_L^\ell = [\bar{f}_{L,1}^{\ell_1} \quad \bar{f}_{L,1}^{\ell_2} \quad \bar{f}_{L,1}^{\ell_3} \quad \bar{m}_{L,1}^{\ell_1} \quad \bar{m}_{L,1}^{\ell_2} \quad \bar{m}_{L,1}^{\ell_3} \quad \bar{f}_{L,2}^{\ell_1} \quad \bar{f}_{L,2}^{\ell_2} \quad \bar{f}_{L,2}^{\ell_3} \quad \bar{m}_{L,2}^{\ell_1} \quad \bar{m}_{L,2}^{\ell_2} \quad \bar{m}_{L,2}^{\ell_3} \quad \bar{f}_{L,3}^{\ell_1} \quad \bar{f}_{L,3}^{\ell_2} \quad \bar{f}_{L,3}^{\ell_3} \quad \bar{m}_{L,3}^{\ell_1} \quad \bar{m}_{L,3}^{\ell_2} \quad \bar{m}_{L,3}^{\ell_3}]^T \cdot \quad (5.89)$$

No comprimento infinitesimal $dL = dx_1^\ell$ a resultante das forças generalizadas é

$$\begin{aligned} dF_L^{\ell_1}(s_1) &= f_L^{\ell_1}(s_1) dL \\ dF_L^{\ell_2}(s_1) &= f_L^{\ell_2}(s_1) dL \\ dF_L^{\ell_3}(s_1) &= f_L^{\ell_3}(s_1) dL \\ dM_L^{\ell_1}(s_1) &= m_L^{\ell_1}(s_1) dL \\ dM_L^{\ell_2}(s_1) &= m_L^{\ell_2}(s_1) dL \\ dM_L^{\ell_3}(s_1) &= m_L^{\ell_3}(s_1) dL \end{aligned} \quad (5.90)$$

ou

$$d\underline{Q}_L^\ell(s_1) = \underline{q}_L^\ell(s_1) dL \quad (5.91)$$

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais e integrando ao longo do lado solicitado obtém-se,

$$\underline{Q}_L^g = \int_{L^{(e)}} [\underline{N}^{(e)}]^T \underline{q}_L^g dL \quad (5.92)$$

Para converter \underline{q}_L^ℓ (força generalizada distribuída em dL) para o referencial global efectua-se a seguinte operação

$$\underline{q}_L^g(s_1) = \underline{T}^{\ell g}(s_1) \underline{q}_L^\ell(s_1) \quad (5.93)$$

em que $\underline{T}^{\ell g}(s_1)$ é a matriz de transformação deduzida na secção 5.2.3. Convertendo o integral em (5.92) para coordenadas locais e tendo em conta a relação (5.93) obtém-se

$$\begin{aligned} \underline{Q}_L^g &= \int_{-1}^1 [\underline{N}^{(e)}]^T \underline{q}_L^g J ds_1 \\ &= \int_{-1}^1 [\underline{N}^{(e)}]^T \underline{T}^{\ell g} \underline{q}_L^\ell J ds_1 \quad (5.94) \\ &= \int_{-1}^1 [\underline{N}^{(e)}]^T \underline{T}^{\ell g} \underline{q}_L^\ell J ds_1 \end{aligned}$$

Recorrendo-se à integração numérica de Gauss-Legendre (5.94) converte-se em

$$\underline{Q}_L^g = \sum_{p=1}^{Ns} \left\{ [\underline{N}^{(e)}]^T \underline{T}^{\ell g} \underline{q}_L^\ell J \right\}_{s_{1,p}} W_p \quad (5.95)$$

em que N_s é o número de pontos de Gauss utilizados na integração ao longo do elemento e \underline{Q}_L^g é o vector constituído pelas forças nodais equivalentes às forças generalizadas distribuídas ao longo do elemento, no referencial global, tal como se representa na Figura 5.13.

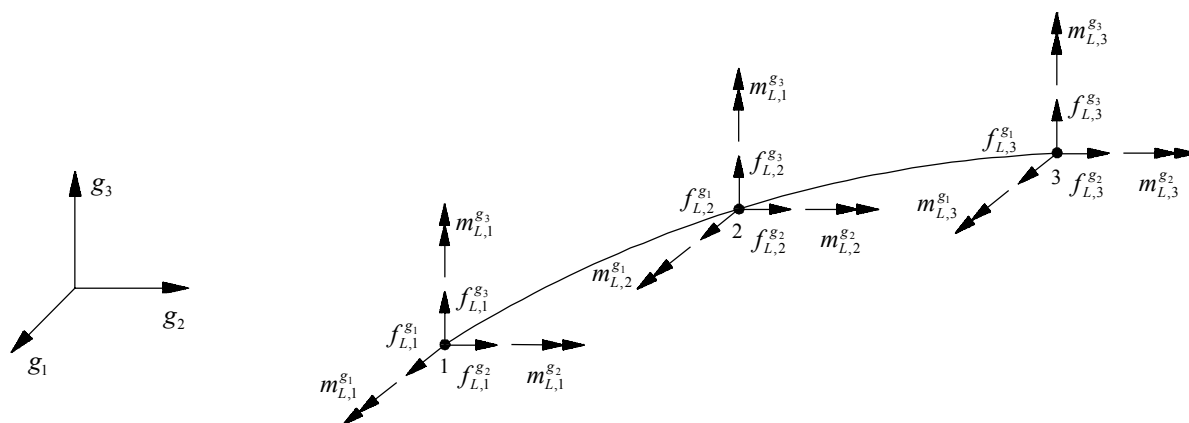


Figura 5.13 - Forças nodais equivalentes às forças generalizadas distribuídas num elemento.

5.9.4.6 - Assentamentos de apoio

Os assentamentos de apoio podem ser introduzidos directamente no vector dos deslocamentos, nas posições correspondentes aos graus de liberdade prescritos. Para tal, o sistema de equações de equilíbrio (Barros *et al.* 1996),

$$\underline{K}^{g(E)} \underline{U}^{g(E)} = \underline{Q}^{g(E)} \quad (5.96)$$

é reorganizado da forma seguinte

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{ll}^{g(E)} & \underline{K}_{lf}^{g(E)} \\ \underline{K}_{fl}^{g(E)} & \underline{K}_{ff}^{g(E)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_l^{g(E)} \\ \underline{U}_f^{g(E)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_l^{g(E)} \\ \underline{Q}_f^{g(E)} + \underline{R}^{g(E)} \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

em que $\underline{K}_{ll}^{g(E)}$ inclui as linhas e as colunas de interacção entre graus de liberdade livres, $\underline{K}_{ff}^{g(E)}$ inclui as linhas e as colunas de interacção entre graus de liberdade fixos, $\underline{K}_{lf}^{g(E)} = \left[\underline{K}_{lf}^g \right]^T$ inclui os termos de rigidez relativos à interacção entre os graus de liberdade livres e fixos, $\underline{U}_l^{g(E)}$ e $\underline{U}_f^{g(E)}$ são os vectores que incluem os graus de liberdade livres, a determinar, e dos graus de liberdade fixos (de valor nulo ou imposto, como sejam os assentamentos de apoio), conhecidos, respectivamente, $\underline{Q}_l^{g(E)}$ e $\underline{Q}_f^{g(E)}$ são os vectores que englobam as forças nodais equivalentes em correspondência com os graus de liberdade livres e fixos, respectivamente, e $\underline{R}^{g(E)}$ é o vector que inclui as reacções nos apoios da estrutura. Assim, os assentamentos de apoio são introduzidos no vector $\underline{U}_f^{g(E)}$.