2 - ELEMENTOS FINITOS DE BARRA ARTICULADA. CONCEITOS BÁSICOS

2.1 - Introdução

Neste capítulo o método dos elementos finitos (MEF) vai ser aplicado a estruturas discretizadas por elementos de barra biarticulada, de que as treliças são exemplo. Na Figura 2.1 representa-se uma treliça bidimensional. Se o seu peso próprio for desprezado, estas barras apenas ficam submetidas a esforços axiais, pelo que estas barras apenas sofrem extensões segundo o seu eixo, isto é, todos os pontos de uma secção da barra sofrem o mesmo deslocamento, paralelo ao eixo da barra.

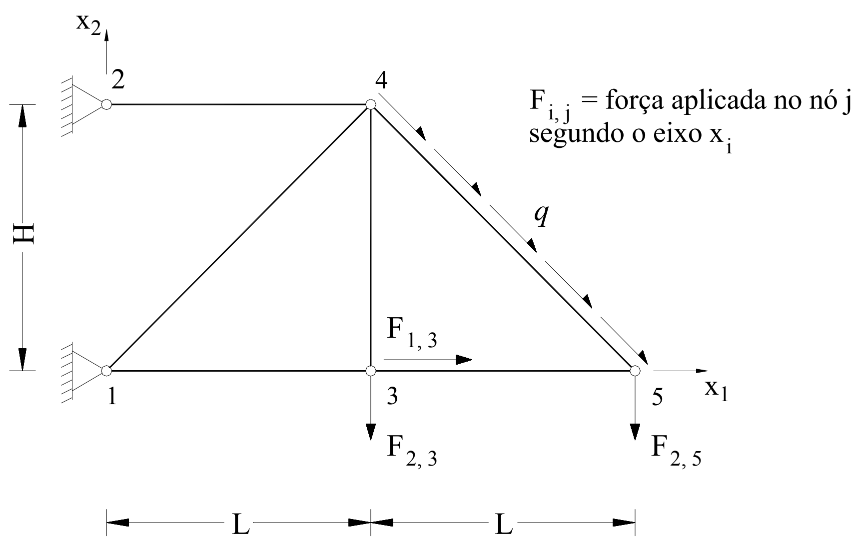


Figura 2.1 - Treliça plana.

2.2 - Barra biarticulada submetida a esforços axiais

Considere-se a barra de comprimento L, secção transversal A, constituída por material com módulo de elasticidade longitudinal E, submetida a forças distríbuidas por unidade de comprimento segundo o eixo da barra, q , e solicitada por um conjunto de forças aplicadas em pontos do eixo da barra segundo a sua direcção, Q_i. Este conjunto de forças introduz extensões na barra segundo a direcção do seu eixo.

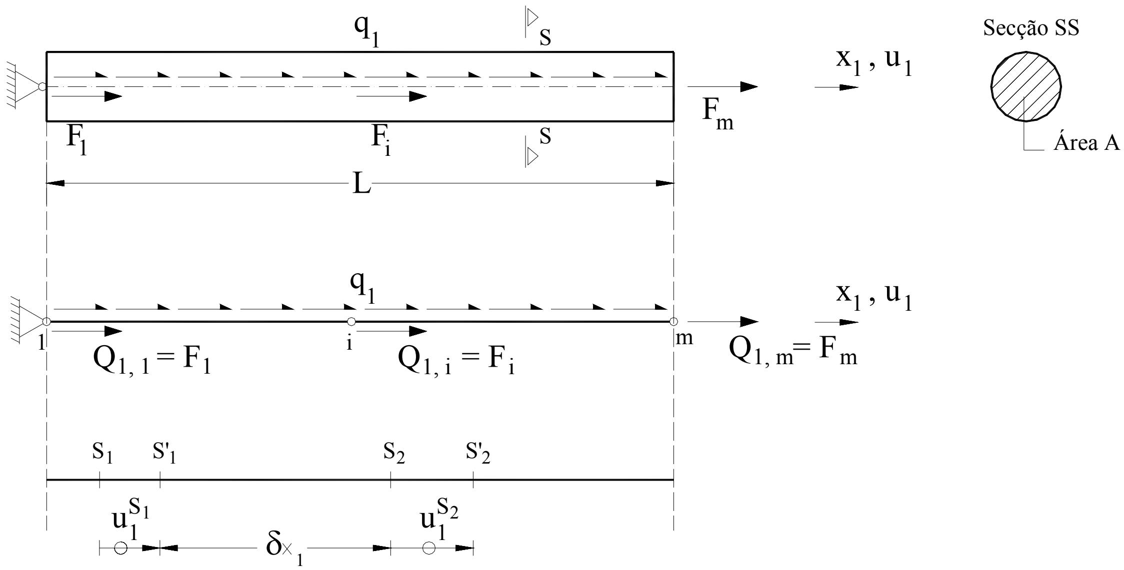


Figura 2.2 - Barra biarticulada submetida a forças axiais

Assim, se as secções S_1 e S_2 sofrerem deslocamentos $u_1^{S_1}$ e $u_1^{S_2}$, respectivamente, a extensão ocorrida no elemento $\overline{S_1\ S_2}$ de comprimento dx_1 é

$$\varepsilon_1 = \frac{u_1^{S_2} - u_1^{S_1}}{dx_1} = \frac{du_1}{dx_1} \tag{2.1}$$

pelo que segundo a lei de Hooke desenvolve-se a seguinte tensão

$$\sigma_2 = E\,\varepsilon_1 = E\,\frac{du_1}{dx_1}. \tag{2.2}$$

Segundo o princípio dos trabalhos virtuais (Barros 2000), um corpo está em equilíbrio quando o trabalho interno $\left(\delta W_{\text{int}}\right)$ é igual ao trabalho externo $\left(\delta W_{ext}\right)$ realizado durante a deformação virtual desse corpo. Assim, no caso da barra em estudo obtém-se

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \delta W_{ext} \\ \int_V \delta\varepsilon_1^T\,\sigma_1\,dV &= \int_L \delta u_1^T\,q_1\,dx_1 + \sum_{i=1}^{m} \delta u_{1,i}\,Q_{1,i} \end{aligned} \tag{2.3a}$$

em que δu_1 e $\delta\varepsilon_1$ são o deslocamento e a extensão virtual de um ponto do eixo da barra, segundo x_1, $\delta u_{1,i}$ é o deslocamento virtual do ponto de aplicação da força $Q_{1,i}$, V é o volume da barra e L o seu comprimento. Dado que em (2.3a) as grandezas envolvidas são escalares, o símbolo de transposta pode ser retirado ficando,

$$\int_V \delta\varepsilon_1 \, \sigma_1 \, dV = \int_L \delta u_1 \, q_1 dx_1 + \sum_{i=1}^{m} \delta u_{1,i} \, Q_{1,i} \ . \tag{2.3b}$$

O integral ao volume da barra em (2.3b) pode ser convertido em integral ao comprimento da barra dado que

$$dV = dA \, dx_1 \tag{2.4}$$

em que A é a área da secção transversal da barra. Assim, substituindo (2.2) e (2.4) em (2.3b) e integrando na secção da barra obtém-se,

$$\begin{aligned} \int_L \int_A \delta\varepsilon_1 \, E \, \varepsilon_1 \, dA \, dx_1 &= \int_L \delta u_1 \, q_1 \, dx_1 + \sum_{i=1}^{m} \delta u_{1,i} \, Q_{1,i} \\ \int_L \delta\varepsilon_1 \, E \, A \, \varepsilon_1 \, dx_1 &= \int_L \delta u_1 \, q_1 \, dx_1 + \sum_{i=1}^{m} \delta u_{1,i} \, Q_{1,i} \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

O equilíbrio da barra passa pela determinação do campo de deslocamentos, $u_1(x_1)$, que satisfaça (2.5) e as condições de ligação da barra ao exterior (condições cinemáticas). Por intermédio do método dos elementos finitos pode-se obter um campo de deslocamentos aproximado do real que satisfaça simultaneamente a relação (2.5) e as condições cinemáticas. Assim, considere-se que os deslocamentos ao longo de um elemento de n nós pode ser representado pela função polinomial seguinte,

$$u_1(x_1) = a_0 + a_1 \, x_1 + a_2 \, x_1^2 + ... + a_n \, x_1^n = \sum_{i=1}^{n} a_i \, x_1^i \ . \tag{2.6}$$

As variáveis a_i com $i = 0, \ ..., \ n$ dependem dos valores dos deslocamentos nos pontos nodais do elemento, $u_{1,i}^{(e)}$, em que *(e)* significa que a grandeza é relativa ao elemento. Assim, as variáveis a_i são determinadas resolvendo o sistema de n equações que se obtém substituindo em (2.6) $u_1(x_1)$ pelo valor que assume nos n pontos nodais do elemento. Note-se que a expressão (2.6) pode ser convertida na seguinte:

$$\begin{aligned} u_1^{(e)}(x_1) &= N_1^{(e)}(x_1)\, u_{1,1}^{(e)} + N_2^{(e)}(x_1)\, u_{1,2}^{(e)} + ... + N_n^{(e)}(x_1)\, u_{1,n}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} N_i^{(e)}(x_1)\, u_{1,i}^{(e)} \\ &= \left[N_1^{(e)}(x_1) ... N_n^{(e)}(x_1) \right] \begin{bmatrix} u_{1,1}^{(e)} \\ ... \\ u_{1,n}^{(e)} \end{bmatrix} \\ &= \underline{N}^{(e)} \, \underline{U}^{(e)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

em que $N_i^{(e)}(x_1)$ *c/ i = 1,...,n* são funções polinomiais de interpolação no domínio do elemento, designadas de funções de forma do elemento na nomenclatura do MEF, e $u_{1,i}^{(e)}$ *c/ i = 1,...,n* são os deslocamentos dos *i* nós do elemento. A função de forma $N_i^{(e)}(x_1)$ denomina-se de função de forma do nó *i*, dado interpolar os deslocamentos correspondentes ao nó *i*, dentro do elemento. Analisando (2.7) constata-se que $N_i^{(e)}(x_1)$ assume o valor unitário no nó *i* e nulo nos restantes nós.

Substituindo (2.7) em (2.5) e resolvendo os integrais obtêm-se as equações de equilíbrio da barra que permitem obter os deslocamentos dos nós da barra,

$$\underline{k}^{(e)}\underline{U}^{(e)} = \underline{Q}^{(e)} \tag{2.8}$$

em que $\underline{k}^{(e)}$, $\underline{Q}^{(e)}$ e $U^{(e)}$ são a matriz de rigidez da barra, o vector das forças nodais equivalentes à acção actuante na barra e o vector dos deslocamentos dos nós da barra, respectivamente. Se a barra for discretizada por diversos elementos, determina-se a matriz de rigidez e o vector das forças nodais equivalentes de cada barra e efectua-se o seu espalhamento na matriz de rigidez e no vector solicitação da estrutura, $\underline{K}^{(E)}$ e $\underline{Q}^{(E)}$. Resolvendo o sistema de equações que define o equilíbrio dos nós da estrutura,

$$\underline{K}^{(E)}\underline{U}^{(E)} = \underline{Q}^{(E)}, \tag{2.9}$$

determinam-se os deslocamentos dos pontos nodais da estrutura, $\underline{U}^{(E)}$.

2.3 - Barra biarticulada de secção constante. Discretização num elemento linear

A barra biarticulada de secção constante representada na Figura 2.3a vai ser discretizada por um elemento finito de dois nós (Figura 2.3b).

