4 - TEOREMAS ENERGÉTICOS

4.1 - Introdução

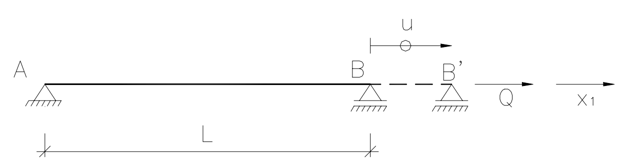
Todos os teoremas energéticos da teoria da elasticidade podem ser directamente deduzidos dos dois seguintes princípios energéticos complementares:

- princípio do trabalho virtual (ou dos deslocamentos virtuais);
- princípio do trabalho virtual complementar (ou das forças virtuais).

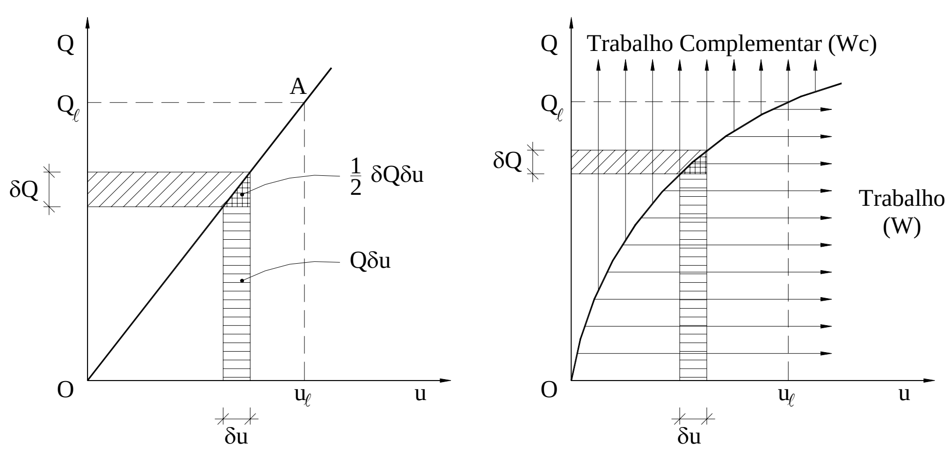
Os princípios energéticos que se apresentam nesta secção só se aplicam a estruturas que desenvolvem deslocamentos e extensões infinitésimais, dado que se assume relações lineares entre as extensões e os deslocamentos (equações (2.35)).

4.2 - Trabalho externo e trabalho externo complementar

Se o elemento de barra representado na Figura 4.1a for submetido a uma força exterior, Q, que aumenta desde o valor nulo até ao valor Q_ℓ, a barra sofre um alongamento crescente de zero até ao valor de u_ℓ. Se a resposta Q - u for não linear, isto é, se o material da barra desenvolver comportamento não linear, a relação Q - u é a que se representa na Figura 4.1b.



(a)



(b) (c)

Figura 4.1 - A barra submetida à força axial Q (a) pode desenvolver uma relação Q-u não linear (b) ou linear (c).

A área sob a curva Q-u e o eixo das abcissas, W_e, representa o trabalho produzido pela força Q ao mover o ponto B para B' (ver Figura 4.1a),

$$W_e = \text{trabalho externo} = \int_0^{u_\ell} Q\ \delta u \tag{4.1}$$

sendo o trabalho extendido à amplitude do deslocamento u_ℓ. A parcela $Q\,\delta u$ no integral de (4.1) representa o trabalho elementar produzido pela força Q durante o elongamento infinitesimal δu da barra. Por sua vez, a área entre a curva Q - u e o eixo das ordenadas representa o trabalho externo complementar determinado por intermédio da seguinte condição

$$W_{ec} = \text{trabalho externo complementar} = \int_0^{Q_1} u\ \delta Q\,. \tag{4.2}$$

Assim, a parcela $u\ \delta Q$ no integral de (4.2) representa o trabalho elementar produzido durante a variação infinitesimal da força Q, δQ, quando na barra está instalado um elongamento u.

Se a barra se comportar em regime linear elástico, a relação Q - u é linear, conforme se representa na Figura 4.1c. Neste caso, o trabalho realizado durante a deformação elástica é armazenado como energia elástica, que é recuperada se a carga aplicada à barra for retirada. Para uma barra com este comportamento e submetida a uma força Q crescente de zero até Q_ℓ e em que o ponto de aplicação de Q sofre um deslocamento de zero até u_ℓ, o trabalho realizado é o que se obtém por intermédio da seguinte relação (ver Figura 4.1c)

$$W_e = \frac{1}{2}\ Q_\ell\ u_\ell\,. \tag{4.3}$$

Neste caso o trabalho externo e o trabalho externo complementar são iguais, dado se são iguais as áreas $\overline{Ou_\ell A}$ e $\overline{OAQ_\ell}$, na Figura 4.1c.

Considere-se agora que a barra representada na Figura 4.1a está submetida a uma força Q e que em determinado instante essa força Q varia de um infinitésimo δQ. Sob a força δQ a barra sofre um deslocamento infinitésimal δu na direcção de Q. Neste caso, o acréscimo de trabalho externo realizado durante a variação de deslocamento δu é o seguinte (ver Figura 4.1c)

$$\delta W_e = Q\,\delta u + \frac{1}{2}\delta Q\,\delta u\,. \tag{4.4}$$

Se o material da barra tiver comportamento não linear, surgiriam termos adicionais em (4.4) que são infinitésimos de ordem superior a $\delta Q\,\delta u$, que podem ser desprezados, dado se ter considerado que as estruturas em análise desenvolvem deslocamentos infinitésimais.

