

3- ELEMENTOS DE BARRA BIARTICULADA MAIS AVANÇADOS E CONDIÇÕES PARA CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO

3.1 - Introdução

Neste capítulo serão obtidas as funções de forma, estabelecidas no referencial normalizado do elemento. Os conceitos de elemento isoparamétrico e de Jacobiano serão introduzidos. A integração numérica a ser utilizada no cálculo dos integrais que surgem na formulação será apresentada. Alguns requisitos associados à convergência da solução serão enunciados e os tipos de erros mais correntes que afectam essa solução serão apontados. Nas expressões deste capítulo não se utilizará o sobreíndice (e) indicando elemento, de forma a simplificar a exposição.

3.2 - Elementos unidimensionais de classe C_0 . Elementos Lagrangeanos

No capítulo anterior as funções de forma utilizadas eram polinómios de 1º grau dado que se admitiu funções lineares para simular a distribuição de deslocamentos em elementos de barra biarticulada de dois nós. Esta interpolação polinomial garante que o campo de deslocamentos é contínuo dentro do elemento e entre elementos. Aos elementos que satisfazem estes requisitos de continuidade denominam-se de elementos de classe C_0 . Em geral diz-se que um elemento é de classe C_n se o campo de deslocamentos tem contínuas as n 1^{as} derivadas.

Num elemento unidimensional o campo de deslocamentos pode-se representar pela aproximação polinomial seguinte

$$u_1(x_1) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_1^{n-1} \quad (3.1)$$

em que α_1 a α_n são constantes. Considerando-se o polinómio de 1º grau adoptado na secção 2.3 – ver expressão (2.10) -, a relação (3.1) reduz-se à seguinte

$$u_1(x_1) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1. \quad (3.2)$$

Para calcular as constantes α_1 e α_2 é necessário conhecer os deslocamentos em dois nós. Assim, se o elemento de comprimento $L^{(e)}$ tiver um deslocamento $u_{1,1}$ no nó 1 e $u_{1,2}$ no nó 2 obtém-se (ver figura 3.1):

$$\begin{aligned} u_1(x_1) = u_{1,1} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_{1,1} \\ u_1(x_2) = u_{1,2} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_{1,2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Resolvendo (3.3) obtém-se,

$$u_1(x_1) = \frac{(x_{1,2} - x_1)}{L^{(e)}} u_{1,1} + \frac{(x_1 - x_{1,1})}{L^{(e)}} u_{1,2} \quad (3.4a)$$

ou

$$u_1(x_1) = N_1(x_1) u_{1,1} + N_2(x_1) u_{1,2} \quad (3.4b)$$

em que

$$N_1(x_1) = \frac{(x_{1,2} - x_1)}{L^{(e)}} \quad ; \quad N_2(x_1) = \frac{(x_1 - x_{1,1})}{L^{(e)}} \quad (3.5)$$

são as funções de forma do elemento de barra de dois nós, já obtidas na secção 2.3.

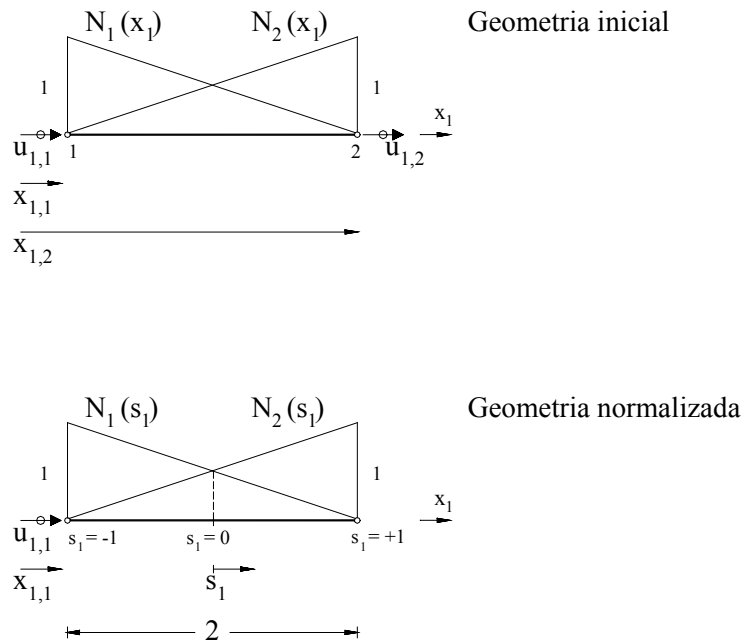


Figura 3.1 - Geometria real (a) e normalizada (b).

O procedimento acabado de expôr para obter funções de forma de um elemento finito pode ser estendido a qualquer tipo de elemento. Todavia, este é um processo que recorre à resolução de um sistema de equações, não sendo, por isso, o mais conveniente.

Para o caso de elementos unidimensionais de classe C_0 pode-se recorrer às propriedades dos polinómios de Lagrange para obter funções de forma de elementos finitos unidimensionais. Estes polinómios assumem um determinado valor num ponto e o valor nulo num conjunto de pontos pré-fixados. Assim, se esse determinado valor for normalizado (convertido ao valor unitário) e os pontos que caracterizam esse polinómio coincidirem com os pontos nodais do elemento, então as funções de forma coincidem com os polinómios de Lagrange. Por esta razão, os elementos finitos estabelecidos com base em funções de forma definidas por intermédio de polinómios de Lagrange chamam-se elementos Lagrangeanos.

A função de forma do nó i de um elemento Lagrangeano unidimensional de n nós obtém-se da expressão seguinte,

$$N_i(x_1) = \frac{(x_1 - x_{1,1})(x_1 - x_{1,2}) \dots (x_1 - x_{1,i-1})(x_1 - x_{1,i+1}) \dots (x_1 - x_{1,n})}{(x_{1,i} - x_{1,1})(x_{1,i} - x_{1,2}) \dots (x_{1,i} - x_{1,i-1})(x_{1,i} - x_{1,i+1}) \dots (x_{1,i} - x_{1,n})} \quad (3.6a)$$

ou, de forma condensada:

$$N_i(x_1) = \prod_{j=1(j \neq i)}^n \left(\frac{x_1 - x_{1,j}}{x_{1,i} - x_{1,j}} \right). \quad (3.6b)$$

Para o caso de um elemento de dois nós ($n=2$) obtém-se:

$$N_1(x_1) = \frac{x_1 - x_{1,2}}{x_{1,1} - x_{1,2}} = \frac{x_{1,2} - x_1}{x_{1,2} - x_{1,1}} = \frac{x_{1,2} - x_1}{L^{(e)}} \quad (3.7a)$$

$$N_2(x_1) = \frac{x_1 - x_{1,1}}{x_{1,2} - x_{1,1}} = \frac{x_1 - x_{1,1}}{L^{(e)}}. \quad (3.7b)$$

De seguida vai-se introduzir o conceito de referencial normalizado do elemento. No caso de elementos unidimensionais este referencial é constituído por um único eixo, definido pela variável s_l . A relação entre s_l e x_l define-se por intermédio da relação seguinte

$$s_l = 2 \frac{x_l - x_{1,C}}{L^{(e)}} \quad (3.8a)$$

em que

$$x_{1,C} = \frac{x_{1,1} + x_{1,2}}{2} \quad (3.8b)$$

é a coordenada, no referencial local da barra, x_l , do ponto central da barra. No presente caso o referencial local da barra coincide com o referencial global, dado que a estrutura é constituída por uma barra. Assim,

$$\begin{aligned} s_l &= -1 \text{ no nó esquerdo da barra } (x_l=x_{1,1}) \\ s_l &= 0 \text{ no ponto central da barra } (x_l=x_{1,C}) \\ s_l &= 1 \text{ no nó direito da barra } (x_l=x_{1,2}). \end{aligned}$$

Analisando (3.8a) constata-se que esta relação transforma a geometria real do elemento numa geometria normalizada em que o comprimento da barra tem o valor de duas unidades (ver Figura 3.1).

A introdução da variável normalizada s_l nas funções de forma torna-as independentes da geometria real do elemento, o que é de grande interesse prático, conforme se irá constatar em próximas secções.

Por analogia com (3.6b), $N_i(s_l)$ passa a apresentar a seguinte forma:

$$N_i(s_l) = \prod_{j=1(j \neq i)}^n \left(\frac{s_l - s_{1,j}}{s_{1,i} - s_{1,j}} \right). \quad (3.9)$$

Para um elemento Lagrangeano de dois nós, $s_{l,1} = -1$ e $s_{l,2} = +1$, pelo que, pela aplicação de (3.9) obtém-se,

$$N_1(s_1) = \frac{s_1 - s_{1,2}}{s_{1,1} - s_{1,2}} = \frac{1}{2}(1 - s_1) \quad (3.10a)$$

$$N_2(s_1) = \frac{s_1 - s_{1,1}}{s_{1,2} - s_{1,1}} = \frac{1}{2}(1 + s_1). \quad (3.10b)$$

Substituindo (3.8a) em (3.10) obtêm-se (3.7), como não podia deixar de ser.

Para um elemento quadrático de três nós $s_{1,1} = -1$, $s_{1,2} = 0$ e $s_{1,3} = +1$. As funções de forma deste elemento obtêm-se por intermédio de (3.9) e apresentam a configuração seguinte (ver Figura 3.2),

$$N_1(s_1) = \frac{(s_1 - s_{1,2})(s_1 - s_{1,3})}{(s_{1,1} - s_{1,2})(s_{1,1} - s_{1,3})} = \frac{1}{2}s_1(s_1 - 1) \quad (3.11a)$$

$$N_2(s_1) = \frac{(s_1 - s_{1,1})(s_1 - s_{1,3})}{(s_{1,2} - s_{1,1})(s_{1,2} - s_{1,3})} = (s_1 + 1)(1 - s_1) \quad (3.11b)$$

$$N_3(s_1) = \frac{(s_1 - s_{1,1})(s_1 - s_{1,2})}{(s_{1,3} - s_{1,1})(s_{1,3} - s_{1,2})} = \frac{1}{2}s_1(1 + s_1). \quad (3.11c)$$