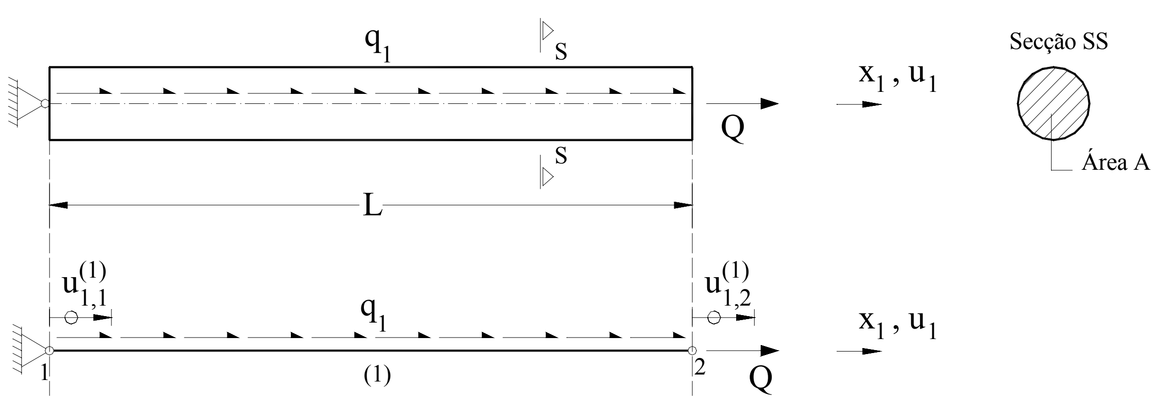


Figura 2.3 – Barra biarticulada discretizada por um elemento finito de dois nós.

O campo de deslocamentos no interior do elemento é definido a partir dos deslocamentos nos nós do elemento. Este campo apresenta uma variação linear representado pela seguinte expressão

$$u_1(x_1) = a_0 + a_1\, x_1 \,. \tag{2.10}$$

Para determinar as variáveis a_0 e a_1 substitui-se em (2.10) $u_1(x_1)$ pelos deslocamentos nos nós 1 e 2 da barra, obtendo-se

$$\begin{aligned} u_1^{(1)}\left(x_1^{(1)} = x_{1,1}^{(1)}\right) &= u_{1,1}^{(1)} = a_0 + a_1\, x_{1,1}^{(1)} \\ u_1^{(1)}\left(x_1^{(1)} = x_{1,2}^{(1)}\right) &= u_{1,2}^{(1)} = a_0 + a_1\, x_{1,2}^{(1)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

em que o sobreíndice (1) representa a numeração da barra, neste caso a barra 1 e o subíndice a numeração do nó do elemento. Em (2.11) $u_{1,1}^{(1)}$ e $u_{1,2}^{(1)}$ representam os deslocamentos dos nós 1 e 2 da barra, enquanto $x_{1,1}^{(1)}$ e $x_{1,2}^{(1)}$ as suas coordenadas. Resolvendo o sistema de equações (2.11) obtém-se

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{x_{1,2}^{(1)}\, u_{1,1}^{(1)} - x_{1,1}^{(1)} u_{1,2}^{(1)}}{x_{1,2}^{(1)} - x_{1,1}^{(1)}} \\ a_1 &= \frac{u_{1,1}^{(1)} - u_{1,2}^{(1)}}{x_{1,1}^{(1)} - x_{1,2}^{(1)}} \end{aligned} \,. \tag{2.12}$$

Substituindo (2.12) em (2.10) obtém-se:

$$u_1^{(1)}(x_1) = N_1^{(1)}(x_1)\, u_{1,1}^{(1)} + N_2^{(1)}(x_1)\, u_{1,2}^{(1)} \tag{2.13}$$

em que

$$\begin{aligned} N_1^{(1)}(x_1) &= \frac{x_{1,2}^{(1)} - x_1^{(1)}}{x_{1,2}^{(1)} - x_{1,1}^{(1)}} \\ N_2^{(1)}(x_1) &= \frac{x_1^{(1)} - x_{1,1}^{(1)}}{x_{1,2}^{(1)} - x_{1,1}^{(1)}} \end{aligned} \tag{2.14}$$

denominam-se de funções de forma do elemento de barra de dois nós. Se $x_{1,1}^{(1)} = 0$ e $x_{1,2}^{(1)} = L^{(1)}$ as anteriores funções de forma assumem a configuração seguinte

$$\begin{aligned} N_1^{(1)}(x_1^{(1)}) &= 1 - \frac{x_1^{(1)}}{L^{(1)}} \\ N_2^{(1)}(x_1^{(1)}{}_1) &= \frac{x_1^{(1)}}{L^{(1)}} \end{aligned} . \tag{2.15}$$

Na Figura 2.4 representam-se estas funções de forma.

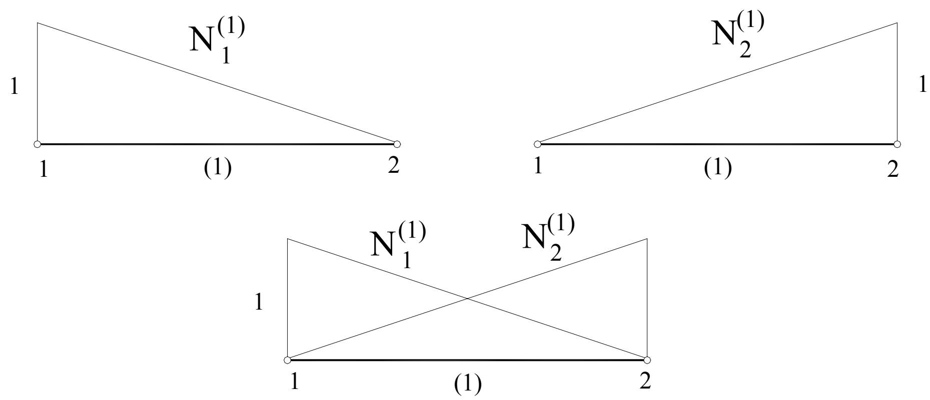


Figura 2.4 - Funções de forma do elemento de barra biarticulada de dois nós.

Assim, $N_1^{(1)}(x_1^{(1)})$ assume o valor unitário no nó 1, valor nulo no nó 2 e varia linearmente no interior do elemento.

Para aligeirar a simbologia das expressões seguintes, $u_1^{(1)}\left(x_1^{(1)}\right)$, $N_1^{(1)}(x_1^{(1)})$ e $N_2^{(1)}(x_1^{(1)})$ serão substituídos por u_1, $N_1^{(1)}$ e $N_2^{(1)}$.

Substituindo (2.13) na relação que determina a extensão num determinado ponto do eixo de barra,

$$\varepsilon_1 = \frac{du_1}{dx_1} \tag{2.16}$$

obtém-se:

$$\varepsilon_1 = \frac{dN_1^{(1)}}{dx_1} u_{1,1}^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx_1} u_{1,2}^{(1)} . \tag{2.17}$$

Tendo em atenção (2.15),

$$\begin{aligned} \frac{dN_1^{(1)}}{dx_1} &= -\frac{1}{L^{(1)}} \\ \frac{dN_2^{(1)}}{dx_1} &= \frac{1}{L^{(1)}} \end{aligned} \tag{2.18}$$

pelo que (2.17) se pode converter na relação seguinte

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{1}{L^{(1)}} u_{1,1}^{(1)} + \frac{1}{L^{(1)}} u_{1,2}^{(1)} \\ &= \frac{u_{1,2}^{(1)} - u_{1,1}^{(1)}}{L^{(1)}} \end{aligned} \tag{2.19}$$

revelando que a extensão é constante no elemento.

Na Figura 2.5 representa-se o diagrama de corpo livre da barra representada na Figura 2.3.

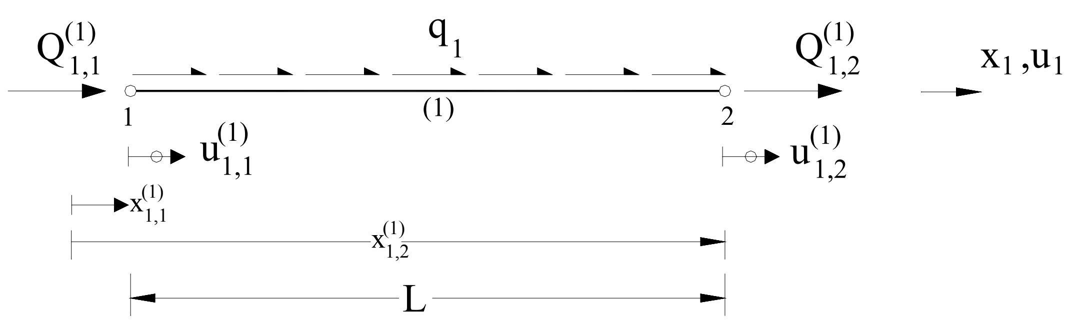


Figura 2.5 - Diagrama de corpo livre de um elemento de barra biarticulada de dois nós.

A aplicação do *PTV* a esta barra conduz à seguinte relação:

$$\int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}} \delta\varepsilon_1 \, E \, A \, \varepsilon_1 \, dx_1 = \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \delta u_1 \, q_1 \, dx_1 + \delta u_{1,1}^{(1)} Q_{1,1}^{(1)} + \delta u_{1,2}^{(1)} Q_{1,2}^{(1)} \tag{2.20}$$

em que $\delta u_{1,1}^{(1)}$ e $\delta u_{1,2}^{(1)}$ são os deslocamentos virtuais dos nós 1 e 2 e $Q_{1,1}^{(1)}$ e $Q_{1,2}^{(1)}$ são as forças aplicadas nos nós 1 (reacção) e 2 (acção). Tendo em atenção (2.13),

$$\delta u_1 = N_1^{(1)} \delta u_{1,1}^{(1)} + N_2^{(1)} \delta u_{1,2}^{(1)} \tag{2.21}$$

e considerando (2.16) e (2.17) obtém-se,

$$\delta\varepsilon_1 = \frac{d}{dx_1}\left(\delta u_1\right) = \frac{dN_1^{(1)}}{dx_1} \delta u_{1,1}^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx_1} \delta u_{1,2}^{(1)} . \tag{2.22}$$

Substituindo (2.21) e (2.22) em (2.20) obtém-se:

$$\begin{aligned}&\int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}}\left[\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}\delta u_{1,1}^{(1)}+\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}\delta u_{1,2}^{(1)}\right](E\,A)\left[\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}u_{1,1}^{(1)}+\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}u_{1,2}^{(1)}\right]dx_1=\\&\int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}}\left[N_1^{(1)}\,\delta u_{1,1}^{(1)}+N_2^{(1)}\,\delta u_{1,2}^{(1)}\right]q_1\,dx_1+\delta u_{1,1}^{(1)}\,Q_{1,1}^{(1)}+\delta u_{1,2}^{(1)}\,Q_{1,2}^{(1)}\end{aligned}\tag{2.23}$$

que pode ser reordenada da forma seguinte,

$$\begin{aligned}&\delta u_{1,1}^{(1)}\left[\int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}}\left(\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}(E\,A)\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}u_{1,1}^{(1)}+\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}(E\,A)\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}u_{1,2}^{(1)}\right)dx_1-\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}}N_1^{(1)}\,q_1\,dx_1-Q_{1,1}^{(1)}\right]+\\&\delta u_{1,2}^{(1)}\left[\int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}}\left(\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}(E\,A)\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}u_{1,1}^{(1)}+\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}(E\,A)\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}u_{1,2}^{(1)}\right)dx_1-\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}}N_2^{(1)}\,q_1\,dx_1-Q_{1,2}^{(1)}\right]=0\end{aligned}\quad .(2.24)$$

Como os deslocamentos virtuais $\delta u_{1,1}^{(1)}$ e $\delta u_{1,2}^{(1)}$ são arbitrários, o cumprimento de (2.24) para qualquer valor de $\delta u_{1,1}^{(1)}$ e $\delta u_{1,2}^{(1)}$ obriga a que as expressões entre parêntesis rectos em (2.24) devam ser nulas, isto é,

$$\begin{aligned}&\int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}}\left(\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}(E\,A)\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}u_{1,1}^{(1)}+\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}(E\,A)\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}u_{1,2}^{(1)}\right)dx_1=\int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}}N_1^{(1)}\,q_1\,dx_1+Q_{1,1}^{(1)}\\&\int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}}\left(\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}(E\,A)\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}u_{1,1}^{(1)}+\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}(E\,A)\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}u_{1,2}^{(1)}\right)dx_1=\int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}}N_2^{(1)}\,q_1\,dx_1+Q_{1,2}^{(1)}\end{aligned}\quad .\tag{2.25}$$