No caso geral de uma estrutura submetida a um sistema de forças superficiais $\underline{Q}_s$ e forças de volume $\underline{Q}_V$, se se impuser um acréscimo de deslocamentos generalizados $\delta\underline{U}$ desenvolve-se um acréscimo de trabalho externo que se pode obter por intermédio da seguinte equação

$$\begin{aligned}\Delta W_e &= \int_V \underline{Q}_V^T\ \delta \underline{U}\ dV + \int_s \underline{Q}_s^T\ \delta \underline{U}\ dS \\ \Delta W_e &= \delta W_e + \frac{1}{2}\,\delta^2 W_e + \ldots\end{aligned} \quad + \text{ termos de ordem superior} \qquad (4.5a)$$

em que

$$\delta W_e = \int_V \underline{Q}_V^T\ \delta \underline{U}\ dV + \int_s \underline{Q}_s^T\ \delta \underline{U}\ dS \qquad (4.5b)$$

representa a variação de primeira ordem de ΔW_e e $\delta^2 W_e$ representa a variação de segunda ordem de ΔW_e.

O primeiro termo de (4.5b) representa o trabalho externo produzido pelas forças de volume $\underline{Q}_V$ e o segundo termo representa o trabalho externo produzido pelas forças de superfície $\underline{Q}_S$. Se as forças exteriores $\underline{Q}_S$ e $\underline{Q}_V$ forem reunidas num único vector, $\underline{Q}$, e se o vector $\delta \underline{U}$ representar a variação dos deslocamentos dos pontos de aplicação de $\underline{Q}$ segundo a direcção de $\underline{Q}$, a variação do trabalho externo é dada por

$$\delta W_e = \underline{Q}^T\ \delta \underline{U}\ . \qquad (4.6)$$

Considere-se agora a mesma estrutura sujeita a um sistema de forças externas de superfície $\underline{Q}_S$ e de volume $\underline{Q}_V$. Se a esse corpo lhe for aplicado um acréscimo de força $\delta \underline{Q}_S$ e $\delta \underline{Q}_V$ produz-se um acréscimo de trabalho denominado de trabalho externo complementar dado por

$$\begin{aligned}\Delta W_{ec} &= \int_V \underline{U}^T\ \delta \underline{Q}_V\ dV + \int_S \underline{U}^T\ \delta \underline{Q}_S\ dS \\ \Delta W_{ec} &= \delta W_{ec} + \left(\frac{1}{2}\,\delta^2\ W_{ec} + \cdots\right)\end{aligned} \quad + \text{ termos de ordem superior} \qquad (4.7a)$$

em que

$$\delta W_{ec} = \int_V \underline{U}^T\ \delta \underline{Q}_V\ dV + \int_S \underline{U}^T\ \delta \underline{Q}_S\ dS \qquad (4.7b)$$

representa o acréscimo de primeira ordem de ΔW_{ec} e $\delta^2 W_{ec}$ o acréscimo de segunda ordem de ΔW_{ec}. Se as forças exteriores forem agrupadas no vector $\underline{Q}$, o trabalho externo complementar vem expresso por

$$\delta W_{ec} = \underline{U}^T\ \delta \underline{Q}. \qquad (4.8)$$

4.3 – Trabalho interno e energia de deformação

4.3.1 – Deformação axial

Considere-se a barra biarticulada de material com comportamento linear-elástico representada na Figura 4.2. Esta barra tem secção transversal de área *A*, módulo de elasticidade *E*, comprimento *L* e está submetida a uma força *Q* segundo o eixo ℓ_1. Esta força aumenta desde o valor nulo até ao seu valor final, induzindo na barra um esforço axial N_{ℓ_1}, e consequentemente, um estado de tensão

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A}. \tag{4.9}$$

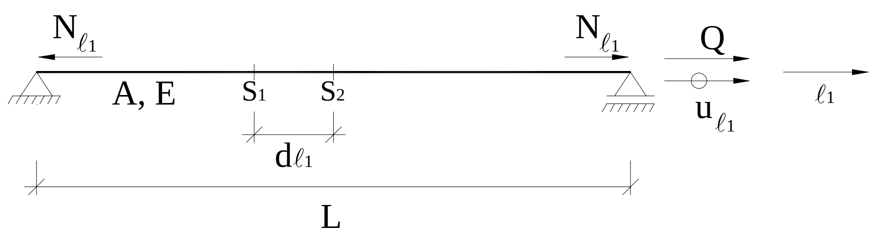


Figura 4.2 – Barra biarticulada de comprimento *L*, módulo de elasticidade *E* e secção transversal de área *A*.

Sob o esforço axial N_1, a barra sofre um deslocamento u_1, obtido por intermédio da seguinte expressão:

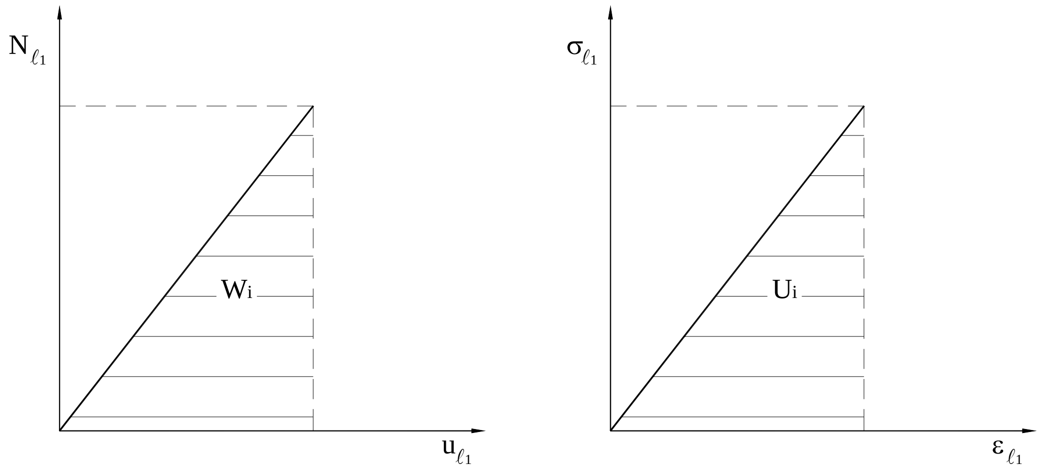
$$u_1 = \frac{N_1 L}{E A} \tag{4.10}$$

em que *EA/L* é a rigidez axial da barra. O deslocamento u_1 provoca uma extensão

$$\varepsilon_1 = \frac{u_1}{L}. \tag{4.11}$$

O trabalho interno de deformação produzido pelo esforço axial N_1 é igual à área representada na Figura 4.3a, sendo obtido segundo a expressão

$$W_i = \frac{N_1 u_1}{2}. \tag{4.12}$$



(a) (b)

Figura 4.3 – Trabalho interno (a) e energia (b) produzidos durante a deformação axial de uma barra biarticulada com comportamento linear-elástico.

Substituindo (4.10) em (4.12) obtém-se

$$W_i = \frac{N_1^2 \, L}{2\,E\,A} \tag{4.13a}$$

ou

$$W_i = \frac{E\,A\,u_1^2}{2\,L} \tag{4.13b}$$

pelo que o trabalho interno pode ser explicitado por intermédio de uma função quadrática nos esforços ou nos deslocamentos. Considerando-se um elemento de comprimento $d\ell_1$ (ver Figura 4.2), a variação de trabalho interno, dW_i, realizado na deformação axial deste elemento será obtida substituindo em (4.13) L por $d\ell_1$ e u_1 por du_1, resultando

$$dW_i = \frac{N_1^2 \, d\ell_1}{2\,E\,A} \tag{4.14a}$$

ou

$$dW_i = \frac{E\,A\,du_1^2}{2\,d\ell_1}\,. \tag{4.14b}$$

O trabalho interno por deformação axial da barra obtém-se integrando as expressões (4.14) ao longo do comprimento da barra,

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N_1^2}{E\,A} d\ell_1 \tag{4.15a}$$

ou

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^L E\,A\left(\frac{du_1}{d\ell_1}\right)^2 d\ell_1\,. \tag{4.15b}$$

Se em vez do esforço axial N_1 e deslocamento u_1 se se considerar a correspondente tensão, σ_1, e extensão, ε_1, e as substituir nas expressões (4.15) obtém-se as expressões que permitem determinar a energia dissipada na deformação axial de uma barra de volume *V=AL*,

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\sigma_1^2}{E} A\,d\ell_1 \\ &= \frac{1}{2}\int_V \sigma_1\,\varepsilon_1\,dV \end{aligned} \tag{4.16a}$$

ou

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_1^2\,E\;A\,d\ell_1 \\ &= \frac{1}{2}\int_V \sigma_1\;\varepsilon_1\,dV \end{aligned}\,. \tag{4.16b}$$

A energia dissipada por unidade de volume, também denominada de densidade de energia obtém-se de

$$\overline{U}_i = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2}{E} \tag{4.17a}$$

ou

$$U_i = \frac{1}{2}\sigma_1\,\varepsilon_1\,. \tag{4.17b}$$

No caso geral de um corpo submetido a um estado de tensão caracterizado pelas componentes σ_1, σ_2, σ_3 e pelas respectivas extensões ε_1, ε_2, ε_3, a energia de deformação obtém-se aplicando o princípio da sobreposição dos efeitos, resultando

$$U_i = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_1\;\varepsilon_1 + \sigma_2\;\varepsilon_2 + \sigma_3\;\varepsilon_3\right) dV\,. \tag{4.19}$$

4.3.2 – Deformação por corte

O elemento de barra representado na Figura 4.4 está submetido a esforços de corte no plano $\ell_1\ell_2$, V_2, e a esforços de corte no plano $\ell_1\ell_3$, V_3. Os eixos ℓ_2 e ℓ_3 são principais centrais de inércia da secção da barra. Estes esforços produzem trabalho interno de deformação distorsional (ou de corte) das secções transversais da barra. Dado que o procedimento para se estabelecer as expressões do trabalho interno e da energia por deformação de corte devido a V_3 é semelhante ao que se aplica na determinação das expressões do trabalho interno e da energia por deformação de corte devido a V_2, apenas se descreverá este último.