Efectuando procedimento similar para o caso do elemento cúbico de quatro nós, $s_{1,1} = -1$, $s_{1,2} = -1/3$, $s_{1,3} = 1/3$ e $s_{1,4} = +1$, obtêm-se as funções de forma seguintes (ver Figura 3.3),

$$N_1(s_1) = \frac{(s_1 - s_{1,2})(s_1 - s_{1,3})(s_1 - s_{1,4})}{(s_{1,1} - s_{1,2})(s_{1,1} - s_{1,3})(s_{1,1} - s_{1,4})} = -\frac{9}{16}(s_1 + \frac{1}{3})(s_1 - \frac{1}{3})(s_1 - 1) \quad (3.12a)$$

$$N_2(s_1) = \frac{(s_1 - s_{1,1})(s_1 - s_{1,3})(s_1 - s_{1,4})}{(s_{1,2} - s_{1,1})(s_{1,2} - s_{1,3})(s_{1,2} - s_{1,4})} = \frac{27}{16}(s_1 + 1)(s_1 - \frac{1}{3})(s_1 - 1) \quad (3.12b)$$

$$N_3(s_1) = \frac{(s_1 - s_{1,1})(s_1 - s_{1,2})(s_1 - s_{1,4})}{(s_{1,3} - s_{1,1})(s_{1,3} - s_{1,2})(s_{1,3} - s_{1,4})} = -\frac{27}{16}(s_1 + 1)(s_1 + \frac{1}{3})(s_1 - 1) \quad (3.12c)$$

$$N_4(s_1) = \frac{(s_1 - s_{1,1})(s_1 - s_{1,2})(s_1 - s_{1,3})}{(s_{1,4} - s_{1,1})(s_{1,4} - s_{1,2})(s_{1,4} - s_{1,3})} = \frac{9}{16}(s_1 + 1)(s_1 + \frac{1}{3})(s_1 - \frac{1}{3}) \quad (3.12d)$$

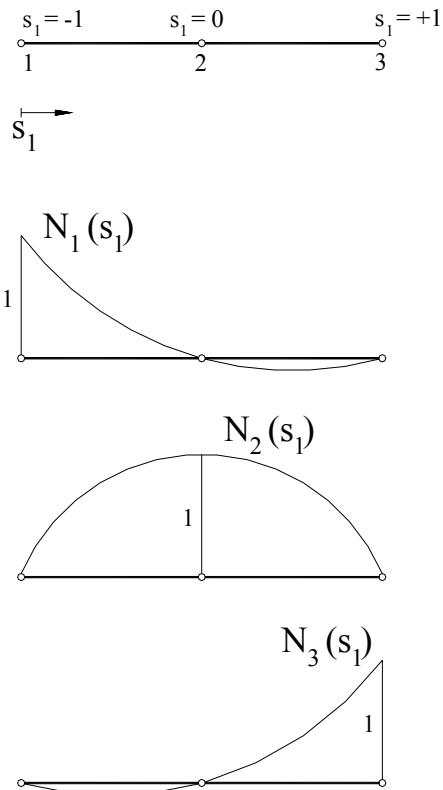


Figura 3.2 - Funções de forma do elemento quadrático de três nós.

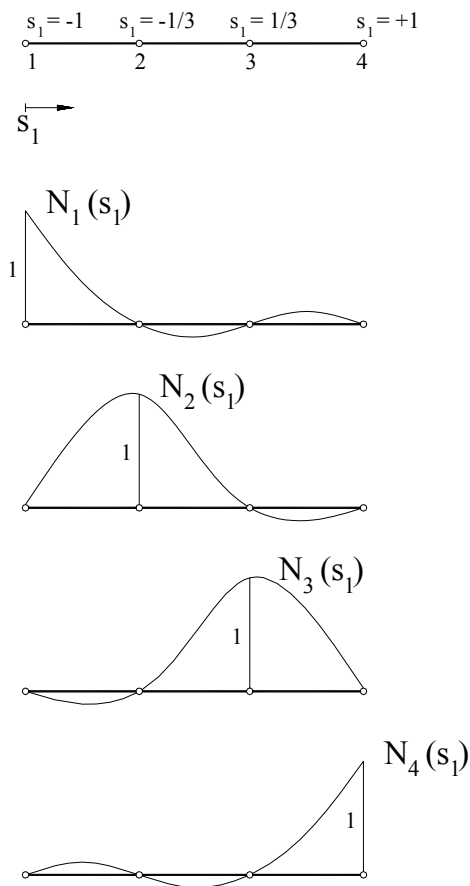


Figura 3.3 - Funções de forma de um elemento cúbico de quatro nós.

3.3 - FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA E INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

3.3.1 - Conceito de formulação isoparamétrica

O conceito de formulação isoparamétrica refere que as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer do elemento podem ser obtidas a partir da interpolação das coordenadas cartesianas dos nós do elemento, sendo as funções de interpolação as mesmas utilizadas para interpolar os deslocamentos no interior do elemento a partir dos deslocamentos dos nós do elemento. Essas funções de interpolação são as funções de forma do elemento finito. A referida interpolação é bastante importante dado que permitirá estabelecer uma expressão que relaciona as coordenadas cartesianas com as coordenadas normalizadas. Esta expressão irá ser utilizada no cálculo das derivadas das funções de forma em relação às coordenadas cartesianas, dado que as funções de forma são definidas em função das coordenadas normalizadas,

$$\frac{dN_i(s_1)}{dx_1} = \frac{dN_i(s_1)}{ds_1} \frac{ds_1}{dx_1}. \quad (3.13)$$

Há assim que estabelecer uma relação entre x_1 e s_1 para calcular (3.13).

No capítulo anterior constatou-se que $dN_i(s_1)/dx_1$ surge no cálculo das extensões. Assim, para o caso de um elemento de dois nós,

$$\varepsilon_1 = \frac{dN_1(s_1)}{dx_1} u_{1,1} + \frac{dN_2(s_1)}{dx_1} u_{1,2}. \quad (3.14)$$

Tendo em conta (3.10) e (3.13),

$$\frac{dN_1(s_1)}{dx_1} = \frac{dN_1(s_1)}{ds_1} \frac{ds_1}{dx_1} = \frac{d}{ds_1} \left(\frac{1-s_1}{2} \right) \frac{ds_1}{dx_1} = -\frac{1}{2} \frac{ds_1}{dx_1} \quad (3.15a)$$

$$\frac{dN_2(s_1)}{dx_1} = \frac{dN_2(s_1)}{ds_1} \frac{ds_1}{dx_1} = \frac{d}{ds_1} \left(\frac{1+s_1}{2} \right) \frac{ds_1}{dx_1} = \frac{1}{2} \frac{ds_1}{dx_1} \quad (3.15b)$$

que substituídas em (3.14) converte esta relação na seguinte,

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} \frac{ds_1}{dx_1} u_{1,1} + \frac{1}{2} \frac{ds_1}{dx_1} u_{1,2}. \quad (3.16)$$

É assim necessário calcular ds_1/dx_1 para determinar ε_1 . Para tal vai-se recorrer ao conceito de formulação isoparamétrica que, para um elemento finito unidimensional de dois nós, representa-se pela relação seguinte

$$x_1(s_1) = N_1(s_1)x_{1,1} + N_2(s_1)x_{1,2} \quad (3.17)$$

sendo $x_{1,1}$ e $x_{1,2}$ as coordenadas cartesianas dos pontos nodais 1 e 2 do elemento. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(s_1)}{ds_1} &= \frac{dN_1(s_1)}{ds_1} x_{1,1} + \frac{dN_2(s_1)}{ds_1} x_{1,2} \\
&= -\frac{1}{2} x_{1,1} + \frac{1}{2} x_{1,2} \quad , \\
&= \frac{L^{(e)}}{2}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

pelo que,

$$dx_1 = \frac{L^{(e)}}{2} ds_1 \tag{3.19a}$$

e

$$\frac{ds_1}{dx_1} = \frac{2}{L^{(e)}} \tag{3.19b}$$

Substituindo (3.19b) em (3.15) obtém-se,

$$\frac{dN_1(s_1)}{dx_1} = -\frac{1}{2} \frac{2}{L^{(e)}} = -\frac{1}{L^{(e)}} \tag{3.20a}$$

$$\frac{dN_2(s_1)}{dx_1} = \frac{1}{2} \frac{2}{L^{(e)}} = \frac{1}{L^{(e)}} \tag{3.20b}$$

pelo que,

$$\begin{aligned}
\underline{B} &= \begin{bmatrix} \frac{dN_1(s_1)}{dx_1} & \frac{dN_2(s_1)}{dx_1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^{(e)}} & \frac{1}{L^{(e)}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

é a matriz de deformação do elemento de dois nós de barra biarticulada.

Substituindo (3.19b) em (3.16) obtém-se,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -\frac{1}{2} \frac{2}{L^{(e)}} u_{1,1} + \frac{1}{2} \frac{2}{L^{(e)}} u_{1,2} \\
&= \frac{1}{L^{(e)}} (u_{1,1} - u_{1,2})
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Além da formulação isoparamétrica existe ainda as formulações superparamétrica e subparamétrica. Diz-se que se utiliza uma formulação superparamétrica quando para se determinar as coordenadas cartesianas de um determinado ponto do elemento se utiliza um número de pontos maior que o número de pontos utilizado na interpolação do campo de

deslocamentos. Neste caso, as funções de forma associadas à interpolação da geometria do elemento são de maior grau que as funções de forma relativas ao campo de deslocamentos do elemento.

Pelo contrário, na formulação subparamétrica a geometria do elemento é interpolada por intermédio de um menor número de nós que os utilizados para interpolar o campo de deslocamentos, pelo que, neste caso, as funções de forma associadas à geometria do elemento são de menor grau que as funções de forma relativas ao campo de deslocamentos.

A utilização destas formulações estão relacionadas com a maior ou menor complexidade da geometria da estrutura, face ao seu campo de deslocamentos. No presente trabalho apenas se tratará da formulação isoparamétrica dado que é a mais utilizada nos programas de cálculo automático baseados no MEF. Além disto, se a complexidade geométrica de uma estrutura for tal que apele para o uso de uma formulação superparamétrica, e se apenas estiver disponível a formulação isoparamétrica, o recurso ao refinamento da malha é uma estratégia adequada para resolver o problema.

3.3.2- Formulação isoparamétrica do elemento de três nós.