Em forma matricial as equações (2.25) assumem a seguinte configuração:

$$\left(\int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}}\begin{bmatrix}\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}(E\,A)\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1} & \frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}(E\,A)\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}\\ \frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}(E\,A)\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1} & \frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}(E\,A)\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}\end{bmatrix}dx\right)\begin{Bmatrix}u_{1,1}^{(1)}\\u_{1,2}^{(1)}\end{Bmatrix}=\int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}}\begin{bmatrix}N_1^{(1)}\\N_2^{(1)}\end{bmatrix}q_1\,dx_1+\begin{bmatrix}Q_{1,1}^{(1)}\\Q_{1,2}^{(1)}\end{bmatrix}\tag{2.26}$$

ou, de forma mais condensada,

$$\underline{k}^{(1)}\,\underline{U}^{(1)}=\underline{Q}_{\ell}^{(1)}+\underline{Q}_{P}^{(1)}\tag{2.27a}$$

ou ainda,

$$\underline{k}^{(1)}\,\underline{U}^{(1)}=\underline{Q}^{(1)}\tag{2.27b}$$

em que $\underline{K}^{(1)}$ é matriz de rigidez da barra 1 e,

$$\underline{U}^{(1)} = \left[u_{1,1}^{(1)} \quad u_{1,2}^{(1)}\right]^T \; ; \; \underline{Q}_{\ell}^{(1)} = \int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}} \left[N_1^{(1)} \quad N_2^{(1)}\right]^T q_1 \, dx_1 \; ; \; \underline{Q}_P^{(1)} = \left[Q_{1,1}^{(1)} \quad Q_{1,2}^{(1)}\right]^T \tag{2.28}$$

são, respectivamente, o vector dos deslocamentos dos pontos nodais da barra, o vector das forças nodais equivalentes a forças distribuídas por unidade de comprimento da barra e o vector das forças aplicadas directamente nos nós da barra.

O coeficiente da matriz de rigidez associado aos nós genéticos i e j, $k_{ij}^{(1)}$, obtém-se por intermédio da seguinte relação,

$$k_{ij}^{(1)} = \int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}} \frac{dN_i^{(1)}}{dx_1} (E\,A) \frac{dN_j^{(1)}}{dx_1} \, dx_1 \, . \tag{2.29}$$

Por sua vez, a força no nó i correspondente às forças distribuídas por unidade de comprimento ao longo da barra, q_1, obtém-se da seguinte forma,

$$Q_{\ell,i}^{(1)} = \int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}} N_i^{(1)} q_1 \, dx_1 \, . \tag{2.30}$$

Se o módulo de elasticidade e a secção da barra forem constantes ao longo da barra, o cálculo dos integrais de (2.26) conduz às relações seguintes,

$$\underline{k}^{(1)} = \left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \underline{Q}_{\ell}^{(1)} = \frac{(q_1 L)^{(1)}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

que são coincidentes com as obtidas na tradicional teoria das estruturas (Barros *et al.* 1996), dado que em ambas as teorias se admite uma distribuição linear de deslocamentos no elemento.

Como a estrutura em análise é constituida por um único elemento, a numeração local dos nós das barras coincide com a numeração global, tal como se representa na Figura 2.6. Assim, $u_{1,1}^{(1)}=u_{1,1}$ e $u_{1,2}^{(1)}=u_{1,2}$ pelo que o vector dos deslocamentos incógnita da estrutura coincide com os deslocamentos dos nós da barra.

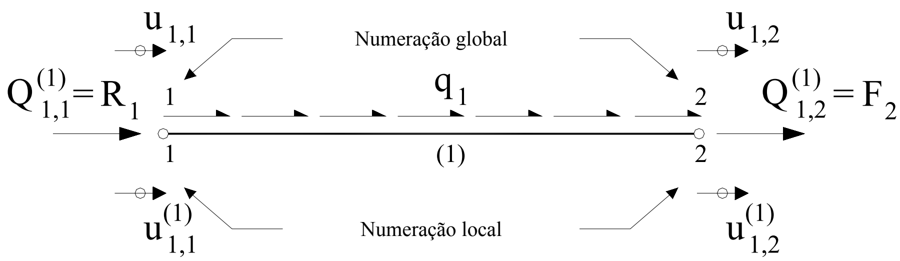


Figura 2.6 - Numeração local versus global.

Pela mesma razão a matriz de rigidez da estrutura coincide com a matriz de rigidez do elemento $\left(\underline{K}^{(E)} = \underline{k}^{(1)}\right)$ e o vector das forças nodais equivalentes às acções que actuam na estrutura coincide com o vector das forças nodais equivalentes às acções que actuam na barra $\left(\underline{Q}^{(E)}_{\ell} = \underline{Q}^{(1)}_{\ell}\right)$, pelo que (2.27) coincide com a relação seguinte,

$$\underline{K}^{(E)}\,\underline{U}^{(E)} = \underline{Q}^{(E)} \tag{2.32a}$$

ou

$$\frac{E\,A}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1 L}{2} & + & R_1 \\ \dfrac{q_1 L}{2} & + & F_2 \end{bmatrix} \tag{2.32b}$$

em que $\underline{Q}^{(1)}_{1} = R_1$ é a reacção no nó 1 e $\underline{Q}^{(1)}_{2} = F_2$ é a força que actua no nó 2.

Dado que o nó 1 não sofre deslocamentos, o sistema (2.32) tem duas incógnitas, o deslocamento do nó 2, $u_{1,2}$, e a reacção no nó 1, R_1. Resolvendo (2.32b) obtém-se

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \frac{L}{E\,A}\left(F_2 + \frac{q_1 L}{2}\right) \\ R_1 &= -\left(F_2 + q_1 L\right) \end{aligned} \quad . \tag{2.33}$$

Para determinar as extensões e as tensões/esforços numa barra da estrutura é necessário obter os deslocamentos dos nós dessa barra, a partir dos deslocamentos nos nós da estrutura, calculados no passo anterior. No presente exemplo,

$$u^{(1)}_{1,1} = u_{1,1} = 0 \;\; ; \;\; u^{(1)}_{1,2} = u_{1,2} = \frac{L}{E\,A}\left(F_2 + \frac{q_1 L}{2}\right) \tag{2.34}$$

que substituídos em (2.19) determina a extensão na barra (note-se que $L = L^{(1)}$),

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{L^{(1)}}0 + \frac{1}{L^{(1)}}\frac{L}{E\,A}\left(F_2 + \frac{q_1\,L}{2}\right) = \frac{F_2 \quad + \quad \frac{q_1\,L}{2}}{E\,A}. \qquad (2.35)$$

O esforço axial obtém-se pela aplicação da lei Hooke,

$$N^{(1)} = (E\,A)^{(1)}\,\varepsilon_1^{(1)} = F_2 + \frac{q_1 L}{2}. \qquad (2.36)$$

A solução exacta para este problema é a seguinte,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{E\,A}\left[-\frac{q x_1^2}{2} + (F_2 + q_1 L)\,x_1\right] \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{E\,A}\left[\left(F_2 + q_1(L - x_1)\right)\right] \end{aligned}. \qquad (2.37)$$

Na Figura 2.7 os resultados obtidos com a formulação exacta e com a formulação aproximada do *MEF* são comparados para o caso de uma barra de secção constante, submetida a forças uniformemente distribuídas ao longo do eixo da barra e discretizadas por um elemento de barra de dois nós. Da análise desta figura constata-se que os deslocamentos nas extremidades da barra (nos nós) são coincidentes nas duas formulações. Contudo, no interior do elemento as duas formulações conduzem a resultados diferentes, dado que, com o *MEF* e com um único elemento a discretizar a barra obtém-se uma distribuição linear de deslocamentos no interior do elemento enquanto que, com a formulação exacta, o campo de deslocamentos define-se por meio de um polinómio de segundo grau.

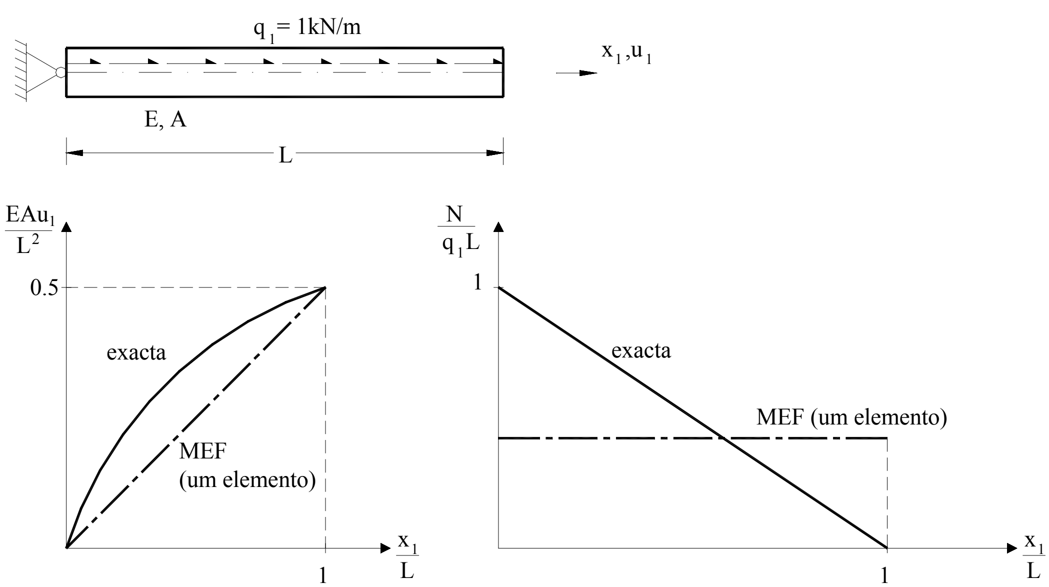


Figura 2.7 - Barra de secção constante submetida a forças uniformemente distribuídas ao longo do eixo da barra. Solução exacta e aproximada utilizando um elemento de barra de dois nós.

2.4 - Barra biarticulada de secção constante. Discretização em dois elementos lineares.

A barra da Figura 2.3 vais ser discretizada por dois elementos de dois nós, tal como se representa na Figura 2.8. Nesta Figura indica-se ainda a numeração local e global dos nós da estrutura e representa-se as funções de forma dos elementos.