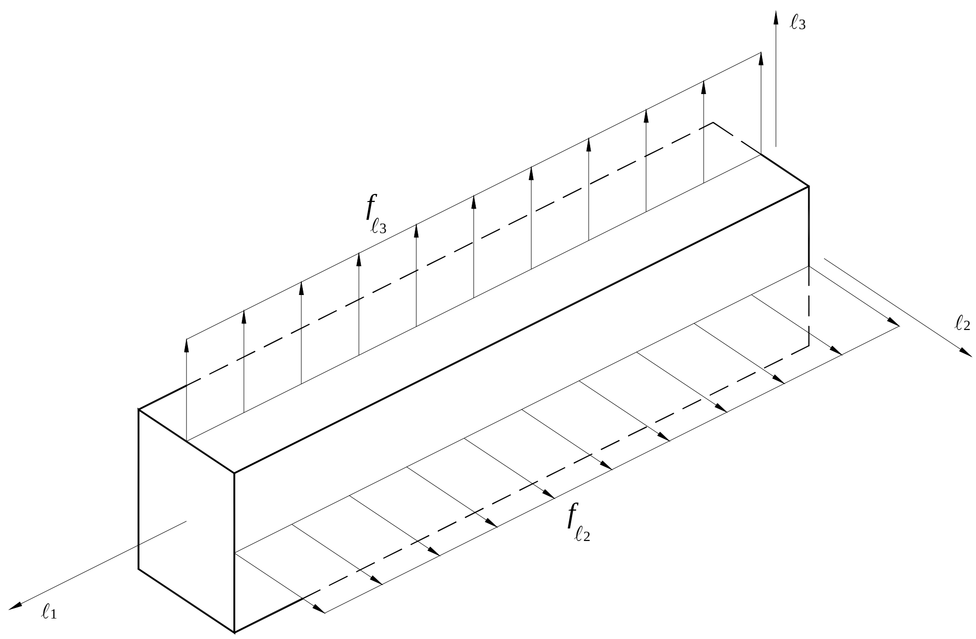


Figura 4.4 – Elemento de barra submetido a forças distribuídas por unidade de comprimento segundo o eixo ℓ_2, f_2, e segundo o eixo ℓ_3, f_3.

Devido à actuação de f_2, a viga deforma-se, pelo que uma determinada secção transversal da barra desloca-se segundo ℓ_2, conforme se representa na Figura 4.5.

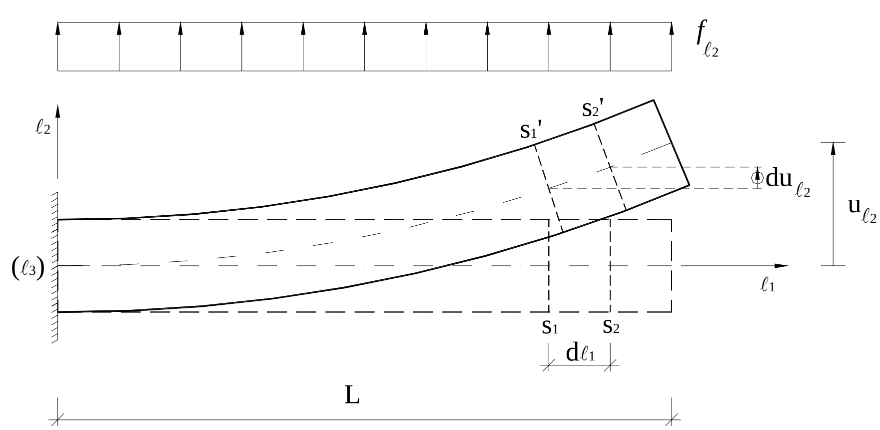


Figura 4.5 – Deformação da barra devido à actuação de f_2.

Durante o deslocamento dessa secção, o esforço transverso nessa secção, V_2, desenvolve o trabalho seguinte

$$W_i = \frac{V_2 \, u_2}{2} \tag{4.20}$$

denominado de trabalho interno por deformação de corte no plano da secção $\ell_1 \ell_2$. Dado que,

$$\frac{u_2}{L} = \gamma_{12} \, , \tag{4.21}$$

$$\tau_{12} = \frac{V_2}{A_2^*} \tag{4.22}$$

e

$$\tau_{12} = G \; \gamma_{12} \tag{4.23}$$

então

$$u_2 = \frac{V_2 \, L}{G \, A_2^*} \tag{4.24}$$

em que G é o módulo de elasticidade transversal do material que constitui a barra e A_2^* é a área reduzida de corte segundo o eixo ℓ_2. Em (4.24) o factor $G \, A_2^* / L$ é a rigidez de corte segundo o eixo ℓ_2. Substituindo (4.24) em (4.20) obtém-se

$$W_i = \frac{V_2^2 \, L}{2 G \, A_2^*} \tag{4.25a}$$

ou

$$W_i = \frac{G \, A_2^* \, u_2^2}{2 L} \tag{4.25b}$$

que é uma função quadrática no esforço de corte ou no deslocamento segundo ℓ_2, respectivamente. Considerando-se um elemento de comprimento $d\ell_1$ (ver Figura 4.5), a variação de trabalho interno, dW_i, realizado na deformação por corte no plano $\ell_1 \ell_2$ deste elemento será obtida substituindo em (4.25) L por $d\ell_1$ e u_{ℓ_2} por du_2, resultando

$$dW_i = \frac{V_2^2}{2 G \, A_2^*} \, d\ell_1 \tag{4.26a}$$

ou

$$dW_i = \frac{G \, A_2^* \, du_2^2}{2 \; d\ell_1} \, . \tag{4.26b}$$

Assim, o trabalho interno por deformação de corte da barra, no plano $\ell_1 \ell_2$ obtém-se integrando as expressões (4.26) ao longo do comprimento da barra,

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{V_2^2}{G\,A_2^*}\,d\ell_1 \tag{4.27a}$$

ou

$$dW_i = \frac{1}{2}\int_0^L G\,A_2^*\left(\frac{du_2}{d\ell_1}\right)^2 d\ell_1\,. \tag{4.27b}$$

Se a barra estiver submetida a esforços de corte no plano $\ell_1\ell_3$, V_3, então o trabalho por deformação de corte neste plano determina-se por procedimento análogo ao acabado de expôr, obtendo-se

$$W_i = \frac{V_3\,u_2}{2} \tag{4.28}$$

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{V_3^2}{G\,A_3^*}\,d\ell_1 \tag{4.29a}$$

ou

$$dW_i = \frac{1}{2}\int_0^L G\,A_3^*\left(\frac{du_3}{d\ell_1}\right)^2 d\ell_1\,. \tag{4.29b}$$

em que A_3^* é a área reduzida de corte segundo ℓ_3.