O deslocamento de um ponto de um elemento de barra quadrático (3 nós) pode ser obtido a partir dos deslocamentos dos nós e das correspondentes funções de forma,

$$u_1(s_1) = N_1(s_1)u_{1,1} + N_2(s_1)u_{1,2} + N_3(s_1)u_{1,3} \quad (3.23)$$

em que N_1 , N_2 e N_3 são as funções definidas em (3.11). Utilizando-se a formulação isoparamétrica, as coordenadas cartesianas de um ponto do elemento podem ser obtidas a partir das coordenadas dos nós do elemento, recorrendo-se para tal, às funções de forma utilizadas na interpolação do campo de deslocamentos,

$$x_1(s_1) = N_1(s_1)x_{1,1} + N_2(s_1)x_{1,2} + N_3(s_1)x_{1,3}. \quad (3.24)$$

A extensão num ponto do elemento obtém-se a partir da seguinte relação,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{du_1}{dx_1} = \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i}{dx_1} u_{1,i} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{ds_1} \frac{ds_1}{dx_1} & \frac{dN_2}{ds_1} \frac{ds_1}{dx_1} & \frac{dN_3}{ds_1} \frac{ds_1}{dx_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \end{bmatrix} \\ &= \underline{BU}^{(e)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Tendo em conta (3.11) verifica-se que

$$\frac{dN_1}{ds_1} = s_1 - \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{dN_2}{ds_1} = -2s_1 \quad ; \quad \frac{dN_3}{ds_1} = s_1 + \frac{1}{2} \quad (3.26)$$

pelo que

$$\underline{B} = \frac{ds_1}{dx_1} \left[\left(s_1 - \frac{1}{2} \right) \quad -2s_1 \quad \left(s_1 + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.27)$$

Para determinar ds_1/dx_1 começa-se por derivar (3.24) em relação a s_1 ,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds_1} &= \frac{dN_1}{ds_1} x_{1,1} + \frac{dN_2}{ds_1} x_{1,2} + \frac{dN_3}{ds_1} x_{1,3} \\ &= \left(s_1 - \frac{1}{2} \right) x_{1,1} + (-2s_1) x_{1,2} + \left(s_1 + \frac{1}{2} \right) x_{1,3} \\ &= \frac{(x_{1,3} - x_{1,1}) + 2s_1 (x_{1,1} - 2x_{1,2} + x_{1,3})}{2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

pelo que,

$$\frac{ds_1}{dx_1} = \frac{2}{L^{(e)} + 2s_1 (x_{1,1} - 2x_{1,2} + x_{1,3})}. \quad (3.29)$$

Repare-se que se o nó intermédio estiver no centro do elemento, $x_{1,2} = (x_{1,1} + x_{1,3})/2$, que é a situação mais corrente, então (3.29) reduz-se a,

$$\frac{ds_1}{dx_1} = \frac{2}{L^{(e)}}. \quad (3.30)$$

Admitindo-se esta última situação,

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \frac{L^{(e)}}{2} \quad (3.31a)$$

e

$$dx_1 = \frac{L^{(e)}}{2} ds_1 \quad (3.31b)$$

pelo que,

$$\underline{B} = \frac{2}{L^{(e)}} \left[\left(s_1 - \frac{1}{2} \right) \quad -2s_1 \quad \left(s_1 + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.32)$$

Substituindo (3.32) em (2.96a) e sabendo que para o caso de barra biarticulada $D=EA$ obtém-se,

$$\underline{K}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \frac{2}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} s_1 - \frac{1}{2} \\ -2s_1 \\ s_1 + \frac{1}{2} \end{bmatrix} EA \frac{2}{L^{(e)}} \left[\left(s_1 - \frac{1}{2} \right) \quad -2s_1 \quad \left(s_1 + \frac{1}{2} \right) \right] dx_1. \quad (3.33)$$

Fazendo intervir (3.31b) em (3.33) e efectuando os produtos matriciais obtém-se,

$$\underline{K}^{(e)} = \frac{2EA}{L^{(e)}} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \left(s_1 - \frac{1}{2} \right)^2 & -2s_1 \left(s_1 - \frac{1}{2} \right) & \left(s_1 - \frac{1}{2} \right) \left(s_1 + \frac{1}{2} \right) \\ -2s_1 \left(s_1 - \frac{1}{2} \right) & 4s_1^2 & -2s_1 \left(s_1 + \frac{1}{2} \right) \\ \left(s_1 - \frac{1}{2} \right) \left(s_1 + \frac{1}{2} \right) & -2s_1 \left(s_1 + \frac{1}{2} \right) & \left(s_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \end{bmatrix} ds_1. \quad (3.34)$$

Calculando os integrais resulta,

$$\underline{K}^{(e)} = \left(\frac{EA}{6L} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Substituindo no vector das forças nodais equivalentes, (2.96b), \underline{N} pelas suas componentes definidas em (3.11) obtém-se

$$\underline{Q}_\ell^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} s_1 \left(s_1 - \frac{1}{2} \right) \\ (1 + s_1)(1 - s_1) \\ \frac{1}{2} s_1 \left(s_1 + \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} q_1 dx_1 \quad (3.36)$$

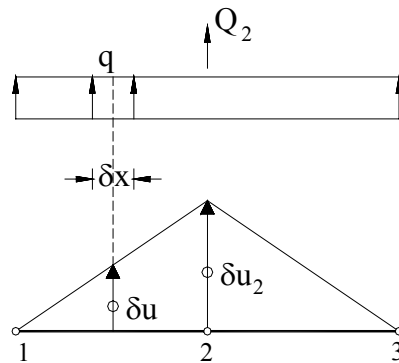
e substituindo dx_1 pela relação (3.31b),

$$\underline{Q}_\ell^{(e)} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} s_1 \left(s_1 - \frac{1}{2} \right) \\ (1 + s_1)(1 - s_1) \\ \frac{1}{2} s_1 \left(s_1 + \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} q_1 \frac{L^{(e)}}{2} ds_1. \quad (3.37)$$

em que q_1 é a força uniformemente distribuída ao longo do eixo da barra. Calculando os integrais resulta,

$$\underline{Q}^{(e)} = \left(\frac{q_1 L}{6} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

pelo que o nó central absorve quatro vezes mais carga que os nós de extremidade. Esta conclusão poderia ter sido obtida aplicando o princípio do trabalhos virtuais (PTV) representado esquematicamente na Figura 3.4 (a força q e os correspondentes deslocamentos foram considerados normais ao elemento, somente para simplificar a exposição).



$$dx = \frac{L^{(e)}}{2} ds_1$$

$$\delta u = N_1 \delta u_{1,1} + N_2 \delta u_{1,2} + N_3 \delta u_{1,3}$$

Figura 3.4 - Aplicação do PTV na determinação das forças nodais equivalentes no nó 2.

Assim,

$$Q_2 \delta u_{1,2} = \int_{L^{(e)}} q dx \delta u. \quad (3.39)$$

Dado que

$$dx = \frac{L^{(e)}}{2} ds \quad (3.40)$$

resulta

$$Q_2 \delta u_2 = \int_{-1}^1 q \frac{L^{(e)}}{2} ds \delta u. \quad (3.41)$$

Tendo em conta que,

$$\delta u = N_1 \delta u_1 + N_2 \delta u_2 + N_3 \delta u_3 \quad (3.42)$$

e que

$$\delta u_1 = \delta u_3 = 0 \text{ (ver Figura 3.4)} \quad (3.43)$$

(3.41) reduz-se a,

$$Q_2 \delta u_2 = q \frac{L^{(e)}}{2} \int_{-1}^1 N_2 ds \delta u_2 \quad (3.44)$$

ou

$$\begin{aligned} Q_2 &= q \frac{L^{(e)}}{2} \int_{-1}^1 (1 - s_2) ds \\ &= \frac{4}{6} q L^{(e)} \quad (\text{c.q.d}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.3.3 Integração Numérica

Nas anteriores secções verificou-se que o cálculo da matriz de rigidez e do vector das forças nodais equivalentes dos elementos de uma estrutura passa pela resolução de integrais. Estes integrais podem ser de difícil resolução, principalmente em estruturas bi- e tridimensionais. Por este facto, a resolução dos integrais irá ser efectuada com recurso a técnicas de integração numérica. No presente trabalho descrever-se-á somente a integração numérica de Gauss-Legendre, dado que é a mais utilizada nos códigos computacionais de análise de estruturas baseados no MEF (Álvaro e Barros 1998).

Admita-se que se pretende integrar a função,

$$f(x_1) = C_1 + C_2 x_1 + C_3 x_1^2 + C_4 x_1^3 + C_5 x_1^4 + C_6 x_1^5 \quad (3.46)$$

no intervalo $[-1 \quad +1]$, isto é,

$$I = \int_{-1}^1 f(x_1) dx_1. \quad (3.47)$$

Segundo a regra da integração numérica de Gauss-Legendre, este integral é igual à soma dos produtos dos valores que a função $f(x_1)$ toma numa série de pontos conhecidos, no interior do intervalo, $f(x_1 = x_{1,p_i})$, por uns determinados coeficientes, denominados de pesos, W_i , (ver figura 3.5), isto é,

$$I = \int_{-1}^1 f(x_1) dx_1 = f(x_{1,p_1})W_1 + f(x_{1,p_2})W_2 + f(x_{1,p_3})W_3 \quad (3.48)$$

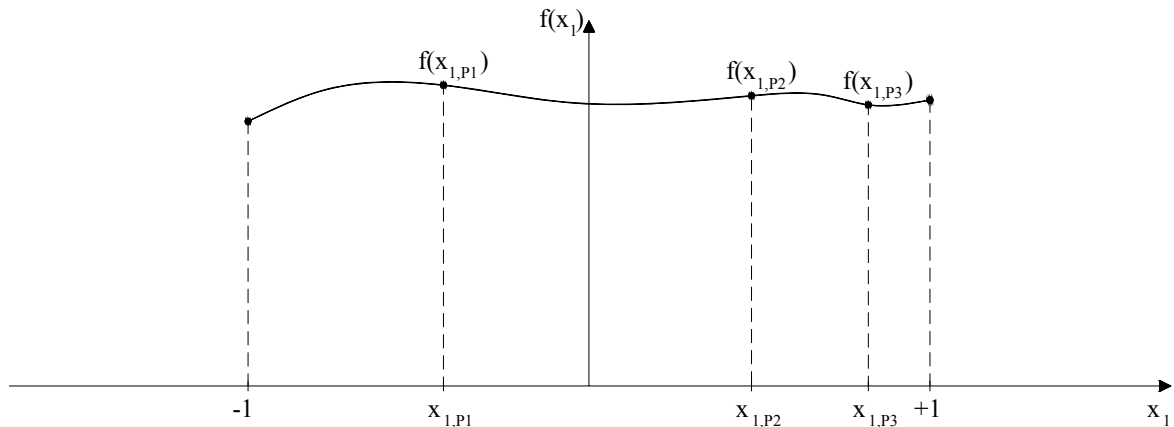


Figura 3.5 – Função $f(x_1)$ avaliada em determinados pontos $x_1 = x_{1,p_i}$.