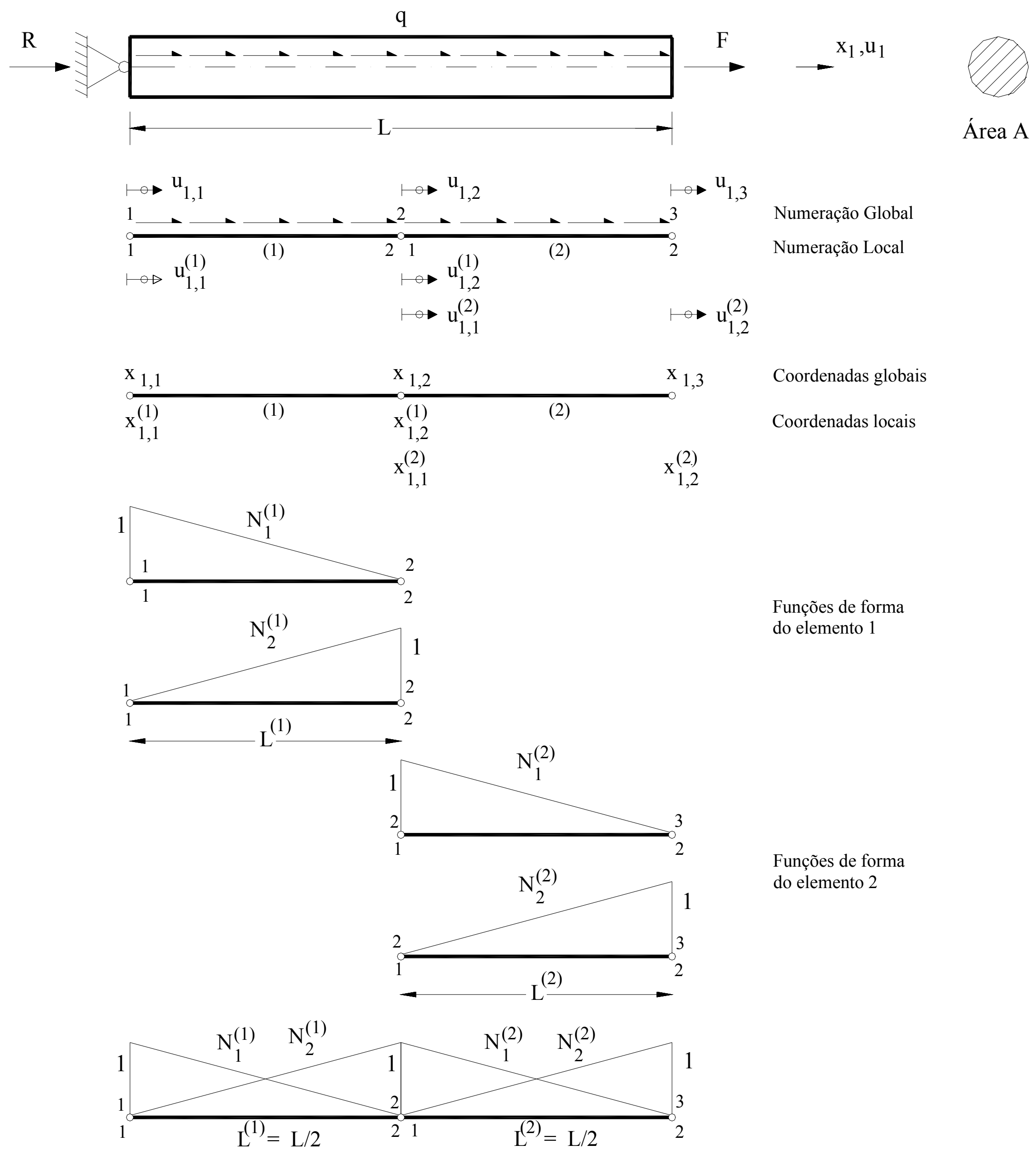


Figura 2.8 - Barra de secção constante submetida a forças distribuídas uniformemente ao longo do seu eixo, e discretizada por dois elementos finitos de dois nós.

Os deslocamento no interior de cada elemento obtém-se por intermédio das equações seguintes, *Elemento 1*

$$u_1^{(1)}(x_1) = N_1^{(1)}(x_1)u_{1,1}^{(1)} + N_2^{(1)}(x_1)u_{1,2}^{(1)} \tag{2.38a}$$

Elemento 2

$$u_1^{(2)}(x_1) = N_1^{(2)}(x_1)u_{1,1}^{(2)} + N_2^{(2)}(x_1)u_{1,2}^{(2)} \tag{2.38b}$$

em que as funções de forma representam-se por funções iguais às determinadas na secção 2.3, pelo que,

Elemento 1

$$N_1^{(1)} = \frac{x_{1,2}^{(1)} - x_1}{x_{1,2}^{(1)} - x_{1,1}^{(1)}} \tag{2.39a}$$

$$N_2^{(1)}=\frac{x_1 - x_{1,1}^{(1)}}{x_{1,2}^{(1)} - x_{1,1}^{(1)}} \tag{2.39b}$$

Elemento 2

$$N_1^{(2)} = \frac{x_{1,2}^{(2)} - x_1}{x_{1,2}^{(2)} - x_{1,1}^{(2)}} \tag{2.39c}$$

$$N_2^{(2)} = \frac{x_1 - x_{1,1}^{(2)}}{x_{1,2}^{(2)} - x_{1,1}^{(2)}}\,. \tag{2.39d}$$

As derivadas das funções de forma tomarão a configuração seguinte,

Elemento 1

$$\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1} = -\frac{1}{L^{(1)}} \tag{2.40a}$$

$$\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1} = \frac{1}{L^{(1)}} \tag{2.40b}$$

Elemento 2

$$\frac{dN_1^{(2)}}{dx_1} = -\frac{1}{L^{(2)}} \tag{2.40c}$$

$$\frac{dN_2^{(2)}}{dx_1} = \frac{1}{L^{(2)}} . \tag{2.40d}$$

Assim, a extensão num ponto qualquer de cada elemento obtém-se por intermédio das relações seguintes

Elemento 1

$$\varepsilon_1^{(1)} = \frac{du_1^{(1)}}{dx_1} = \frac{dN_1^{(1)}}{dx_1} u_{1,1}^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx_1} u_{1,2}^{(1)} \tag{2.41a}$$

Elemento 2

$$\varepsilon_1^{(2)} = \frac{du_1^{(2)}}{dx_1} = \frac{dN_1^{(2)}}{dx_1} u_{1,1}^{(2)} + \frac{dN_2^{(2)}}{dx_1} u_{1,2}^{(2)} . \tag{2.41b}$$

Desenvolvendo procedimentos similares aos efectuados na secção 2.3 obtém-se, para cada barra, as seguintes equações de equilíbrio:

$$\underline{k}^{(1)} \underline{U}^{(1)} = \underline{Q}_\ell^{(1)} + \underline{Q}_P^{(1)} \text{ (barra 1)} \tag{2.42a}$$

$$\underline{k}^{(2)} \underline{U}^{(2)} = \underline{Q}_\ell^{(2)} + \underline{Q}_P^{(2)} \text{ (barra 2)} \tag{2.42b}$$

em que

$$\underline{k}^{(1)} = \int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}} (E\,A) \begin{bmatrix} \frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1} & \frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1} \\ \frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1} & \frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1} \end{bmatrix} dx_1 \tag{2.43a}$$

$$\underline{U}^{(1)} = \left[u_{1,1}^{(1)} \quad u_{1,2}^{(1)} \right]^T \tag{2.43b}$$

$$\underline{Q}_\ell^{(1)} = \int_{x_{1,1}^{(1)}}^{x_{1,2}^{(1)}} \left[N_1^{(1)} \quad N_2^{(1)} \right]^T q_1^{(1)}\, dx_1 \tag{2.43c}$$

$$\underline{Q}_P^{(1)} = \left[Q_{1,1}^{(1)} \quad Q_{1,2}^{(1)} \right]^T \tag{2.43d}$$

$$\underline{k}^{(2)} = \int_{x_{1,1}^{(2)}}^{x_{1,2}^{(2)}} (E\,A) \begin{bmatrix} \frac{dN_1^{(2)}}{dx_1}\frac{dN_1^{(2)}}{dx_1} & \frac{dN_1^{(2)}}{dx_1}\frac{dN_2^{(2)}}{dx_1} \\ \frac{dN_2^{(2)}}{dx_1}\frac{dN_1^{(2)}}{dx_1} & \frac{dN_2^{(2)}}{dx_1}\frac{dN_2^{(2)}}{dx_1} \end{bmatrix} dx_1 \tag{2.43e}$$

$$\underline{U}^{(2)} = \left[u_{1,1}^{(2)} \quad u_{1,2}^{(2)}\right]^T \tag{2.43f}$$

$$\underline{Q}_{\ell}^{(2)} = \int_{x_{1,1}^{(2)}}^{x_{1,2}^{(2)}} \left[N_1^{(2)} \quad N_2^{(2)}\right]^T q_1^{(2)}\, dx_1 \tag{2.43g}$$

$$\underline{Q}_P^{(2)} = \left[Q_{1,1}^{(2)} \quad Q_{1,2}^{(2)}\right]^T \tag{2.43h}$$

são, respectivamente, as matrizes de rigidez, os vectores dos deslocamentos dos nós, os vectores das forças nodais equivalentes às forças distribuídas e os vectores das forças aplicadas nos nós dos elementos 1 e 2. As forças distribuídas nos elementos 1 e 2 designaram-se por $q_1^{(1)}$ e $q_1^{(2)}$, respectivamente.

Considere-se que as barras têm secção constante de área A e módulo de elasticidade E e estão submetidas a carga uniformemente distribuída, q. Resolvendo os integrais que surgem em (2.43) e substituindo o resultado em (2.42) obtém-se,

Elemento 1

$$\left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1}^{(1)} \\ u_{1,2}^{(1)} \end{bmatrix} = \left(\frac{q_1\,L}{2}\right)^{(1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{1,1}^{(1)} \\ Q_{1,2}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{2.44a}$$

Elemento 2

$$\left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1}^{(2)} \\ u_{1,2}^{(2)} \end{bmatrix} = \left(\frac{q_1\,L}{2}\right)^{(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{1,1}^{(2)} \\ Q_{1,2}^{(2)} \end{bmatrix}. \tag{2.44b}$$

Na tabela 2.1 apresenta-se a correspondência entre as variáveis locais e as variáveis globais.

Quadro 2.1 - Variáveis locais e globais do exemplo da Figura 2.8.

Elementos	Nós		Coordenadas		Deslocamento	
	local	global	local	global	local	global
1	1	1	$x_{1,1}^{(1)}$	$x_{1,1}$	$u_{1,1}^{(1)}$	$u_{1,1}$
	2	2	$x_{1,2}^{(1)}$	$x_{1,2}$	$u_{1,2}^{(1)}$	$u_{1,2}$
	1	2	$x_{1,1}^{(2)}$	$x_{1,2}$	$u_{1,1}^{(2)}$	$u_{1,2}$
2	2	3	$x_{1,2}^{(2)}$	$x_{1,3}$	$u_{1,2}^{(2)}$	$u_{1,3}$

Efectuando nas expressões (2.44) a correspondência estabelecida no Quadro 2.1 e tendo em conta as seguintes equações de equilíbrio nos pontos nodais de estrutura,

$$\begin{aligned} &\text{Nó 1: } Q_1^{(1)} = R \\ &\text{Nó 2: } Q_2^{(1)} + Q_1^{(2)} = 0 \\ &\text{Nó 3: } Q_2^{(2)} = F \end{aligned} \tag{2.45}$$

obtém-se,

Nó 1:

$$\left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{bmatrix} - \left(\frac{q_1\,L}{2}\right)^{(1)} = R \tag{2.46a}$$

Nó 2:

$$\left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(1)} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{bmatrix} - \left(\frac{q_1\,L}{2}\right)^{(1)} + \left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{1,3} \end{bmatrix} - \left(\frac{q_1\,L}{2}\right)^{(2)} = 0 \tag{2.46b}$$

Nó 3:

$$\left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(2)} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{1,3} \end{bmatrix} - \left(\frac{q_1\,L}{2}\right)^{(2)} = F \tag{2.46c}$$

Organizando (2.46) em forma matricial obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(1)} & -\left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(1)} & 0 \\ -\left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(1)} & \left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(1)} + \left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(2)} & -\left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(2)} \\ 0 & -\left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(2)} & \left(\frac{E\,A}{L}\right)^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{q_1\,L}{2}\right)^{(1)} + R \\ \left(\frac{q_1\,L}{2}\right)^{(1)} + \left(\frac{q_1\,L}{2}\right)^{(2)} \\ \left(\frac{q_1\,L}{2}\right)^{(2)} + F \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

que constitui o sistema de equações de equilíbrio da estrutura, que em notação mais condensada se define por:

$$\underline{K}^{(E)}\,\underline{U}^{(E)} = \underline{Q}^{(E)} \quad . \tag{2.48}$$

O sistema de equações (2.47) poderia ter sido obtido pela técnica de espalhamento. Assim, após se ter calculado a matriz de rigidez e o vector das forças nodais equivalentes de cada uma das barras que constituem a estrutura, proceder-se-ia ao seu espalhamento na matriz de rigidez e no vector das forças nodais equivalentes da estrutura. Este procedimento está esquematicamente representado na Figura 2.9. Assim, como a barra 1 tem como pontos nodais os nós 1 e 2, a sua matriz de rigidez é espalhada nas células definidas por estes nós. Por sua vez, a barra 2 é caracterizada pelos nós 2 e 3, pelo que a sua matriz de rigidez fica espalhada nas células definidas por estes nós.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{nó 1} & \text{nó 2} & \text{nó 3} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{nó 1} \\ \\ \text{nó 2} \\ \\ \text{nó 3} \end{array} &
\underbrace{\begin{bmatrix}
\left(\frac{EA}{L}\right)^{(1)} & -\left(\frac{EA}{L}\right)^{(1)} & 0 \\
-\left(\frac{EA}{L}\right)^{(1)} & \left(\frac{EA}{L}\right)^{(1)} + \left(\frac{EA}{L}\right)^{(2)} & -\left(\frac{EA}{L}\right)^{(2)} \\
0 & -\left(\frac{EA}{L}\right)^{(2)} & \left(\frac{EA}{L}\right)^{(2)}
\end{bmatrix}}_{\underline{K}^{(E)}}
\underbrace{\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(E)}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
\left(\frac{q_1 L}{2}\right)^{(1)} \\
\left(\frac{q_1 L}{2}\right)^{(1)} + \left(\frac{q_1 L}{2}\right)^{(2)} \\
\left(\frac{q_1 L}{2}\right)^{(2)}
\end{bmatrix}}_{\underline{Q}^{(E)}}
\end{array}
$$

Figura 2.9 - Espalhamento das matrizes de rigidez e dos vectores solicitação das barras da estrutura da figura 2.8, na matriz de rigidez e no vector solicitação da estrutura.