Se em vez dos esforços de corte V_2 e V_3 e dos deslocamentos transversais u_2 e u_3, se se considerar as correspondentes tensões, τ_{12} e τ_{13}, e extensões (distorsões, mais propriamente dito), γ_{12} e γ_{13}, obter-se-ia a energia por deformação de corte nos planos $\ell_1\ell_2$ e $\ell_1\ell_3$. Neste caso, as relações (4.20) e (4.27) a (4.29) converter-se-iam nas seguintes:

$$U_i = \frac{\tau_{12}\,\gamma_{12}}{2} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\tau_{12}^2\,A_2^*}{G}d\ell_1 \\ &= \frac{1}{2}\int_V \tau_{12}\,\gamma_{12}\,dV \end{aligned}, \tag{4.31a}$$

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2}\int_0^L \gamma_{12}^2\,G\,A_2^*\,d\ell_1 \\ &= \frac{1}{2}\int_V \tau_{12}\,\gamma_{12}\,dV \end{aligned}, \tag{4.31b}$$

$$U_i = \frac{\tau_{13}\,\gamma_{13}}{2} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\tau_{13}^2 A_3^*}{G} d\ell_1 \\ &= \frac{1}{2}\int_V \tau_{13}\gamma_{13}\, dV \end{aligned}, \tag{4.33a}$$

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2}\int_0^L \gamma_{13}^2 G A_3^*\, d\ell_1 \\ &= \frac{1}{2}\int_V \tau_{13}\gamma_{13}\, dV \end{aligned}, \tag{4.33b}$$

respectivamente, que representam a energia dissipada na deformação por corte nos planos $\ell_1\ell_2$ e $\ell_1\ell_3$ de um elemento de barra de volume *V*. A energia de corte dissipada por unidade de volume no plano $\ell_1\ell_2$ será,

$$\overline{U}_i = \frac{1}{2}\frac{\tau_{12}^2}{G}, \tag{4.34a}$$

ou

$$\overline{U}_i = \frac{1}{2}\gamma_{12}^2 G, \tag{4.34b}$$

enquanto no plano $\ell_1\ell_3$ será,

$$\overline{U}_i = \frac{1}{2}\frac{\tau_{13}^2}{G}, \tag{4.35a}$$

ou

$$\overline{U}_i = \frac{1}{2}\gamma_{13}^2 G. \tag{4.35b}$$

No caso geral de um corpo submetido a um estado de tensão e deformação caracterizado pelas componentes τ_{12}, τ_{23}, τ_{31}, e γ_{12}, γ_{23}, γ_{31}, respectivamente, a energia de deformação por corte obtém-se aplicando o princípio da sobreposição dos efeitos, resultando

$$U_i = \frac{1}{2}\int_V \left(\tau_{12}\gamma_{12} + \tau_{23}\gamma_{23} + \tau_{31}\gamma_{31}\right) dV. \tag{4.36}$$

4.3.3 - Deformação por flexão

Considere-se que a barra representada na Figura 4.6 tem comportamento linear-elástico. Admita-se que os eixos ℓ_2 e ℓ_3 coincidem com os eixos principais centrais de inércia e que definem com o eixo ℓ_1 um sistema de eixos cartesiano.

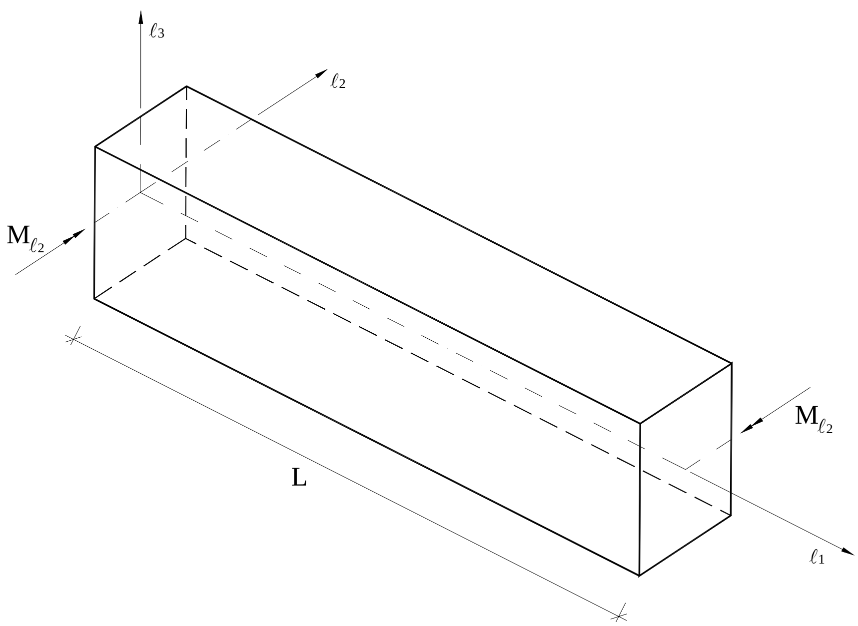


Figura 4.6 - Barra submetida a um par de momentos M_2 nas suas extremidades.

Se esta barra for submetida a um par de momentos flectores M_2 (momento em torno do eixo ℓ_2) nas suas extremidades (ver Figura 4.6), após a flexão as secções das extremidades da barra formam um ângulo θ_2, denominado de ângulo de rotação por flexão (ver Figura 4.7), que pode ser obtido por intermédio da seguinte equação

$$\theta_2 = \frac{M_2 L}{EI_2} \tag{4.37}$$

em que I_2 é a inércia em torno do eixo ℓ_2 da secção da barra.