Assim, para uma quadratura de ordem n ,

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(x_{1,p_i}) W_i \quad (3.49)$$

em que W_i é o peso correspondente ao ponto de integração i e n é o número desses pontos. Substituindo (3.46) em (3.47) obtém-se

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 (C_1 + C_2 x_1 + C_3 x_1^2 + C_4 x_1^3 + C_5 x_1^4 + C_6 x_1^5) dx_1 \\ &= \left[C_1 x_1 + C_2 \frac{x_1^2}{2} + C_3 \frac{x_1^3}{3} + C_4 \frac{x_1^4}{4} + C_5 \frac{x_1^5}{5} + C_6 \frac{x_1^6}{6} \right]_{-1}^{+1}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Como os termos com expoente par são nulos fica,

$$\begin{aligned} I &= \left(C_1 + \frac{C_3}{3} + \frac{C_5}{5} \right) - \left(-C_1 - \frac{C_3}{3} - \frac{C_5}{5} \right) \\ &= 2C_1 + \frac{2}{3}C_3 + \frac{2}{5}C_5 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Substituindo agora (3.46) em (3.48) obtém-se,

$$\begin{aligned} I &= (C_1 + C_2 x_{1,p1} + C_3 x_{1,p1}^2 + C_4 x_{1,p1}^3 + C_5 x_{1,p1}^4 + C_6 x_{1,p1}^5) W_1 \\ &\quad + (C_1 + C_2 x_{1,p2} + C_3 x_{1,p2}^2 + C_4 x_{1,p2}^3 + C_5 x_{1,p2}^4 + C_6 x_{1,p2}^5) W_2 \cdot \\ &\quad + (C_1 + C_2 x_{1,p3} + C_3 x_{1,p3}^2 + C_4 x_{1,p3}^3 + C_5 x_{1,p3}^4 + C_6 x_{1,p3}^5) W_3 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Reordenando (3.52) fica:

$$\begin{aligned}
I = & (W_1 + W_2 + W_3)C_1 + \\
& (x_{1,p1} W_1 + x_{1,p2} W_2 + x_{1,p3} W_3)C_2 + \\
& (x_{1,p1}^2 W_1 + x_{1,p2}^2 W_2 + x_{1,p3}^2 W_3)C_3 + \\
& (x_{1,p1}^3 W_1 + x_{1,p2}^3 W_2 + x_{1,p3}^3 W_3)C_4 + \cdot \\
& (x_{1,p1}^4 W_1 + x_{1,p2}^4 W_2 + x_{1,p3}^4 W_3)C_5 + \\
& (x_{1,p1}^5 W_1 + x_{1,p2}^5 W_2 + x_{1,p3}^5 W_3)C_6
\end{aligned} \tag{3.53}$$

De (3.51) e (3.53) verifica-se que,

$$\begin{aligned}
W_1 + W_2 + W_3 &= 2 \\
x_{1,p1} W_1 + x_{1,p2} W_2 + x_{1,p3} W_3 &= 0 \\
x_{1,p1}^2 W_1 + x_{1,p2}^2 W_2 + x_{1,p3}^2 W_3 &= \frac{2}{3} \\
x_{1,p1}^3 W_1 + x_{1,p2}^3 W_2 + x_{1,p3}^3 W_3 &= 0 \cdot \\
x_{1,p1}^4 W_1 + x_{1,p2}^4 W_2 + x_{1,p3}^4 W_3 &= \frac{2}{5} \\
x_{1,p1}^5 W_1 + x_{1,p2}^5 W_2 + x_{1,p3}^5 W_3 &= 0
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Este sistema de equações não lineares tem como incógnitas os pesos W_1 , W_2 e W_3 , e as coordenadas $x_{1,p1}$, $x_{1,p2}$ e $x_{1,p3}$. Resolvendo este sistema obtém-se,

$$\begin{aligned}
W_1=0.5555555556 & & x_{1,p1} = -0.7745966692 \\
W_2=0.8888888889 & & x_{1,p2} = 0.0 \\
W_3=0.5555555556 & & x_{1,p3} = 0.7745966692
\end{aligned} \tag{3.55a}$$

ou,

$$\begin{aligned}
W_1=5/9 & & x_{1,p1} = -\sqrt{3}/\sqrt{5} \\
W_2=8/9 & & x_{1,p2} = 0.0 \\
W_3=5/9 & & x_{1,p3} = \sqrt{3}/\sqrt{5} \cdot
\end{aligned} \tag{3.55b}$$

No caso de um polinómio de grau m , a quadratura de Gauss-Legendre fornece a solução exacta se forem utilizados $(m+1)/2$ pontos de Gauss. Assim, com n pontos de Gauss integra-se, de um modo exacto, um polinómio de grau $2n-1$.

No exemplo analisado, o polinómio de grau cinco exige a utilização de 3 pontos de Gauss.

Quadro 3.1 – Pesos e coordenadas dos pontos de Gauss.

n.º de pontos de integração n	Grau do polinómio $2n-1$	Coordenadas normalizadas dos pontos de integração s_i	Pesos W_i
1	1	0.0	2.0
2	3	-1/√3 1/√3	1 1
3	5	-√3/√5 0 √3/√5	5/9 8/9 5/9
4	7	-0.8611363116 -0.3399810436 0.3399810436 0.8611363116	0.3478548451 0.6521451549 0.6521451549 0.3478548451
5	9	-0.9061798459 -0.5384693101 0.0 0.5384693101 0.9061798459	0.2369268851 0.4786286705 0.568888889 0.4786286705 0.2369268851
6	11	-0.9324695142 -0.6612093865 -0.2386191861 0.2386191861 0.6612093865 0.9324695142	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346 0.4679139346 0.3607615730 0.1713244924
7	13	-0.9491079123 -0.7415311856 -0.4058451514 0.0 0.4058451514 0.7415311856 0.9491079123	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837 0.3818300505 0.2797053915 0.1294849662
8	15	-0.9602898565 -0.7966664774 -0.5255324099 -0.1834346425 0.1834346425 0.5255324099 0.7966664774 0.9602898565	0.1012285363 0.2223810345 0.3137066459 0.3626837834 0.3626837834 0.3137066459 0.2223810345 0.1012285363

No caso geral, se uma função for um polinómio de grau $m-1$,

$$f(x_1) = C_1 + C_2 x_1 + C_3 x_1^2 + \dots + C_m x_1^{m-1}. \quad (3.56)$$

O integral desta função

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 f(x_1) dx_1 \\
 &= 2C_1 + \frac{2}{3}C_2 + \frac{2}{5}C_5 + \dots \\
 &= \sum_{j=1(\text{impar})}^{m-1} \frac{2}{j} C_j
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

pode ser discretizado num sistema de m equações não lineares com $m/2$ incógnitas W_i e $m/2$ incógnitas x_{1,P_i} :

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^n x_{1,P_i}^j W_i = \begin{cases} \frac{2}{j+1}, & \text{se } j \text{ for par} \\ 0, & \text{se } j \text{ for impar} \end{cases} . \tag{3.58}$$

Resolvendo este sistema de equações obtêm-se as incógnitas W_i e x_{1,P_i} .

No Quadro 3.1 apresentam-se os pesos e as posições dos pontos de avaliação da funções polinomiais (coordenadas normalizadas dos pontos de integração) até ao 15º grau.

Exemplo

Determine o integral da função

$$f(x_1) = 1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^4$$

no intervalo $[-1 \quad +1]$ quer analiticamente quer pela integração numérica de Gauss-Legendre utilizando ordens de integração crescentes até obter a solução exacta.

- Solução analítica

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x_1) dx_1 = \left[x_1 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_1^5}{5} \right]_{-1}^{+1} = 3.0666$$

- Quadratura de *Gauss-Legendre*

- Com um ponto de Gauss (admitindo que se trata de um polinómio de 1º grau)

$$x_1 = 0; W_1=2.0 \Rightarrow I = f(x_1 = 0) W_1 = 1 \times 2.0 = 2.0$$

- Com dois pontos de Gauss (admitindo que se trata de um polinómio de 3º grau)

$$x_1 = -1/\sqrt{3}; x_2 = 1/\sqrt{3}; W_1=1.0; W_2=1.0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = f(x_1 = -1/\sqrt{3})W_1 + f(x_1 = 1/\sqrt{3})W_2 = 2.888$$

- Com três pontos de Gauss (admitindo que se trata de um polinómio de 5º grau)

$$x_1 = -\sqrt{3}/\sqrt{5}; x_2 = 0.0; x_3 = \sqrt{3}/\sqrt{5}; W_1=5/9; W_2=8/9; W_3=5/9$$

$$I = f(x_1 = -\sqrt{3}/\sqrt{5}) W_1 + f(x_1 = 0.0) W_2 + f(x_1 = \sqrt{3}/\sqrt{5}) W_3 = 3.0666$$

Assim, três pontos de Gauss integram exactamente polinómios de grau cinco ou grau inferior.

No caso de integrais de superfície (duplos) em coordenadas normalizadas,

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 f(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2 \quad (3.59)$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=1}^n f(x_{1,p_i}, x_2) W_i \right] dx_2$$

Admitindo

$$g(x_2) = \sum_{i=1}^n f(x_{1,p_i}, x_2) W_i \quad (3.60)$$

então (3.59) fica

$$I = \int_{-1}^1 g(x_2) dx_2$$

$$= \sum_{j=1}^n g(x_{2,p_j}) W_j \quad (3.60)$$

pelo que

$$I = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n f(x_{1,p_i}, x_{2,p_j}) W_i \right] W_j$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f(x_{1,p_i}, x_{2,p_j}) W_i W_j \quad (3.61)$$

Desenvolvendo procedimento similar para os integrais de volume (triplos) obtém-se,

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_{1,p_i}, x_{2,p_j}, x_{3,p_k}) W_i W_j W_k \quad (3.62)$$

3.3.4 Etapas para o cálculo da matriz de rigidez e do vector das forças nodais equivalentes de um elemento isoparamétrico de barra de n nós.

a) Interpolação do campo de deslocamento

Os deslocamentos de um ponto do interior do elemento obtêm-se a partir da relação seguinte

$$\begin{aligned}
 u_1^{(i)}(x_1) &= N_1 u_{1,1} + N_2 u_{1,2} + \dots + N_n u_{1,n} \\
 &= \sum_{i=1}^n N_i u_{1,i} \\
 &= [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ \vdots \\ u_{1,n} \end{bmatrix} \\
 &= \underline{N} \underline{U}^{(e)}
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

b) Interpolação da geometria

Segundo a formulação isoparamétrica, a coordenada x_1 de qualquer ponto do elemento obtêm-se a partir das coordenadas dos pontos nodais do elemento e recorrendo às funções de forma utilizadas na interpolação do campo de deslocamento,

$$\begin{aligned}
 x_1^{(i)}(x_1) &= N_1 x_{1,1} + N_2 x_{1,2} + \dots + N_n x_{1,n} \\
 &= \sum_{i=1}^n N_i x_{1,i} \\
 &= [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ \vdots \\ x_{1,n} \end{bmatrix} \\
 &= \underline{N} \underline{X}^{(e)}
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

c) Extensões

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(x_1) &= \frac{dN_1}{dx_1} u_{1,1} + \frac{dN_2}{dx_1} u_{1,2} + \dots + \frac{dN_n}{dx_1} u_{1,n} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{dN_i}{dx_1} u_{1,i} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx_1} & \frac{dN_2}{dx_1} & \dots & \frac{dN_n}{dx_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ \vdots \\ u_{1,n} \end{bmatrix} \\
&= \underline{B}^{(e)} \underline{U}^{(e)}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Na secção 3.3.1 verificou-se que

$$\frac{dN_i(s_1)}{dx_1} = \frac{dN_i(s_1)}{ds_1} \frac{ds_1}{dx_1} \tag{3.66}$$

De (3.64) constata-se que

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{ds_1} &= \sum_{i=1}^n \frac{dN_i}{ds_1} x_{1,i} \\
&= \underline{J}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

pelo que

$$dx_1 = J ds_1 \tag{3.68}$$

e

$$\frac{ds_1}{dx_1} = \frac{1}{J} \tag{3.69}$$

em que J é o Jacobiano associado ao ponto de Gauss. Substituindo (3.69) em (3.66) obtém-se

$$\frac{dN_i}{dx_1} = \frac{dN_i}{ds_1} \frac{1}{J} \tag{3.70}$$

pelo que a matriz $\underline{B}^{(e)}$ em (3.65) passa a apresentar a configuração seguinte

$$\begin{aligned}
\underline{B}^{(e)} &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{ds_1} & \frac{dN_2}{ds_1} & \dots & \frac{dN_n}{ds_1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{J} \hat{\underline{B}}^{(e)}
\end{aligned} \tag{3.71a}$$

em que

$$\underline{\hat{B}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{ds_1} & \frac{dN_2}{ds_1} & \dots & \frac{dN_n}{ds_1} \end{bmatrix}. \quad (3.71b)$$