Dado que $q_1^{(1)}=q_1^{(2)}=q_1$, $L^{(1)}=L^{(2)}=L/2$ e $u_{1,1}=0$ a resolução de (2.47) conduz aos seguintes resultados,

$$
\begin{aligned}
&u_{1,1} = 0 \ ; \ u_{1,2} = \frac{L}{2EA}\left(F + \frac{3q_1 L}{4}\right) \ ; \ u_{1,3} = \frac{L}{2EA}\left(2F + q_1 L\right). \\
&R = -\left(F + q_1 L\right)
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

Conhecidos os deslocamentos e tendo em conta a correspondência entre os deslocamentos locais e globais definida no Quadro 2.1, pode-se obter as extensões e tensões/esforços nas barras da forma seguinte (ver equações (2.40) e (2.41),

Elemento 1

$$
\varepsilon_1^{(1)} = \frac{dN_1^{(1)}}{dx_1} u_{1,1}^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx_1} u_{1,2}^{(1)} = -\frac{1}{L^{(1)}} u_{1,1} + \frac{1}{L^{(1)}} u_{1,2} = \frac{F + \frac{3q_1 L}{4}}{EA}
\tag{2.50a}
$$

$$
\begin{aligned}
N^{(1)} &= (EA)^{(1)} \varepsilon_1^{(1)} \\
&= F + \frac{3q_1 L}{4}
\end{aligned}
\tag{2.50b}
$$

Elemento 2

$$\varepsilon_1^{(2)} = \frac{dN_1^{(2)}}{dx_1} u_{1,1}^{(2)} + \frac{dN_2^{(2)}}{dx_1} u_{1,2}^{(2)} = -\frac{1}{L^{(2)}} u_{1,2} + \frac{1}{L^{(2)}} u_{1,3} = \frac{F + \frac{q_1 L}{4}}{E A} \tag{2.50c}$$

$$\begin{aligned} N^{(2)} &= (E A)^{(2)} \varepsilon_1^{(2)} \\ &= F + \frac{q_1 L}{4} \end{aligned} . \tag{2.50d}$$

Na figura 2.10 os resultados obtidos com a formulação exacta e com a formulação aproximada do *MEF* são comparados para o caso em que a barra é discretizada por dois elementos de barra biarticulada de dois nós. Tal como no caso da barra discretizada por um elemento de barra de dois nós (ver Figura 2.7), constata-se que as duas formulações (exacta e aproximada) conduzem aos mesmos resultados nos pontos nodais. Entre os nós os resultados obtidos com o *MEF* não coincidem com os obtidos com a formulação exacta. Contudo, os resultados são agora mais próximos dos exactos do que os obtidos com a discretização com um único elemento. Os esforços também se aproximam mais dos exactos, mas os erros são ainda significativos, maiores que os obtidos nos deslocamentos. Pode-se afirmar que os erros nas extensões e tensões/esforços são maiores que os erros nos deslocamentos dado que as extensões e tensões/esforços obtêm-se por derivação do campo de deslocamentos, que é uma função aproximada do campo de deslocamentos reais. Pode-se concluir ainda que o refinamento da malha, isto é, uma discretização da estrutura por intermédio de um maior número de elementos proporciona resultados mais próximos dos exactos.

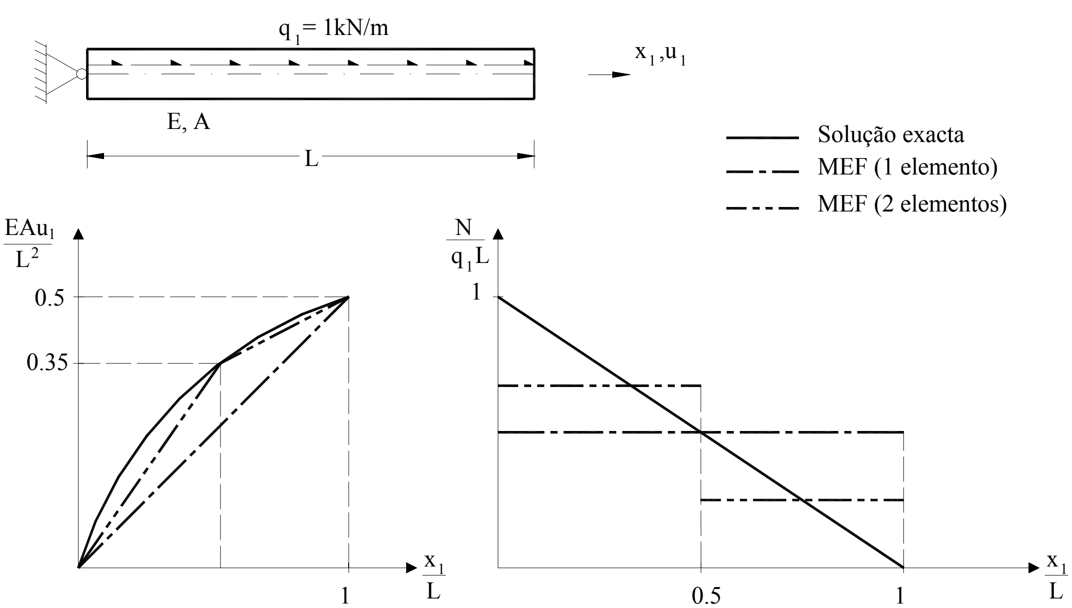


Figura 2.10 - Barra de secção constante submetida a forças uniformemente distribuídas ao longo do eixo da barra. Solução exacta e aproximada utilizando dois elementos finitos de dois nós.

2.5 - Generalização da solução com vários elementos de dois nós.

Considere-se agora que a barra da Figura 2.3 é discretizada em n elementos finitos de dois nós. Neste caso, o estabelecimento do sistema de equações de equilíbrio da estrutura passa pelo cálculo da matriz de rigidez de cada elemento de barra,

$$\underline{k}^{(e)} = \int_{x_{1,1}^{(e)}}^{x_{1,2}^{(e)}} (E\,A)^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{dN_1^{(e)}}{dx_1}\frac{dN_1^{(e)}}{dx_1} & \frac{dN_1^{(e)}}{dx_1}\frac{dN_2^{(e)}}{dx_1} \\ \frac{dN_2^{(e)}}{dx_1}\frac{dN_1^{(e)}}{dx_1} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx_1}\frac{dN_2^{(e)}}{dx_1} \end{bmatrix} dx_1 \, , \tag{2.51}$$

pelo cálculo do vector solicitação das forças nodais equivalentes à acção actuante em cada elemento finito,

$$\underline{Q}_\ell^{(e)} = \int_{x_{1,1}^{(e)}}^{x_{1,2}^{(e)}} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \end{bmatrix} q_1^{(e)}\, dx_1 \, , \tag{2.52}$$

pelo espalhamento de $\underline{k}^{(e)}$ na matriz de rigidez da estrutura, $\underline{K}^{(E)}$, e pelo espalhamento de $\underline{Q}^{(e)}$ no vector solicitação da estrutura, $\underline{Q}^{(E)}$. A este último haverá que adicionar as forças (de acção e reacção) directamente aplicadas nos pontos nodais da estrutura. Para um determinado elemento, as funções de forma e correspondentes derivadas obtêm-se a partir das equações seguintes

$$N_1^{(e)} = \frac{x_{1,2}^{(e)} - x_1^{(e)}}{x_{1,2}^{(e)} - x_{1,1}^{(e)}} \;\; ; \;\; N_2^{(e)} = \frac{x_1^{(e)} - x_{1,1}^{(e)}}{x_{1,2}^{(e)} - x_{1,1}^{(e)}} \tag{2.53a}$$

$$\frac{dN_1^{(e)}}{dx_1} = -\frac{1}{L^{(e)}} \;\; ; \;\; \frac{dN_2^{(e)}}{dx_1} = \frac{1}{L^{(e)}} \, . \tag{2.53b}$$

Se EA for constante ao longo da barra, (2.51) e (2.52) podem ser calculados utilizando-se as relações (2.53) obtendo-se,

$$\underline{k}^{(e)} = \left[\frac{E\,A}{L}\right]^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \underline{Q}_\ell^{(e)} = \left[\frac{q_1\,L}{2}\right]^{(e)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

ou

$$\underline{k}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \underline{Q}_\ell^{(e)} = \begin{bmatrix} Q_{1,1}^{(e)} \\ Q_{1,2}^{(e)} \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

em que $k_{ij}^{(e)}$ é a força aplicada no nó i que impede este nó de se deslocar quando ao nó j é aplicado um deslocamento unitário, $u_{1,j}^{(e)} = 1$.

Efectuando o espalhamento da matriz de rigidez de cada barra na matriz de rigidez da estrutura e o espalhamento do vector solicitação de cada barra no vector solicitação da estrutura obtém-se,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & \ldots & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} + k_{11}^{(3)} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & k_{12}^{(3)} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & k_{22}^{(n-1)} + k_{11}^{(n)} & k_{12}^{(n)} \\ 0 & 0 & \ldots & k_{21}^{(n)} & k_{22}^{(n)} \end{bmatrix}}_{\underline{K}^{(E)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ \ldots \\ \ldots \\ u_{1,n-1} \\ u_{1,n} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(E)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (q_1\,L)^{(1)}/2 + F_1 \\ (q_1\,L)^{(1)}/2 + (q_1\,L)^{(2)}/2 + F_2 \\ (q_1\,L)^{(2)}/2 + (q_1\,L)^{(3)}/2 + F_3 \\ \ldots \\ \ldots \\ (q_1\,L)^{(n-1)}/2 + (q_1\,L)^{(n)}/2 + F_{n-1} \\ (q_1\,L)^{(n)}/2 + F_n \end{bmatrix}}_{\underline{Q}^{(E)}} . \quad (2.56)$$

Note-se que no vector solicitação se incluiu as forças aplicadas directamente nos n pontos nodais da estrutura. Nas posições do vector $\underline{Q}^{(E)}$ correspondentes aos nós da estrutura ligados ao exterior haverá ainda que adicionar as reacções.