O trabalho interno produzido pela actuação dos momentos flectores M_2 será igual à área representada na Figura 4.8, sendo obtido por intermédio da seguinte expressão

$$W_i = \frac{M_2\,\theta_2}{2}\,. \tag{4.38}$$

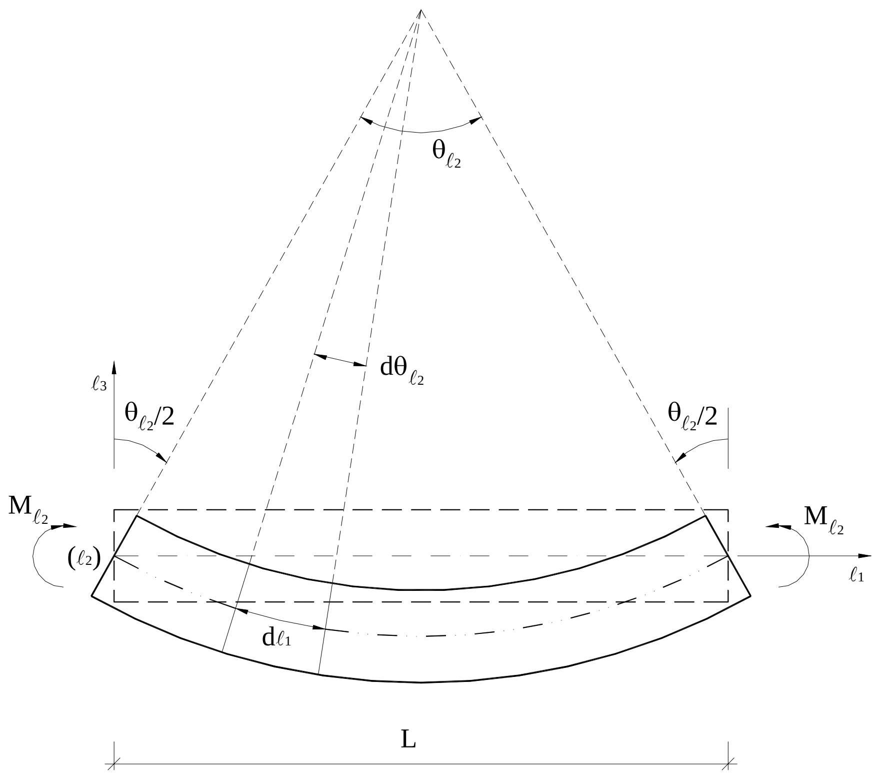


Figura 4.7 - Flexão da barra no plano $\ell_1 \ell_3$.

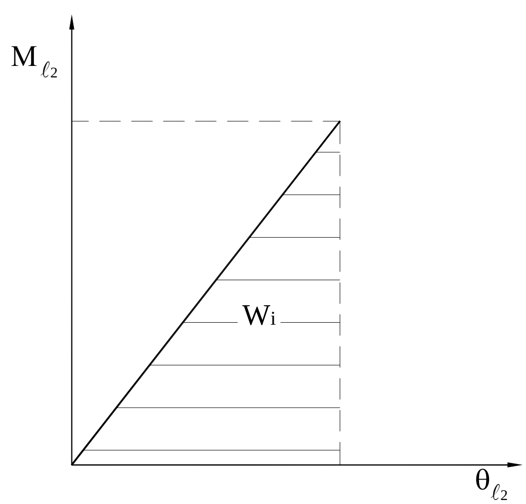


Figura 4.8 - Trabalho interno produzido durante a flexão em torno do eixo ℓ_2 de uma barra (flexão no plano $\ell_1 \ell_3$).

Substituindo (4.37) em (4.38) obtém-se,

$$W_i = \frac{1}{2} \frac{M_2^2 L}{E I_2} \tag{4.39a}$$

ou

$$W_i = \frac{1}{2}\,\frac{E\,I_2\,\theta_2^2}{L} \tag{4.39b}$$

em que $E\,I_2/L$ é a rigidez à flexão da barra em torno do eixo ℓ_2. Num elemento de comprimento infinitesimal $d\ell_1$, a variação de trabalho interno, dW_i, será obtida substituindo em (4.39) L por $d\ell_1$ e θ_2 por $d\theta_2$, resultando

$$dW_i = \frac{1}{2}\,\frac{M_2^2\,d\ell_1}{E\,I_2} \tag{4.40a}$$

ou

$$dW_i = \frac{1}{2}\,\frac{E\,I_2\,\left(d\theta_2\right)^2}{d\ell_1} \tag{4.40b}$$

sendo $d\theta_2$ a variação de ângulo entre duas secções afastadas de $d\ell_1$ (ver Figura 4.7).

Se a barra estiver submetida a flexão simples, o momento M_2 varia ao longo de ℓ_1, pelo que o trabalho interno de flexão em torno do eixo ℓ_2 resulta da integração das relações (4.40), obtendo-se

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_2^2}{EI_2}\,d\ell_1 \tag{4.41a}$$

ou

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^L EI_2\left(\frac{d\theta_2}{d\ell_1}\right)^2 d\ell_1\,. \tag{4.41b}$$

Para o caso de flexão no plano $\ell_1\ell_2$, desenvolver-se-ia raciocínio similar ao acabado de descrever, obtendo-se as seguintes expressões

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_3^2}{EI_3}\,d\ell_1 \tag{4.42a}$$

ou

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^L EI_3\left(\frac{d\theta_3}{d\ell_1}\right)^2 d\ell_1 \tag{4.42b}$$

em que I_3 é a inércia da secção em torno do eixo ℓ_3.