O J pode ser interpretado como sendo o determinante do Jacobiano da transformação entre os referenciais x_i e s_i . Neste caso, como $i=1$, o determinante do Jacobiano coincide com $\frac{dx_1}{ds_1}$ em que dx_1 é o comprimento que um elemento de dimensão infinitesimal tem no referencial x_1 e ds_1 é esse comprimento no referencial s_1 . Em problemas bidimensionais J é uma matriz 2×2 e em problemas tridimensionais é uma matriz 3×3 .

d) Tensões e esforços

No caso unidimensional,

$$\begin{aligned} \sigma &= D \varepsilon \\ &= D \underline{B}^{(e)} \underline{U}^{(e)} \end{aligned} \quad (3.72)$$

em que D é igual ao módulo de elasticidade longitudinal do material do elemento (E). Integrando (3.72) à área da secção transversal da barra, A , obtém-se o esforço axial,

$$\bar{\sigma} = N = \bar{D} \underline{B}^{(e)} \underline{U}^{(e)} \quad (3.73)$$

em que

$$\bar{D} = EA \quad (3.74)$$

e) Matriz de rigidez do elemento

Em secções anteriores verificou-se que a matriz de rigidez de um elemento de barra biarticulada se determina por intermédio da seguinte relação,

$$\underline{k}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \left[\underline{B}^{(e)} \right]^T E A \underline{B}^{(e)} dx_1. \quad (3.75)$$

Substituindo (3.68) em (3.75) e tendo em conta (3.71a) resulta,

$$\underline{k}^{(e)} = \int_{-1}^1 \left[\underline{\hat{B}}^{(e)} \right]^T E A \underline{\hat{B}}^{(e)} J^{-1} ds_1. \quad (3.76)$$

Tendo em conta (3.71b) conclui-se que um coeficiente genérico da matriz de rigidez obtém-se a partir da seguinte relação,

$$k_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{ds_1} E A \frac{dN_j}{ds_1} \frac{1}{J} ds_1. \quad (3.77)$$

Aplicando a integração Numérica de Gauss-Legendre obtém-se,

$$k_{ij}^{(e)} = \sum_{m=1}^p \left[\frac{dN_i}{ds_1} E A \frac{dN_j}{ds_1} \frac{1}{J} \right]_{s_{1,m}} W_m \quad (3.78)$$

em que p é o número de pontos de Gauss. Se a barra for de secção variável a área A em (3.78) deve ser substituída por $A(s_{1,m})$, isto é, pela área na secção correspondente à ordenada $s_{1,m}$, que pode ser obtida pela condição de elemento isoparamétrico,

$$A(s_{1,m}) = N_1(s_{1,m}) A_1 + N_2(s_{1,m}) A_2 + \dots + N_n(s_{1,m}) A_n \quad (3.79)$$

em que A_1, A_2, \dots, A_n são a área das secções correspondentes aos pontos nodais do elemento e $N_1(s_{1,m}), N_2(s_{1,m}), \dots, N_n(s_{1,m})$ são as funções de forma do elemento, utilizadas na interpolação do campo de deslocamentos, e avaliadas no ponto de Gauss de ordenada $s_{1,m}$.

f) Vector das forças nodais equivalentes

Para uma força distribuída ao longo do eixo da barra, q_1 , verificou-se em secções anteriores que o vector das forças nodais equivalentes era determinado pela seguinte expressão,

$$\underline{Q}_\ell^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{N}^T q_1 dx_1. \quad (3.80)$$

Substituindo (3.68) em (3.80) resulta

$$\underline{Q}_\ell^{(e)} = \int_{-1}^1 \underline{N}^T q_1 J ds_1. \quad (3.81)$$

Aplicando a integração Numérica de Gauss-Legendre obtém-se

$$\underline{Q}_\ell^{(e)} = \sum_{m=1}^p \left[\underline{N}^T q_1 J \right]_{s_{1,m}} W_m \quad (3.82)$$

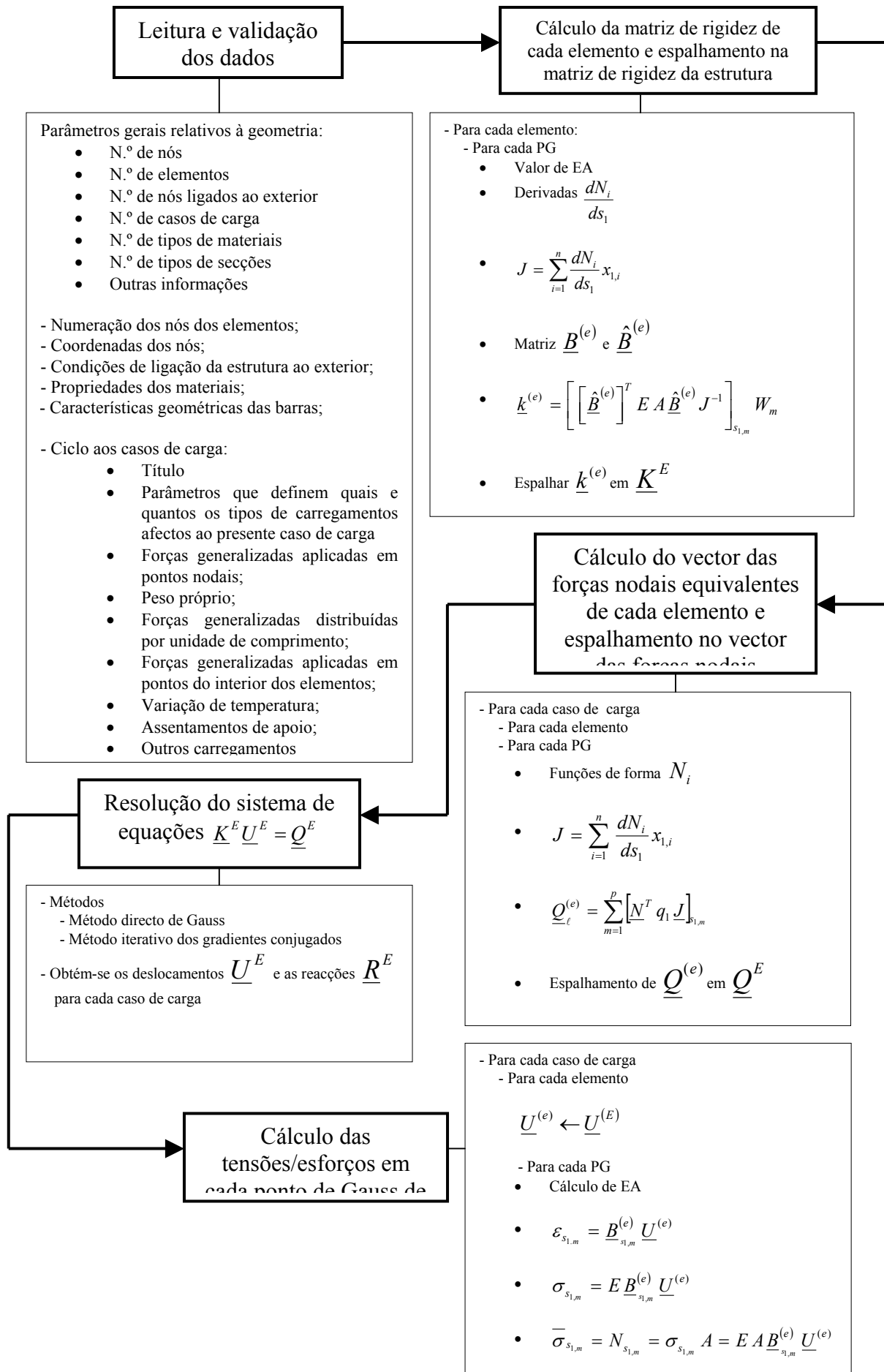
Se q_1 for variável ao longo da barra, o valor de q_1 no ponto de Gauss de ordenada $s_{1,m}$ pode ser obtido recorrendo à condição de elemento isoparamétrico,

$$q_1(s_{1,m}) = N_1(s_{1,m}) q_{1,1} + N_2(s_{1,m}) q_{1,2} + \dots + N_n(s_{1,m}) q_{1,n} \quad (3.83)$$

em que $q_{1,1}, q_{1,2}, \dots, q_{1,n}$ são os valores que a função q_1 assume nos nós do elemento.

3.4 – Fluxograma de um programa de elementos finitos

Na Figura 3.6 representa-se o fluxograma de um programa de elementos finitos para análise linear de estruturas reticuladas.



3.5 - Selecção do tipo de elemento

A selecção do tipo de elemento depende:

1. das características próprias da estrutura a analisar;
2. dos tipos de elementos disponíveis no programa de cálculo;
3. da experiência acumulada na resolução de estruturas segundo o MEF.

No momento de seleccionar um elemento finito para discretizar uma determinada estrutura devem ser tidas em conta as seguintes recomendações:

1. Em zonas de elevada concentração de tensões deve-se utilizar elementos de maior ordem ou refinar a malha, sendo esta última a solução mais corrente;
2. É preferível usar malhas refinadas com elementos simples (poucos nós) do que malhas grosseiras (poucos elementos) com elementos de muitos nós (economia em termos de tempo de cálculo e de memória de computador).
3. No caso de se ter ideia da forma polinomial do campo de deslocamentos da estrutura, deve-se optar por elementos com funções de forma do mesmo grau das do campo de deslocamentos (difícil de assegurar em aplicações práticas);

3.6 - Requisitos para a convergência da solução

Quando se pretende estudar uma estrutura segundo o MEF deve-se efectuar algumas análises com malhas de diferente grau de refinamento, de forma a se garantir que a malha adoptada conduz a solução com erro desprezável. A convergência da solução é garantida quando, com o refinamento da malha, os resultados convergem para determinado valor.

Apresentam-se de seguida algumas das condições que devem ser cumpridas para se assegurar a convergência da solução.

3.6.1 - Condição de continuidade

O campo de deslocamentos deve ser contínuo no interior de cada elemento. Esta condição é satisfeita desde que se utilize funções polinomiais para as funções de forma.