2.6 - Exemplos de aplicação

1 º Exercício

Analisar a barra de secção circular variável representada na Figura 2.11 discretizada com:

a) um elemento;
b) dois elementos;
c) três elementos;

de barra biarticulada de dois nós, de secção constante a determinar.

d) Sabendo que segundo a solução exacta o deslocamento na extremidade livre da barra é 1.71828FL/(EA_0), calcule o erro que se obtém com o método dos elementos finitos quando se discretiza a barra com um, dois ou três elementos de barra.

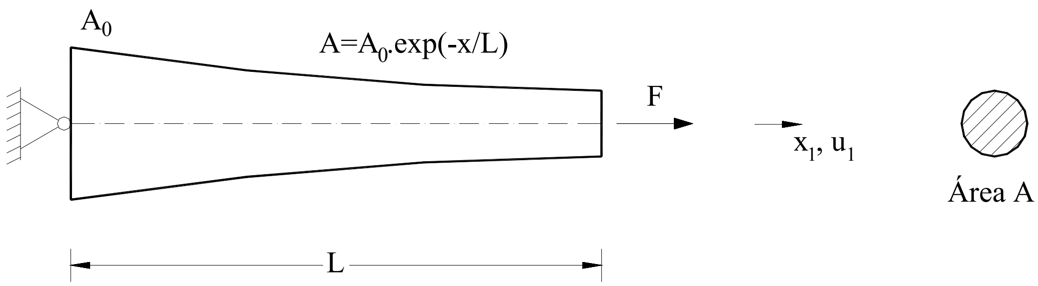


Figura 2.11 - Barra de secção circular variável ao longo do seu comprimento, submetida a uma carga aplicada na sua extremidade livre.

Resolução

a) Estrutura discretizada com um elemento de barra de dois nós

O elemento de barra tem secção constante igual à secção a meio vão da barra real (ver Figura 2.12). Assim,

$$A^{(1)} = A_0 \, e^{-1/2} \tag{2.57}$$

Recorrendo a (2.51) e (2.52), a matriz de rigidez e o vector solicitação do elemento (iguais aos da estrutura) apresentam a seguinte configuração:

$$\underline{k}^{(1)} = \frac{E\,A_0\,e^{-1/2}}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{E\,A_0}{L}0.60653\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.58a}$$

$$\underline{Q}^{(1)} = \begin{bmatrix} R \\ F \end{bmatrix} \tag{2.58b}$$

em que R é a reacção no nó de ligação da barra ao exterior (nó nº 1). Assim, o sistema de equações de equilíbrio é o seguinte:

$$\frac{E\,A_0}{L}0.60653\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ F \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

em que $u_1 = 0$. Resolvendo (2.59) obtém-se os seguintes resultados

$$u_{1,2} = 1.64872\frac{F\,L}{EA_0} \;\; ; \;\; R = -F \, . \tag{2.60}$$

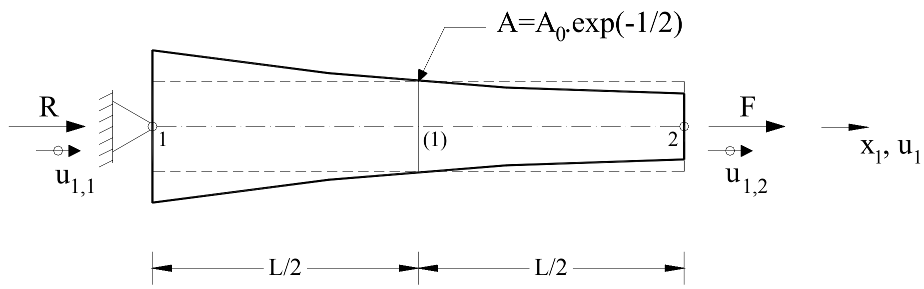


Figura 2.12 - Um elemento de barra de dois nós.

A solução exacta é a seguinte:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0} e^{x_1/L} \tag{2.61a}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{F}{E\,A_0} e^{x_1/L} \tag{2.62}$$

$$u_1(x_1 = L) = \int_0^L \varepsilon_1\, dx_1 = \int_0^L \frac{F}{E\,A_0} e^{x_1/L}\, dx_1 = \frac{F\,L}{E\,A_0}(e-1) = 1.71828 \frac{F\,L}{E\,A_0}. \tag{2.63}$$

Note-se que

$$\int_0^L e^{x_1/L}\, dx_1 = \left[\frac{1}{1/L} e^{x_1/L}\right]_0^L dx_1 = L\,(e-1)\,. \tag{2.64}$$

Comparando (2.60) com (2.63) constata-se a ocorrência de um erro de 4.0% que não é significativo face a ter sido somente utilizado um elemento finito na discretização da estrutura.

b) Estrutura discretizada com dois elementos de barra de dois nós

O elemento 1 tem secção igual à da barra real à distância $x_1 = L/4$, pelo que (ver Figura 2.13),

$$A^{(1)} = A_0\, e^{-1/4}\,. \tag{2.65}$$

O elemento 2 tem secção constante igual à da barra real à distância $x_1 = 3/4\,L$, pelo que (ver Figura 2.13),

$$A^{(2)} = A_0\, e^{-3/4}. \tag{2.66}$$

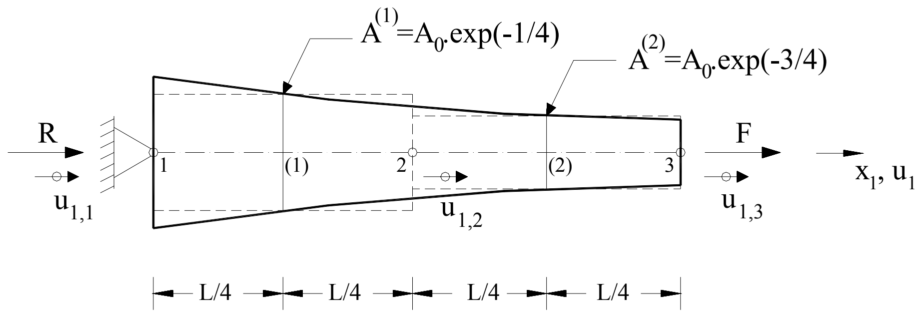


Figura 2.13 - Dois elementos de barra de dois nós.

As equações de equilíbrio de cada elemento são:

Elemento 1:

$$1.5576\frac{E\,A_0}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.67a}$$

Elemento 2:

$$0.9447\frac{E\,A_0}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}. \tag{2.67b}$$

Assemblando estas equações no sistema de equações de equilíbrio da estrutura obtém-se,

$$\frac{E\,A_0}{L}\begin{bmatrix} 1.5576 & -1.5576 & 0 \\ -1.5576 & 1.5576 + 0.9447 & -0.9447 \\ 0 & -0.9447 & 0.9447 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ F \end{bmatrix}. \tag{2.68}$$

Como $u_{1,1} = 0$, a resolução de (2.68) conduz aos resultados seguintes,

$$u_{1,3} = 1.7005\frac{F\,L}{E\,A_0} \;\; ; \;\; u_{1,2} = 0.377541 u_{1,3} \;\; ; \;\; R = -F \tag{2.69}$$

pelo que o erro é de 1,0%.

c) Estrutura discretizada com três elementos de barra de dois nós

Os elementos 1, 2 e 3 têm secção constante igual à da barra real à distância, $x_1 = 1/6\,L$, $x_1 = L/2$ e $x_1 = 5/6\,L$, respectivamente, pelo que (ver Figura 2.14),

$$A^{(1)} = A_0\, e^{-1/6} \;\; ; \;\; A^{(2)} = A_0\, e^{-1/2} \;\; ; \;\; A^{(3)} = A_0\, e^{-5/6} \; . \tag{2.70}$$

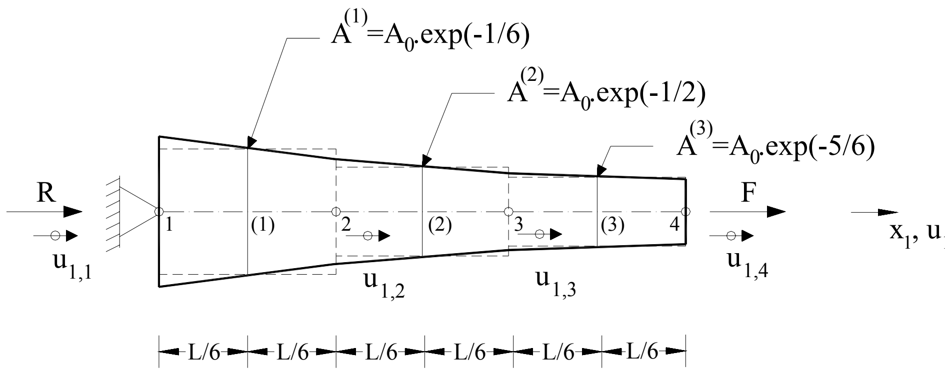


Figura 2.14 - Três elementos de barra de dois nós.

As equações de equilíbrio de cada elemento são,

Elemento 1

$$2.5394\,\frac{E\,A_0}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.71a}$$

Elemento 2

$$1.8196\,\frac{E\,A_0}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.71b}$$

Elemento 3

$$1.3028\,\frac{E\,A_0}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1,3} \\ u_{1,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}. \tag{2.71c}$$

Assemblando estas equações no sistema de equações de equilíbrio da estrutura resulta,

$$\frac{E\,A_0}{L}\begin{bmatrix} 2.5394 & -2.5394 & 0 & 0 \\ -2.5394 & 2.5394 + 1.8196 & -1.8196 & 0 \\ 0 & -1.8196 & 1.8196 + 1.3028 & -1.3028 \\ 0 & 0 & -1.3028 & 1.3028 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{1,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}. \tag{2.72}$$

Como $u_{1,1} = 0$, a resolução de (2.72) conduz aos seguintes resultados:

$$u_{1,4} = 1.71036 \frac{F\,L}{E\,A_0} \;\; ; \;\; u_{1,3} = 0.551561 u_{1,4} \;\; ; \;\; u_{1,2} = 0.230241 u_{1,4} \;\; ; \;\; R = -F \qquad (2.73)$$

pelo que o erro é de 0.5%.

Na Figura 2.15 representa-se a evolução do erro do deslocamento da extremidade livre da barra com o número de elementos que a discretizam.

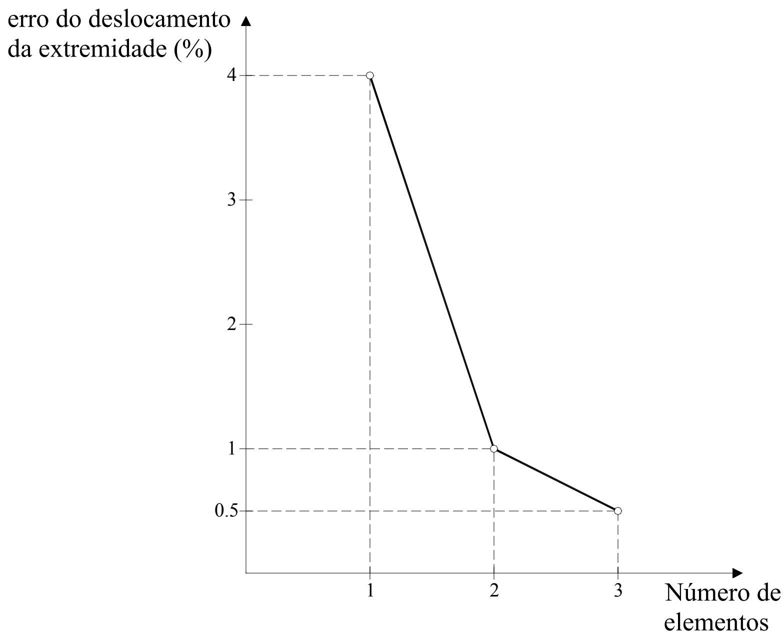


Figura 2.15 - Evolução do erro do deslocamento da extremidade livre da barra da Figura 2.11 com o número de elementos que a discretizam

2 º Exercício

A barra representada na Figura 2.16 é constituída por um perfil HEB 200 de aço FE360 e está submetida ao seu peso próprio e a uma carga aplicada na sua extremidade livre. O peso específico do material da barra (γ) é de 75 kN/m^3 e a área da secção transversal da barra é de 78.08×10^{-4} m^2.

a) Discretize a barra em três elementos de barra biarticulada de dois nós com o mesmo comprimento;
b) Calcule a matriz de rigidez da estrutura;
c) Calcule o vector solicitação da estrutura;
d) Calcule os deslocamentos, reacções, extensões e esforços;
e) Qual o erro máximo nos deslocamentos e nos esforços quando se utiliza a formulação pelo método dos elementos finitos, sabendo que pela formulação exacta a solução é:

$$u_1 = \frac{1}{E\,A}\left[-\frac{p_1\,x_1^2}{2} + (F + p_1\,L)\,x_1\right] \tag{2.74}$$

$$N = F + p_1\,(L - x_1) \tag{2.75}$$

em que p_1 é o peso próprio da barra.