4.3.4 - Deformação por torsão

Considere-se que a barra de secção circular representada na Figura 4.9 está sujeita a um par de momentos torsores M_1 (momento em torno do eixo de barra, ℓ_1) aplicado nas extremidades da barra. Após a torsão as secções das extremidades da barra rodam entre si de um ângulo θ_1, denominado de ângulo de torsão.

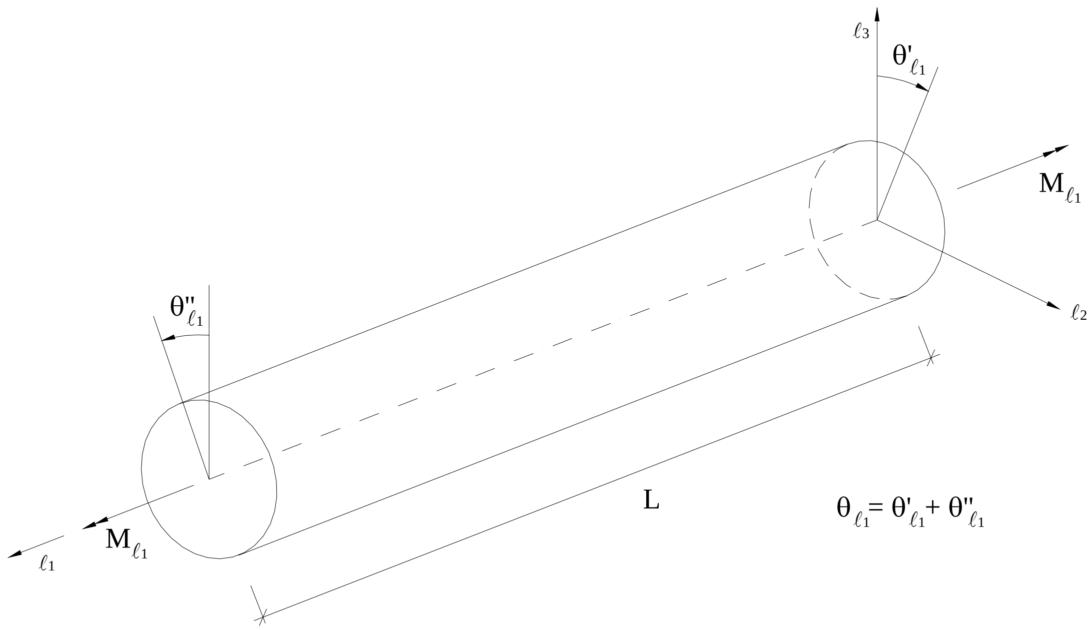


Figura 4.9 - Barra de secção circular submetida a torsão.

Se o material da barra se comportar em regime linear-elástico, o trabalho interno produzido será igual à área $\overline{OAB}$ representada na Figura 4.10, isto é:

$$W_i = \frac{M_1 \theta_1}{2} . \tag{4.43}$$

Segundo a lei de Hooke,

$$\theta_1 = \frac{M_1 L}{2GI_1} \tag{4.44}$$

em que I_1 é o momento de inércia polar e GI_1/L é a rigidez à torsão da barra cilíndrica. Substituindo (4.44) em (4.43) obtém-se

$$W_i = \frac{1}{2} \frac{M_1^2 L}{G I_1} . \tag{4.45a}$$

ou

$$W_i = \frac{1}{2}\,\frac{\theta_1^2\;G\,I_1}{L}\,. \tag{4.45b}$$

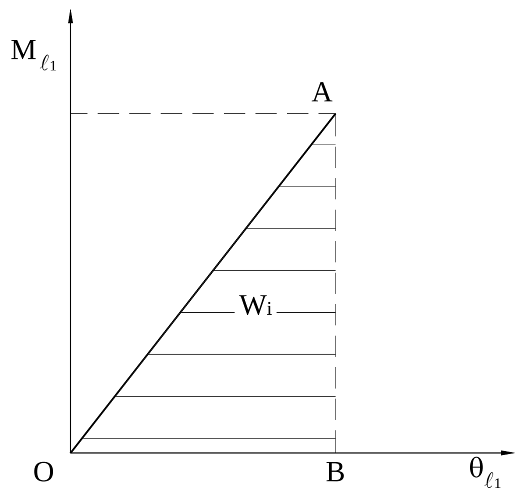


Figura 4.10 - Trabalho interno produzido durante a torsão de uma barra.

Num elemento de comprimento infinitesimal $d\ell_1$, a variação de trabalho interno, dW_i, obtém-se substituindo nas equações (4.45) L por $d\ell_1$ e θ_1 por $d\theta_1$, resultando

$$dW_i = \frac{1}{2}\,\frac{M_1^2}{G\,I_1}\,d\ell_1 \tag{4.46a}$$

ou

$$dW_i = \frac{1}{2}\,\frac{\left(d\theta_1\right)^2\;G\,I_1}{d\ell_1}\,. \tag{4.46b}$$

Assim, o trabalho interno por deformação de torsão da barra obtém-se integrando (4.46) no comprimento da barra, i.e.,

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_1^2}{E\,I_1}\,d\ell_1 \tag{4.47a}$$

ou

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^L G\,I_1\left(\frac{d\theta_1}{d\ell_1}\right)^2 d\ell_1\,. \tag{4.47b}$$

Em barras de secção diferente da circular, o ângulo de torsão será também proporcional ao momento torsor aplicado e inversamente proporcional à rigidez à torsão, pelo que,

$$\theta_1 = \frac{M_1}{C} \tag{4.48}$$

em que $C = G I_1 / L$ é a rigidez à torsão, sendo I_1 o momento de inércia à torsão, que varia com a forma da secção transversal da barra.