3.6.2 - Condição de derivabilidade

Os polinómios associados às funções de forma devem ser deriváveis até pelo menos a ordem das derivadas que surgem nos integrais da expressão relativa ao teorema dos trabalhos virtuais (TTV). Por exemplo, no caso da barra biarticulada, na parcela afectada ao trabalho interno de deformação, que conduz à matriz de rigidez do elemento, tem-se:

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{ds_1} E A \frac{dN_j}{ds_1} \frac{1}{J} ds_1 \quad (3.84)$$

pois que os coeficientes da matriz de rigidez incluem derivadas de 1ª ordem das funções de forma. Assim, estas funções de forma devem ser funções polinomiais do 1º grau, pelo menos.

3.6.3 - Condição de integrabilidade

As funções de forma devem ser tais que as funções a integrar na expressão do T.T.V tenham primitiva. Na figura 3.7 a função $f(x)$ é contínua pelo que é integrável,

$$\text{Área} = A_1 + A_2 = \int_0^1 f_1(x) dx + \int_1^2 f_2(x) dx. \quad (3.85)$$

A função $f'(x)$ (derivada de $f(x)$), apesar de não ser contínua é ainda integrável,

$$\text{Área} = A'_1 + A'_2 = \int_0^1 f'_1(x) dx + \int_1^2 f'_2(x) dx. \quad (3.86)$$

A função $f''(x)$ (2ª derivada de $f(x)$) já não é integrável dado que $f''(x=1)$ é singular, pois $f'(x)$ é descontínua em $x=1$.

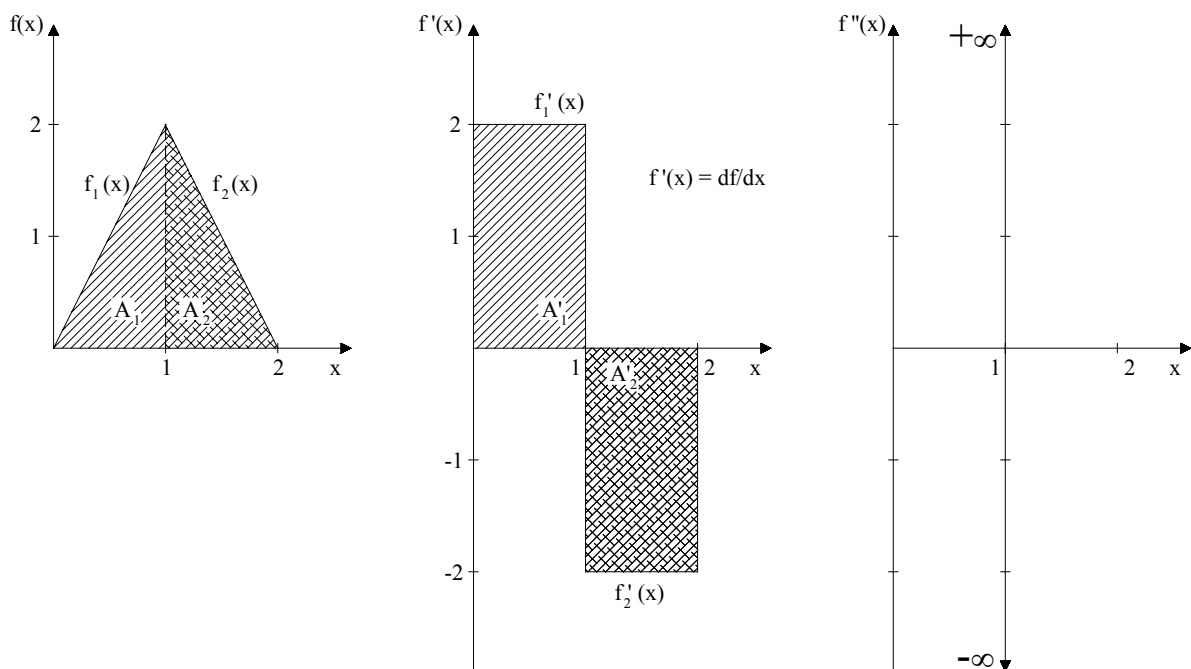


Figura 3.7 – Representação gráfica da função (a), sua primeira derivada (b) e sua segunda derivada (c).

A derivada de ordem m de uma função é integrável se forem contínuas as suas $m-1$ primeiras derivadas.

No caso do MEF, se na expressão do T.T.V aparecer derivadas de ordem m dos deslocamentos, o campo de deslocamentos e , por conseguinte, as funções de forma que o simulam, devem ter continuidade de classe C_{m-1} , isto é, as $m-1$ primeiras derivadas devem ser contínuas.

No caso do elemento de barra biarticulada aparecem derivadas do 1º grau nos integrais da expressão do TTV associadas ao cálculo da matriz de rigidez do elemento (trabalho interno – ver expressão (2.26)). Neste caso, para assegurar a condição de integrabilidade é suficiente que o campo de deslocamentos seja contínuo. Ao adoptar-se funções de forma polinomiais de 1º grau está-se a garantir a continuidade do campo de deslocamento no interior dos elementos. Além disto, como nos nós de ligação entre elementos os deslocamentos são unívocos, então também se garante a continuidade dos deslocamentos nas fronteiras dos elementos.

3.7 - Outros requisitos para os elementos finitos

3.7.1 - Condições de compatibilidade

Os elementos devem ser compatíveis. Os elementos são compatíveis, ou conformes, quando o campo de deslocamentos é contínuo nas fronteiras dos elementos. Se tal não ocorrer diz-se que os elementos são incompatíveis ou não conformes.

Se o requisito de continuidade do campo de deslocamentos for cumprido, a condição de compatibilidade é garantida, normalmente. Por sua vez, a continuidade do campo de deslocamentos é garantida desde que se utilize funções de forma polinomiais com valor unitário em cada nó e nulo nos restantes nós.

3.7.2 - Condição de polinómio completo

A solução polinomial de elementos finitos equivale a aproximar a solução exacta por um certo número de termos do desenvolvimento em série de Taylor.

O campo de deslocamentos previsto pelo MEF aproximará até ao m -ésimo termo de desenvolvimento em série de Taylor da solução exacta (campo de deslocamentos) sempre e quando a expressão do campo de deslocamentos aproximada do MEF contenha todos os termos do polinómio de grau m (polinómio completo de grau m). Neste caso o erro da aproximação por elementos finitos é da ordem do 1º termo que se despreza no desenvolvimento de série de Taylor do campo de deslocamentos.

Assim, a aproximação por elementos finitos depende do polinómio completo de maior grau contido nas funções de forma. A aproximação será óptima se todos os termos formarem um polinómio completo, e não o será em caso contrário.

Para deduzir os termos que intervêm num polinómio completo de mais do que uma variável é útil utilizar o triângulo de Pascal (Zienkiewicz e Taylor 1989).

Em conclusão, pode-se afirmar que é desejável que as funções de forma do elemento sejam polinómio completos e, no caso de tal não ser possível, o número de termos adicionais aos do polinómio completo deve ser o menor possível.

Exemplo

- 1) Polinómio completo de 2º grau
Aproximação completa de 2º grau

$$1D: \quad \bar{u}_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2$$

$$2D: \quad \bar{u}_1(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_1^2 + a_5 x_2^2$$

- 2) Polinómio incompleto de terceiro grau
Aproximação incompleta de terceiro grau

$$1D: \quad \bar{u}_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^3$$

$$2D: \quad \bar{u}_1(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_2^2 + a_5 x_1^3$$

3.7.3 - Condição de estabilidade

A matriz de rigidez de um elemento deve ter um domínio correcto. O domínio de uma matriz é igual ao número de valores próprios nulos que contém. O domínio correcto da matriz de rigidez de um elemento isolado e sem ligações ao exterior deve ser igual ao número de movimentos de corpo rígido do elemento (Oñate 1992).

3.7.4 - Condição de invariância

Um elemento não deve ter direcções preferenciais, isto é, os elementos devem possuir o que se denomina por "invariância geométrica" ou "isotropia geométrica ou espacial" (Oñate 1992).

3.8 - Considerações sobre compatibilidade e equilíbrio da solução

A solução de elementos finitos é aproximada e, por conseguinte, em geral não satisfaz os requisitos de equilíbrio e compatibilidade, característicos de uma solução exacta. Assim, numa análise por elementos finitos verifica-se usualmente que :

- 1) a solução é compatível dentro dos elementos;
- 2) a solução pode ser ou não ser compatível nas fronteiras entre elementos;
- 3) A compatibilidade é sempre satisfeita nos nós;
- 4) O equilíbrio de forças generalizadas é sempre satisfeito nos nós;

- 5) Normalmente não existe equilíbrio de tensões entre elementos;
- 6) As tensões não estão em equilíbrio no interior do elemento.

3.9 - Condições para convergência dos elementos isoparamétricos

Considere-se que uma malha de elementos finitos de barra biarticulada de dois nós tem o seguinte campo de deslocamentos

$$u_1 = a_1 + a_2 x_1. \quad (3.87)$$

Desta forma, os deslocamentos dos nós de um elementos são

$$u_{1,i} = a_1 + a_2 x_{1,i} \text{ com } i = 1,2. \quad (3.88)$$

No interior de um elemento,

$$u_1(x_1) = \sum_{i=1}^2 N_i u_{1,i}. \quad (3.89)$$

Substituindo (3.88) em (3.89) obtém-se

$$\begin{aligned} u_1(x_1) &= \sum_{i=1}^2 N_i (a_1 + a_2 x_{1,i}) \\ &= a_1 \sum_{i=1}^2 N_i + a_2 \sum_{i=1}^2 N_i x_{1,i}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Como por definição de elemento isoparamétrico,

$$x_1 = \sum_{i=1}^2 N_i x_{1,i} \quad (3.91)$$

resulta que para que (3.90) seja igual a (3.87) se cumpra a seguinte relação,

$$\sum_{i=1}^2 N_i = 1 \quad (3.92)$$

que é uma característica das funções de forma deduzidas nas secções anteriores.

3.10 - Tipos de erros na solução por elementos finitos

De seguida enumeram-se os erros mais correntes no MEF.

- Erros de discretização da estrutura;
- Erros na aproximação da geometria;
- Erros no cálculo dos integrais afectos à matriz de rigidez dos elementos, ao vector solicitação e às tensões/esforços, devido a deficiente escolha do número de pontos de Gauss utilizado no cálculo numérico destes integrais;
- Erros na resolução do sistema de equações;
- Erros associados à lei constitutiva do material.

3.11 - Pontos óptimos para o cálculo das tensões/extensões

Em geral, se as funções de forma são polinómios completos de grau p , a aproximação das tensões/esforços será polinomial de grau $p-1$ ou $p-2$, se forem obtidos em função da primeira ou da segunda derivada do campo de deslocamentos, respectivamente.

Demonstra-se que as tensões obtidas segundo o MEF podem considerar-se como uma aproximação pelo método dos mínimos quadrados (MMQ) da solução exacta. Assim, nos pontos de intersecção da curva correspondente à distribuição exacta de tensões com a curva aproximada, que se ajusta à anterior pelo MMQ, os valores das tensões obtidas pelo MEF coincidem com os exactos.