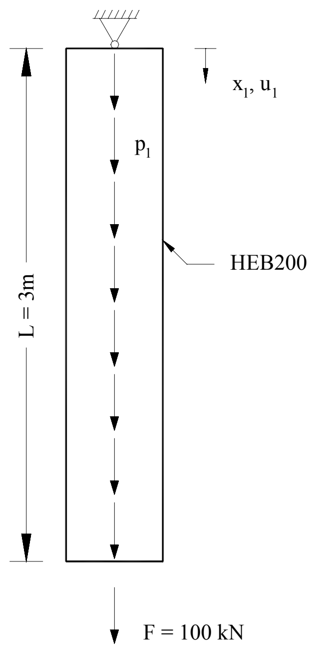


Figura 2.16 – Estrutura em perfil HEB200 de aço Fe360 submetida ao seu peso próprio e a uma força aplicada na sua extremidade livre.

Resolução:

a) Discretização da estrutura em 3 elementos de 2 nós

Na Figura 2.17 apresenta-se a estrutura discretizada em em três elementos de barra biarticulada de dois nós, com o mesmo comprimento.

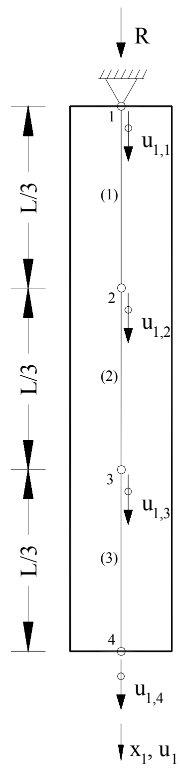


Figura 2.17 – Discretização em três elementos de barra biarticulada de 2 nós.

b) Cálculo da matriz de rigidez da estrutura

A (HEB200) = 78.08×10^{-4} m^2 ; E = 200×10^6 kPa ; $L^{(1)} = L^{(2)} = L^{(3)} = L/3 = 1$ m

$$\underline{k}^{(1)} = \underline{k}^{(2)} = \underline{k}^{(3)} = \frac{E\,A}{L^{(1)}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1561600\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.76)$$

Efectuando o espalhamento das matrizes de rigidez de cada elemento na matriz de rigidez da estrutura obtém-se,

$$\underline{K}^{(E)} = \frac{E\,A}{L^{(e)}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1561600 & -1561600 & 0 & 0 \\ -1561600 & 3123200 & -1561600 & 0 \\ 0 & -1561600 & 3123200 & -1561600 \\ 0 & 0 & -1561600 & 1561600 \end{bmatrix} \qquad (2.77)$$

c) Cálculo do vector solicitação da estrutura

$\gamma = 75$ kN/m^3 ; A = 78.08×10^{-4} m^2 $p_1 = \gamma \times A = 0.5856$ kN/m

$$\underline{Q}^{(1)} = \begin{bmatrix} \dfrac{p_1 L^{(1)}}{2} + R \\ \dfrac{p_1 L^{(1)}}{2} \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{Q}^{(2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{p_1 L^{(2)}}{2} \\ \dfrac{p_1 L^{(2)}}{2} \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{Q}^{(3)} = \begin{bmatrix} \dfrac{p_1 L^{(3)}}{2} \\ \dfrac{p_1 L^{(3)}}{2} + F \end{bmatrix}. \tag{2.78}$$

Efectuando o espalhamento dos vectores solicitação de cada elemento no vector solicitação da estrutura obtém-se,

$$\underline{Q}^{(E)} = \begin{bmatrix} \dfrac{p_1 L^{(1)}}{2} + R \\ \dfrac{p_1 L^{(1)}}{2} + \dfrac{p_1 L^{(2)}}{2} \\ \dfrac{p_1 L^{(2)}}{2} + \dfrac{p_1 L^{(3)}}{2} \\ \dfrac{p_1 L^{(3)}}{2} + F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2928 + R \\ 0.2928 + 0.2928 \\ 0.2928 + 0.2928 \\ 0.2928 + F \end{bmatrix}. \tag{2.79}$$

d) Cálculo dos deslocamentos, reacções, extensões e esforços

Deslocamentos e reacções

Os deslocamentos e as reações obtêm-se por intermédio da resolução do sistema de equações de equilíbrio da estrutura,

$$\underline{K}^{(E)}\,\underline{U}^{(E)} = \underline{Q}^{(E)} \tag{2.80}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1561600 & -1561600 & 0 & 0 \\ -1561600 & 3123200 & -1561600 & 0 \\ 0 & -1561600 & 3123200 & -1561600 \\ 0 & 0 & -1561600 & 1561600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{1,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2928 + R \\ 0.5856 \\ 0.5856 \\ 0.2928 + F \end{bmatrix}. \tag{2.81}$$

Reorganizado este sistema da forma seguinte

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{\ell\ell}^{(E)} & \underline{K}_{\ell f}^{(E)} \\ \underline{K}_{f\ell}^{(E)} & \underline{K}_{ff}^{(E)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{\ell}^{(E)} \\ \underline{U}_{f}^{(E)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{\ell}^{(E)} \\ \underline{Q}_{f}^{(E)} + \underline{R}^{(E)} \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

em que $\underline{K}_{\ell\ell}^{(E)}$ inclui as linhas e as colunas de interacção entre graus de liberdade livres, $\underline{K}_{ff}^{(E)}$ inclui as linhas e as colunas de interacção entre graus de liberdade fixos, $\underline{K}_{\ell f}^{(E)} = \underline{K}_{f\ell}^{(E)T}$ inclui os termos de rigidez relativos à interacção entre os graus de liberdade livres e fixos, $\underline{U}_{\ell}^{(E)}$e

$\underline{U}_f^{(E)}$ são os vectores que incluem os graus de liberdade livres, a determinar, e dos graus de liberdade fixos (de valor nulo ou imposto, como sejam os assentamentos de apoio), conhecidos, respectivamente, $\underline{Q}_\ell^{(E)}$ e $\underline{Q}_f^{(E)}$ são os vectores que englobam as forças nodais equivalentes em correspondência com os graus de liberdade livres e fixos, respectivamente, e $\underline{R}^{(E)}$ é o vector que inclui as reacções nos apoios da estrutura.

Os deslocamentos livres obtém-se da primeira linha de (2.82):

$$\underline{K}_{\ell\ell}^{(E)}\,\underline{U}_\ell^{(E)} = \underline{Q}_\ell^{(E)} - \underline{K}_{\ell f}^{(E)}\,\underline{U}_f^{(E)}. \tag{2.83}$$

Como os graus de liberdade livres são os correspondentes aos nós nº 2, 3 e 4, (2.83) resulta em

$$\begin{bmatrix} 3123200 & -1561600 & 0 \\ -1561600 & 3123200 & -1561600 \\ 0 & -1561600 & 1561600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{1,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5856 \\ 0.5856 \\ 0.2928 \;\; +100 \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

pelo que

$$\begin{cases} u_{1,2} = 6.4974385\times10^{-5}\ m \\ u_{1,3} = 1.2957377\times10^{-4}\ m\,. \\ u_{1,4} = 1.9379816\times10^{-4}\ m \end{cases} \tag{2.85}$$

Da primeira equação de (2.81) obtém-se a reacção R = -101.757 kN.

Extensões

Elemento 1:

$$\varepsilon_1^{(1)} = \frac{du_1^{(1)}}{dx_1} = \frac{dN_1^{(1)}}{dx_1}u_{1,1} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx_1}u_{1,2} \tag{2.86}$$

Elemento 2:

$$\varepsilon_1^{(2)} = \frac{du_1^{(2)}}{dx_1} = \frac{dN_1^{(2)}}{dx_1}u_{1,2} + \frac{dN_2^{(2)}}{dx_1}u_{1,3} \tag{2.87}$$

Elemento 3:

$$\varepsilon_1^{(3)} = \frac{du_1^{3}}{dx_1} = \frac{dN_1^{(3)}}{dx_1}u_{1,3} + \frac{dN_2^{(3)}}{dx_1}u_{1,4} \tag{2.88}$$

em que

$$\frac{dN_1^{(1)}}{dx_1} = \frac{dN_1^{(2)}}{dx_1} = \frac{dN_1^{(3)}}{dx_1} = -\frac{1}{L^{(e)}}$$
$$. \tag{2.89}$$
$$\frac{dN_2^{(1)}}{dx_1} = \frac{dN_2^{(2)}}{dx_1} = \frac{dN_2^{(3)}}{dx_1} = \frac{1}{L^{(e)}}$$

Assim,

$$\begin{cases} \varepsilon_1^{(1)} = 0 + \dfrac{1}{L^{(1)}} 6.4974385\times10^{-5} = 6.4974385\times10^{-5} \\ \\ \varepsilon_1^{(2)} = -\dfrac{1}{L^{(1)}} 6.4974385\times10^{-5} + \dfrac{1}{L^{(2)}} 1.2957377\times10^{-4} = 6.4599385\times10^{-5} \\ \\ \varepsilon_1^{(3)} = -\dfrac{1}{L^{(2)}} 1.2957377\times10^{-4} + \dfrac{1}{L^{(3)}} 1.9379816\times10^{-4} = 6.422439\times10^{-5} \end{cases} \tag{2.90}$$

Tensões

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \tag{2.91}$$

pelo que

$$\begin{cases} \sigma_1^{(1)} = 200\times10^6 \times 6.4974385\times10^{-5} = 12995\ kPa \\ \sigma_1^{(2)} = 200\times10^6 \times 6.4599385\times10^{-5} = 12920\ kPa \\ \sigma_1^{(3)} = 200\times10^6 \times 6.422439\times10^{-5} = 12845\ kPa \end{cases} \tag{2.92}$$

Esforços

$$\overline{\sigma}_1 = N = \sigma_1\, A \tag{2.93}$$

pelo que

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_1^{(1)} = 101.5\ kN \\ \overline{\sigma}_1^{(2)} = 100.9\ kN \\ \overline{\sigma}_1^{(3)} = 100.3\ kN \end{cases} \tag{2.94}$$

e) Erro máximo

$$u_{1,4} = \frac{1}{200\times10^{6} \times 78.08 \times 10^{-4}}\left[-\frac{0.5856\times3^{2}}{2} + (100 + 0.5856 \times 3)\times3\right] = 1.9379816 \times 10^{-4}\, m \qquad (2.95)$$

pelo que o erro é de aproximadamente 0%.

3 º Exercício

A barra representada na Figura 2.18 tem secção circular variável definida pela expressão apresentada na Figura, em que Ao é a área da secção da extremidade livre da barra (x_1 = L) com diâmetro igual a 0.2 m. Esta barra está submetida, para além da acção do seu peso próprio, a uma força concentrada de 50 kN na sua extremidade livre.

a) Discretize a barra em dois elementos de dois nós;
b) Calcule a matriz de rigidez da estrutura;
c) Calcule o vector solicitação da estrutura;
d) Calcule os deslocamentos e a reacção.

Dados: E = 30 GPa, γ = 25 kN/m^3.