Contudo, na maior parte dos casos não se conhece a distribuição real do campo de tensões. Para ultrapassar este problema recorre-se à seguinte propriedade da integração numérica de Gauss-Legendre: nos pontos de uma quadratura de Gauss-Legendre de ordem n , um polinómio de grau n e outro de grau $n-1$, obtido do anterior através do MMQ, tomam o mesmo valor.

Nos exemplos que se seguem pretende-se esclarecer este assunto.

Exemplo 1

Demonstrar que um polinómio de segundo grau e outro de primeiro grau, obtido do anterior pelo MMQ, se interceptam nos pontos de quadratura de Gauss-Legendre de segunda ordem.

Resolução

Polinómio de segundo grau

$$f(x) = 1 + x + x^2. \quad (3.93)$$

Polinómio de primeiro grau

$$g(x) = a + bx. \quad (3.94)$$

Aproxime-se $g(x)$ a $f(x)$ pelo MMQ:

$$e = \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 [(1-a) + (1-b)x + x^2]^2 dx. \quad (3.95)$$

Para que o erro e seja mínimo ter-se-á que

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial a} = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 -2[(1-a) + (1-b)x + x^2] dx = 0 \\ \frac{\partial e}{\partial b} = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 -2x[(1-a) + (1-b)x + x^2] dx = 0 \end{cases} \quad (3.96)$$

resultando

$$a = \frac{4}{3} \text{ e } b = 1, \quad (3.97)$$

pelo que

$$g(x) = \frac{4}{3} + x. \quad (3.98)$$

que intercepta $f(x)$ nos pontos $x_1 = -1/\sqrt{3}$ e $x_2 = 1/\sqrt{3}$, que são os pontos da quadratura de *Gauss-Legendre* de segunda ordem (ver Figura 3.8 e Quadro 3.1)

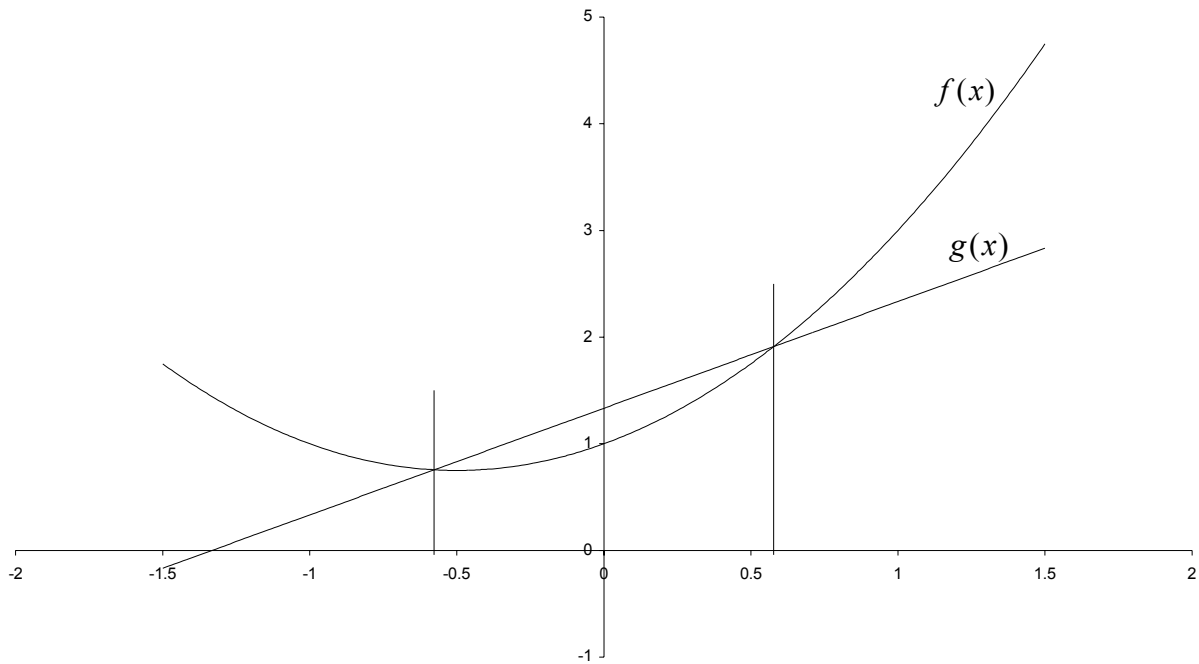


Figura 3.8 – O polinômio de 2º grau, $f(x)$, e o polinômio de 1º grau, $g(x)$, obtido de $f(x)$ por intermédio do MMQ, interceptam-se nos pontos de Gauss da quadratura de Gauss-Legendre de 2ª ordem.

Exemplo 2

Demonstre que um polinômio de terceiro grau e outro de segundo grau, obtido do anterior pelo MMQ, se interceptam nos pontos da quadratura de Gauss-Legendre de terceira ordem.

Resolução

Polinômio de terceiro grau

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3. \quad (3.99)$$

Polinômio de segundo grau

$$g(x) = a + bx + cx^2. \quad (3.100)$$

Aproxime-se $g(x)$ a $f(x)$ pelo MMQ:

$$e = \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 [(1 - a) + (1 - b)x + (1 - c)x^2 + x^3]^2 dx. \quad (3.101)$$

Para que o erro e seja mínimo ter-se-á que,

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial a} = 0 \Rightarrow 1 - a + \frac{1-c}{3} = 0 \\ \frac{\partial e}{\partial b} = 0 \Rightarrow \frac{1-b}{3} + \frac{1}{5} = 0 \\ \frac{\partial e}{\partial c} = 0 \Rightarrow \frac{1-a}{3} + \frac{1-c}{5} = 0 \end{cases} \quad (3.102)$$

resultando

$$a = 1, \quad b = \frac{8}{5} \quad \text{e} \quad c = 1, \quad (3.103)$$

pelo que

$$g(x) = 1 + \frac{8}{5}x + x^2 \quad (3.104)$$

que intercepta $f(x)$ nos pontos $x_1 = -\sqrt{3}/\sqrt{5}$, $x_2 = 0$ e $x_3 = \sqrt{3}/\sqrt{5}$ que são os pontos da quadratura de *Gauss-Legendre* de terceira ordem (ver Figura 3.9 e Quadro 3.1)

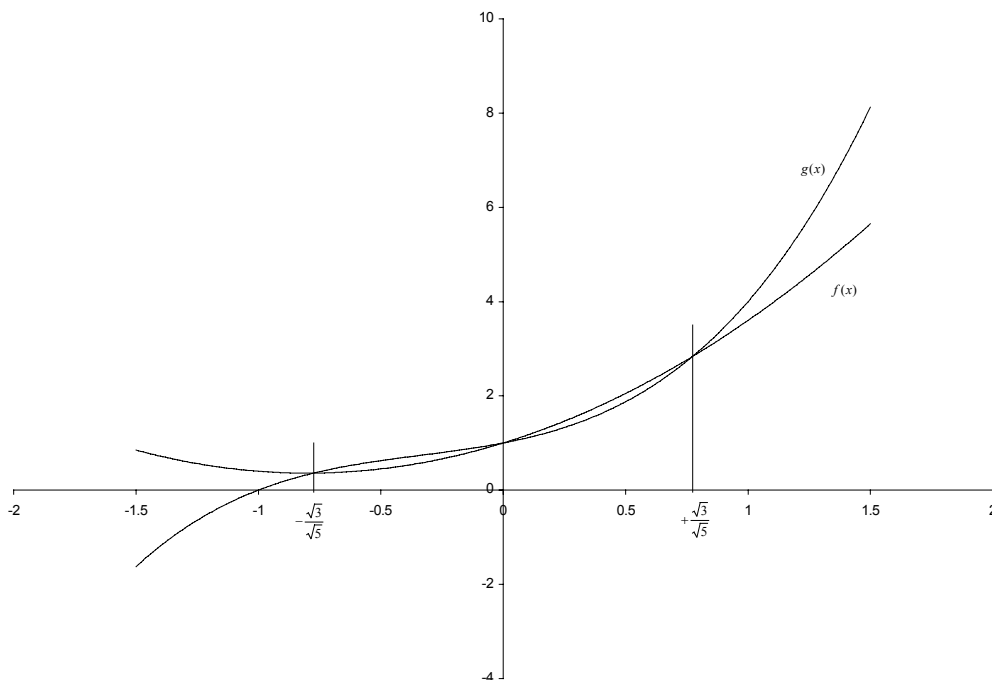


Figura 3.9 – O polinômio de 3º grau, $f(x)$, e o polinômio de 2º grau, $g(x)$, obtido de $f(x)$ por intermédio do MMQ, interceptam-se nos pontos de Gauss da quadratura de Gauss-Legendre de 3ª ordem.

Pode-se então apresentar as conclusões seguintes:

- 1) Se a distribuição exacta de tensões/esforços $\underline{\sigma}/\underline{\bar{\sigma}}$ (ou das extensões $\underline{\varepsilon}$) é um polinômio de grau n , e a aproximação obtida pelo MEF é de grau $n-1$, a

determinação de $\underline{\sigma}/\underline{\bar{\sigma}}$ (ou $\underline{\varepsilon}$) nos pontos de quadratura de Gauss-Legendre de ordem n é exacta;

- 2) Se os polinómios que representam as soluções exactas e do MEF para $\underline{\sigma}/\underline{\bar{\sigma}}$ ou $\underline{\varepsilon}$ diferem em mais do que um grau, a determinação de $\underline{\sigma}/\underline{\bar{\sigma}}$ ou $\underline{\varepsilon}$ nos pontos da quadratura de Gauss-Legendre aproxima um termo mais o desenvolvimento em série de Taylor a solução exacta, que em qualquer outro ponto do elemento.

Resumindo, as tensões/esforços e as extensões devem ser determinadas nos pontos de Gauss. Se houver interesse em obter estas grandezas nos pontos nodais deve-se efectuar uma extrapolação dos pontos de Gauss para os pontos nodais.

Na Figura 3.10a representa-se, esquematicamente, a extrapolação num elemento de dois nós, com dois pontos de Gauss (PG).

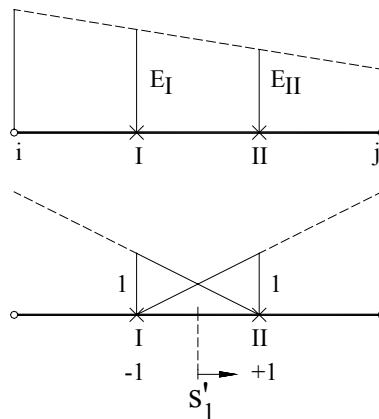


Figura 3.10a – Extrapolação de grandezas em 2 PG para os nós de um elemento de dois nós.

Se E_I e E_{II} são as grandezas (tensões, esforços ou extensões) determinadas nos PG I e II do elemento, a extrapolação para os pontos nodais efectua-se por intermédio da expressão seguinte,

$$E(s'_1) = N'_1(s'_1)E_I + N'_2(s'_1)E_{II} \quad (3.105)$$

em que s'_1 é a coordenada de um elemento “fictício” com nós nos PG I e II. Assim, $s'_1 = -1$ para $s_1 = -\sqrt{3}/3$ e $s'_1 = 1$ para $s_1 = \sqrt{3}/3$. Em (3.105) $N'_1(s'_1)$ e $N'_2(s'_1)$ são as funções de forma lineares do elemento “fictício”, definidas a partir das expressões (3.10), substituindo s_1 por s'_1 . Assim, $N'_1(s'_1)$ assume o valor unitário no PG I e o valor nulo no PG II. Por sua vez, a função $N'_2(s'_1)$ assume o valor nulo no PG I e o valor unitário no PG II. Para se extrapolar para o nó i , o valor de s'_1 será,

$$\begin{aligned}
 s'_1 = -1 & \text{ _____ } s_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\
 s'_{1,i} = ? & \text{ _____ } s_1 = -1 \\
 s'_{1,i} = -\frac{3}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}
 \tag{3.106}$$

pelo que substituindo esta coordenada em (3.105) obtém-se a grandeza no nó *i*. Para se obter a grandeza no nó *j* determina-se a coordenada de *s'*₁ neste nó,

$$\begin{aligned}
 s'_1 = 1 & \text{ _____ } s_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\
 s'_{1,j} = ? & \text{ _____ } s_1 = 1 , \\
 s'_{1,j} = \frac{3}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}
 \tag{3.107}$$

sendo esta substituída em (3.105). Nas Figuras 3.10b e 3.10c representa-se, esquematicamente, a extrapolação num elemento de 3 nós com 2 PG e num elemento de 3 nós com 3 PG, respectivamente. Note-se que no caso de um elemento com 3 PG, as funções de forma $N'_i(s'_1)$ *c*/*i*=1,2,3, são os polinómios definidos em 3.11, substituindo *s*₁ por *s'*₁.

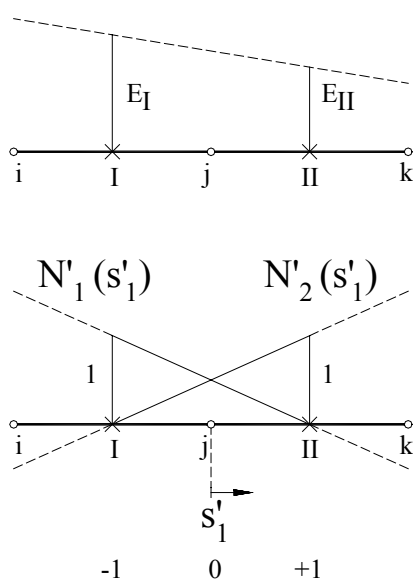


Figura 3.10b – Extrapolação de grandezas em 2 PG para os nós de um elemento de três nós.

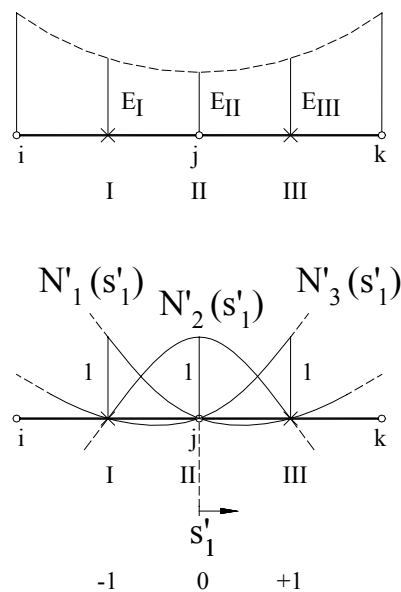


Figura 3.10c – Extrapolação de grandezas em 3 PG para os nós de um elemento de três nós.

Na figura 3.11 representa-se o número de pontos de Gauss para os elementos finitos 1D (unidimensionais) de um grau de liberdade (apenas a deformação axial – caso das barras biarticuladas).

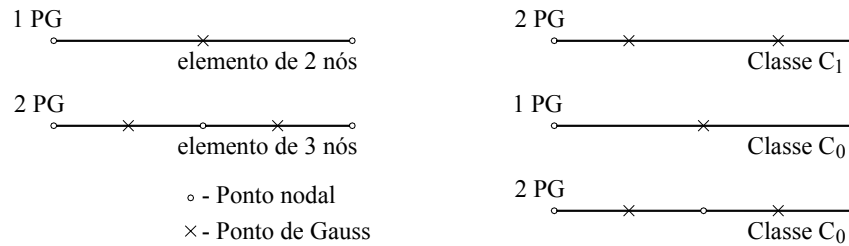


Figura 3.11 – Número de pontos de Gauss para elementos unidimensionais.

3.12 – Exercícios resolvidos

A barra biarticulada representada na Figura 3.12 está submetida a uma força distribuída de 10 kN/m. Discretizando a barra num elemento de três nós calcule:

- A matriz de rigidez da estrutura;
- O vector solicitação da estrutura;
- Os deslocamentos e reacções.

- $E_c = 30 \text{ GPa}$; $A = 0.2 \times 0.2 \text{ m}^2$

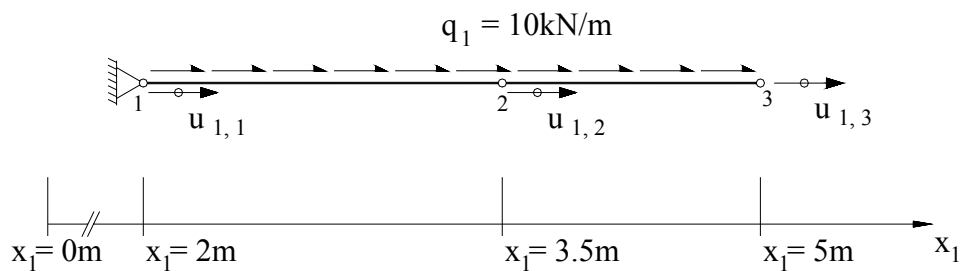


Figura 3.12 – Barra biarticulada submetida a uma força distribuída de 10 kN/m.

Resolução:

- Calculo da matriz de rigidez da estrutura:

$$\underline{K}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{B}^T E A \underline{B} dx_1$$

onde:

$$\underline{B}(s_1) = \frac{2}{L^{(e)}} \left[s_1 - \frac{1}{2} \quad -2s_1 \quad s_1 + \frac{1}{2} \right] \quad ; \quad dx_1 = \frac{L^{(e)}}{2} ds_1$$

$$\underline{K}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{B}^T EA \underline{B} dx_1 = \frac{2}{L^{(e)}} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} s_1 - \frac{1}{2} \\ -2s_1 \\ s_1 + \frac{1}{2} \end{bmatrix} (EA)^{(e)} \begin{bmatrix} s_1 - \frac{1}{2} & -2s_1 & s_1 + \frac{1}{2} \end{bmatrix} ds_1$$

$$\underline{K}^{(e)} = \left(\frac{2EA}{L}\right)^{(e)} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (s_1 - \frac{1}{2})^2 & -2s_1(s_1 - \frac{1}{2}) & (s_1 - \frac{1}{2})(s_1 + \frac{1}{2}) \\ -2s_1(s_1 - \frac{1}{2}) & (-2s_1)^2 & -2s_1(s_1 + \frac{1}{2}) \\ (s_1 + \frac{1}{2})(s_1 - \frac{1}{2}) & -2s_1(s_1 + \frac{1}{2}) & (s_1 + \frac{1}{2})^2 \end{bmatrix} ds_1$$

$$\underline{K}^{(e)} = \left(\frac{EA}{6L}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}$$

b) Cálculo do vector solicitação da estrutura

$$\underline{Q}_\ell^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s_1(s_1-1) \\ (1+s_1)(1-s_1) \\ \frac{1}{2}s_1(1+s_1) \end{bmatrix} q_{x_1} dx_1 = \frac{2}{L^{(e)}} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s_1(s_1-1) \\ (1+s_1)(1-s_1) \\ \frac{1}{2}s_1(1+s_1) \end{bmatrix} q_{x_1} ds_1$$

$$\underline{Q}_\ell^{(e)} = \left(\frac{q_{x_1}L}{6}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Cálculo dos deslocamentos e das reacções:

$$\underline{K}^{(E)} \underline{U}^{(E)} = \underline{Q}^{(E)} \Leftrightarrow \underline{K}^{(e)} \underline{U}^{(e)} = \underline{Q}^{(e)}$$

$$66666.6667 \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+R \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema de equações de equilíbrio obtém-se:

$$\begin{cases} R = -30 \text{ KN} \\ u_{1,2} = 0.000028125 \text{ m} \\ u_{1,3} = 0.0000375 \text{ m} \end{cases}$$

3.13 – Exercícios para resolver

1 – Descreva as etapas de análise de uma estrutura segundo o método dos elementos finitos.

2 – Calcule o coeficiente K_{22} da matriz de rigidez de um elemento de barra biarticulada de 3 nós, de comprimento L , secção constante de área A e módulo de elasticidade E .

3 – Qual o significado de formulação isoparamétrica.

4 - Na Figura 3.9 representa-se uma estrutura constituída por 3 barras biarticuladas. Discretize as barras 1 e 3 por um elemento de 2 nós cada, e a barra 2 por um elemento de 3 nós.

a) Calcule a matriz de rigidez da estrutura correspondente aos graus de liberdade do nó 1.

b) Calcule as componentes do nó 1 das forças nodais equivalentes às acções que actuam na estrutura, admitindo para acções na estrutura o peso próprio da barra 2 e a carga aplicada no nó 1.

c) Sabendo que os deslocamentos segundo x_2 dos nós 1 e 3 são $-7.342e-04$ m e $-4.898e-04$ m, respectivamente, calcule os esforços instalados na barra 2.

Dados:

Barras 1 e 3: Área=100 cm²; módulo de elasticidade longitudinal=200 GPa.

Barra 2: Área=300 cm²; massa específica=7.85 t/m³; módulo de elasticidade longitudinal=200 GPa.

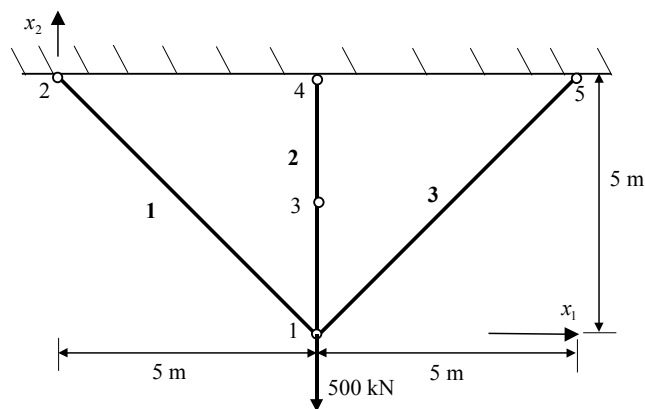


Figura 3.9