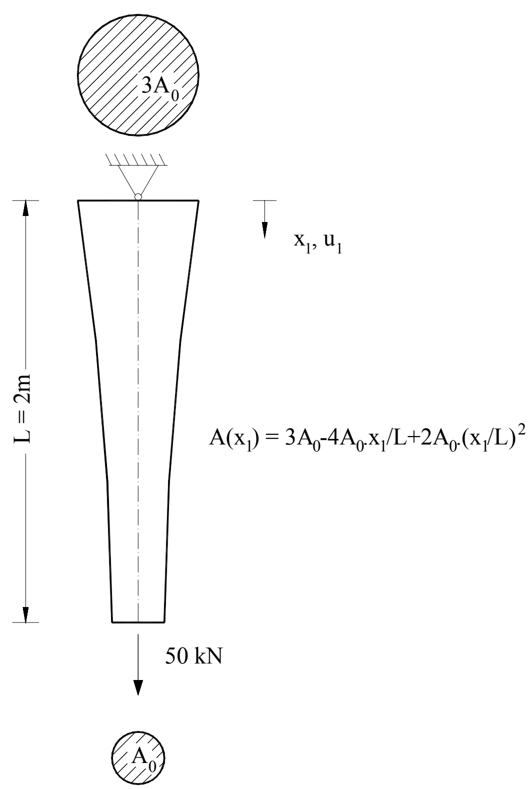


Figura 2.18 - Barra de secção circular variável submetida ao seu peso próprio e a uma força na extremidade livre.

Resolução:

a) Discretização da barra em dois elementos de dois nós (ver Figura 2.19)

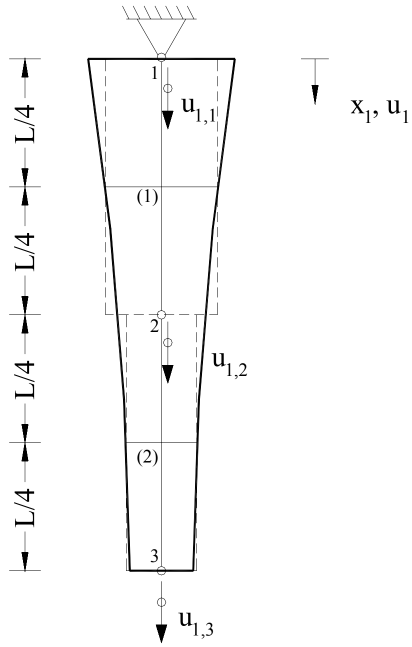


Figura 2.19 - Barra de secção circular variável submetida ao seu peso próprio e a uma força na extremidade.

$$A_0 = \frac{\pi\, 0.2^2}{4} = 0.031416\,\text{m}^2$$

b) Cálculo da matriz de rigidez da estrutura:

Elemento 1

$$\underline{k}^{(1)} = E\ A(x_1)\int_0^{L/2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} & -\frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} \\ -\frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} & \frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} \end{bmatrix} E\ A(x_1)\ dx_1$$

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} & -\frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} \\ -\frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} & \frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} \end{bmatrix} E\int_0^{L/2}\left(3\,A_0 - \frac{4\,A_0\,x_1}{L} + \frac{2\,A_0}{L^2}x_1^2\right)dx_1$$

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} & -\frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} \\ -\frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} & \frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} \end{bmatrix} E\left[3\,A_0\,\frac{L}{2} - \frac{4\,A_0\,L^2/4}{2\,L} + \frac{2\,A_0\,L^3/8}{3\,L^2} - 0\right]$$

$$\underline{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} & -\frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} \\ -\frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} & \frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} \end{bmatrix} E \left(3\,A_0 - A_0 + \frac{A_0}{6} \right)$$

$$\underline{K}^{(1)} = 0.0680678 \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} & -\frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} \\ -\frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} & \frac{1}{\left(L^{(1)}\right)^2} \end{bmatrix} E$$

$$\underline{K}^{(1)} = 0.0680678 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} E$$

Elemento 2

$$\underline{k}^{(2)} = \int_{L/2}^{L} \underline{B}^T\, E\, A(x_1)\, \underline{B}\, dx_1 = \int_{L/2}^{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} & -\frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} \\ -\frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} & \frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} \end{bmatrix} E\, A(x_1)\, dx_1$$

$$\underline{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} & -\frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} \\ -\frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} & \frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} \end{bmatrix} E \int_{L/2}^{L} \left(3\,A_0 - \frac{4\,A_0\,x_1}{L} + \frac{2\,A_0}{L^2}\, x_1^2 \right) dx_1$$

$$\underline{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} & -\frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} \\ -\frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} & \frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} \end{bmatrix} E \left[3\,A_0\,L - \frac{4\,A_0\,L^2}{2\,L} + \frac{2\,A_0\,L^3}{3\,L^2} - 3\,A_0\,\frac{L}{2} + \frac{4\,A_0\,L^2/4}{2\,L} - \frac{2\,A_0\,L^3/8}{3\,L^2} \right]$$

$$\underline{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} & -\frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} \\ -\frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} & \frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} \end{bmatrix} E \left(\frac{7}{6}\, A_0 \right)$$

$$\underline{k}^{(2)} = 0.036652 \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} & -\frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} \\ -\frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} & \frac{1}{\left(L^{(2)}\right)^2} \end{bmatrix} E$$

$$\underline{k}^{(2)} = 0.036652\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} E$$

Efectuando o espalhamento das matrizes de rigidez dos elementos na matriz de rigidez da estrutura obtém-se,

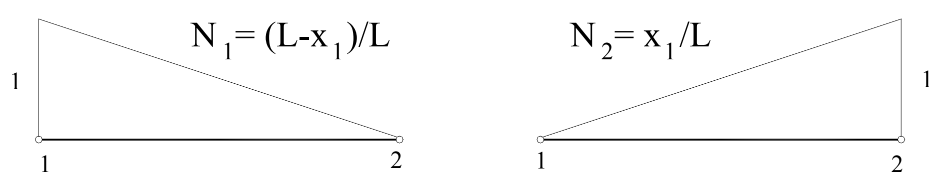
$$\underline{K}^{(E)} = E\begin{bmatrix} 0.0680678 & -0.0680678 & 0 \\ -0.0680678 & 0.1047198 & -0.036652 \\ 0 & -0.036652 & 0.036652 \end{bmatrix}$$

c) Cálculo do vector solicitação da estrutura

Elemento 1:

$$\underline{Q}_{\ell}^{(1)} = \int_0^{L/2} \underline{N}^T q_1 \, dx_1$$

Funções de forma de um elemento de barra de dois nós :



$$\underline{Q}_{\ell}^{(1)} = \int_0^{L/2} \begin{bmatrix} \left(\frac{L-x_1}{L}\right)^{(1)} \\ \left(\frac{x_1}{L}\right)^{(1)} \end{bmatrix} \gamma \, A(x_1) \, dx_1$$

$$\underline{Q}_{\ell}^{(1)} = \gamma \int_0^{L/2} \begin{bmatrix} \left(\frac{L-x_1}{L}\right)^{(1)} \\ \left(\frac{x_1}{L}\right)^{(1)} \end{bmatrix} \left(3\,Ao - \frac{4\,A_0\,x_1}{L} + \frac{2\,A_0\,x_1^2}{L^2}\right) dx_1$$

$$\underline{Q}_{\ell}^{(1)} = \gamma \begin{bmatrix} 0.0379609 \\ 0.0301069 \end{bmatrix}$$

Elemento 2:

$$\underline{Q}_{\ell}^{(2)} = \int_{L/2}^{L} \underline{N}^T q_1 dx_1$$

$$\underline{Q}_{\ell}^{(2)} = \int_{L/2}^{L} \begin{bmatrix} N_1^{(2)} \\ N_2^{(2)} \end{bmatrix} \gamma \, A(x_1)\, dx_1$$

$$\underline{Q}_{\ell}^{(2)} = \gamma \int_{L/2}^{L} \begin{bmatrix} \left(\frac{L - x_1}{L/2}\right)^{(2)} \\ \left(\frac{x_1 - L/2}{L/2}\right)^{(2)} \end{bmatrix} \left(3\,Ao - \frac{4\,A_0\,x_1}{L} + \frac{4\,A_0\,x_1^2}{L^2} \right) dx_1 \Leftrightarrow$$

$$\underline{Q}_{\ell}^{(2)} = \gamma \begin{bmatrix} 0.019635 \\ 0.017018 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\underline{Q}_{\ell}^{(E)} = \gamma \begin{bmatrix} 0.0379609 \\ 0.0497419 \\ 0.017018 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9490 \\ 1.2435 \\ 0.42545 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{Q}_{P}^{(E)} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

d) Cálculo dos deslocamentos e da reacção

$$\underline{K}^{(E)}\,\underline{U}^{(E)} = \underline{Q}_{\ell}^{(E)} + \underline{Q}_{P}^{(E)}$$

$$\begin{bmatrix} 2042034 & -2042034 & 0 \\ -2042034 & 3141594 & -1099560 \\ 0 & -1099560 & 1099560 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9490 \\ 1.2435 \\ 0.42545 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema de equações de equilíbrio obtém-se:

$$\begin{cases} R = -52.618\ kN \\ u_{1,2} = 2.530269\times10^{-5}\ m \\ u_{1,3} = 7.116235\times10^{-5}\ m \end{cases}.$$

2.7 Resumo das etapas de análise de uma estrutura segundo o método dos elementos finitos

Os passos fundamentais que devem ser adoptados na análise de uma estrutura segundo o método dos elementos finitos são os seguintes:

1- Discretizar a estrutura numa malha de elementos finitos ;

2- Calcular a matriz de rigidez e o vector das forças nodais equivalentes para cada elemento finito. Estas entidades são obtidas por intermédio das expressões seguintes,

$$\underline{k}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{B}^T \, \underline{D} \, \underline{B} \, dx_1 \tag{2.96a}$$

$$\underline{Q}_{\ell}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{N}^T \, \underline{q} \, dx_1 \tag{2.96b}$$

em que,

$$\underline{k}_{ij}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{B}_i^T \, \underline{D} \, \underline{B}_j \, dx_1 \tag{2.96c}$$

$$\underline{Q}_{i}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \underline{N}_i^T \, \underline{q} \, dx_1 \tag{2.96d}$$

$$\underline{D} = E\,A \text{ (para o caso das barras biarticuladas).} \tag{2.69e}$$

$$\underline{B} = \left[\frac{dN_1(x_1)}{dx_1} \quad \frac{dN_2(x_1)}{dx_1} \right] \text{ (matriz de deformação).} \tag{2.69f}$$

3- Assemblar as matrizes de rigidez dos elementos na matriz de rigidez da estrutura,

$$\underline{K}^{(E)} \;\; e \rightarrow E \;\; \underline{k}^{(e)} \tag{2.97}$$

em que $e \rightarrow E$ significa assemblar entidades associadas aos elementos na entidade associada à estrutura.

Assemblar os vectores das forças nodais equivalentes ás acções que actuam no elemento, no vector das forças nodais equivalentes da estrutura,

$$\underline{Q}^{(E)} \; e \rightarrow E \; \underline{Q}^{(e)} . \tag{2.98}$$

4- Adicionar a $\underline{Q}^{(E)}$ as forças de acção e reacção que actuam directamente nos pontos nodais;

5- Introduzir as condições de ligação da estrutura ao exterior;

6- Resolução do sistema de equações de equilibrio:

$$\underline{K}^{(E)} \cdot \underline{U}^{(E)} = \underline{Q}^{(E)} \tag{2.99}$$

7- Determinação da tensões/esforços para cada elemento da estrutura,

integração

$$\underline{U}^{(E)} \rightarrow \underline{u}^{(e)} \rightarrow \underline{\varepsilon}^{(e)} \rightarrow \underline{\sigma}^{(e)} \rightarrow \overline{\underline{\sigma}}^{(e)} \qquad (2.100)$$

esforços

Lei de Hooke