4.3.5 - Corpo submetido a deformação generalizada

No caso mais geral, uma barra pode estar submetida a esforço axial N_1, a esforços de corte na secção ortogonal ao eixo ℓ_1 e dirigidos segundo o eixo ℓ_2, V_2, e segundo o eixo ℓ_3, V_3, a momento torsor, isto é, momento em torno do eixo ℓ_1, M_1, a momento flector em torno do eixo ℓ_2, M_2, e a momento flector em torno do eixo ℓ_3, M_3. A barra nº2 do pórtico tridimensional representado na Figura 4.11 é exemplo disto, dado estar submetida aos seis tipos de esforços referidos. Neste caso, o trabalho interno obtém-se aplicando o princípio da sobreposição dos efeitos, pelo que é a soma das parcelas obtidas nas secções anteriores, isto é,

$$W_i = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L \frac{N_1^2}{EA} d\ell_1}_{\text{Parcela afecta ao esforço axial}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L \frac{V_2^2}{GA_2^*} d\ell_1}_{\text{Parcela afecta ao esforço de corte na direcção do eixo } \ell_2} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L \frac{V_3^2}{GA_3^*} d\ell_1}_{\text{Parcela afecta ao esforço de corte na direcção do eixo } \ell_3} +$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_1^2}{GI_1} d\ell_1}_{\text{Parcela afecta ao momento torsor}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_2^2}{EI_2} d\ell_1}_{\text{Parcela afecta ao momento flector em torno do eixo } \ell_2} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_3^2}{EI_3} d\ell_1}_{\text{Parcela afecta ao momento flector em torno do eixo } \ell_3} \tag{4.46}$$

em que

$$A_2^* = \frac{A}{\dfrac{1}{A\, r_3^4}\displaystyle\int_A \frac{S_3^2}{h_3}\, dA} \tag{4.47a}$$

e

$$A_3^* = \frac{A}{\dfrac{1}{A\, r_2^4}\displaystyle\int_A \frac{S_2^2}{h_2}\, dA}, \tag{4.47b}$$

são as áreas reduzidas de corte segundo os eixos ℓ_2 e ℓ_3, sendo r_2 e r_3 o raio de giração da secção de área A em torno do eixo ℓ_2 e ℓ_3, respectivamente, S_2 e S_3 o momento estático em relação ao eixo ℓ_2 e ℓ_3, e h_2, h_3 a dimensão da secção segundo ℓ_2 e ℓ_3, respectivamente.

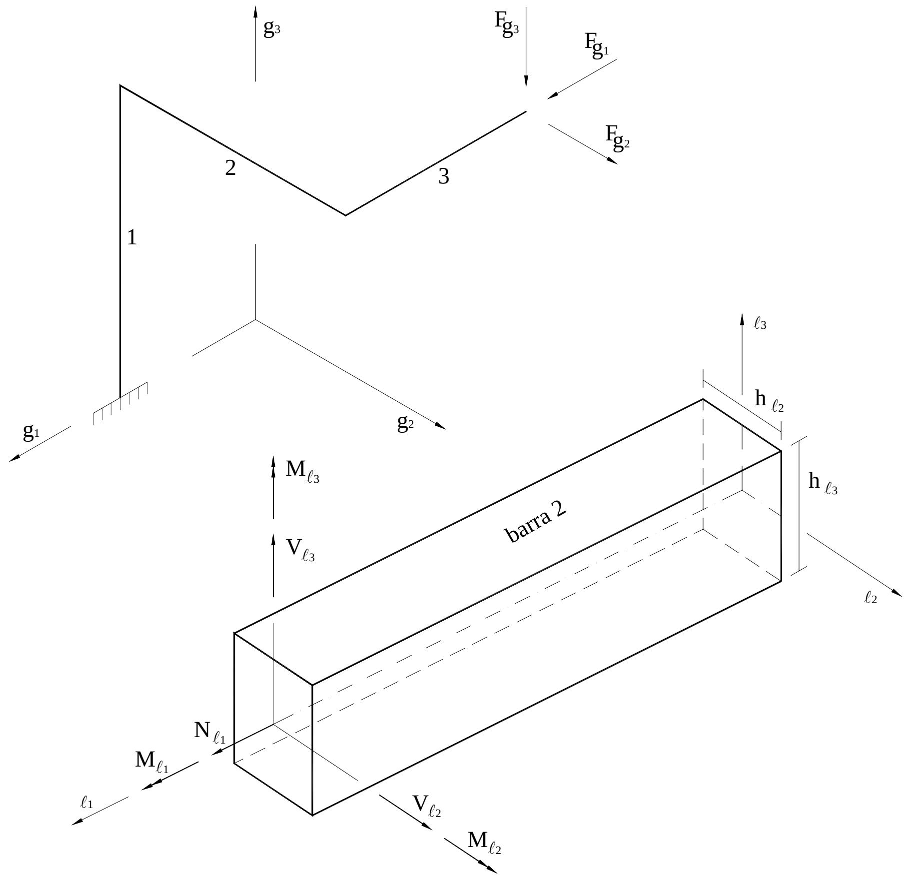


Figura 4.11 - Barra de pórtico contínuo tridimensional.

A densidade de deformação de um corpo sob estado tridimensional de tensão e de extensão também pode ser obtido aplicando o princípio da sobreposição dos efeitos, pelo que

$$U_i = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\,\varepsilon_1 + \sigma_2\,\varepsilon_2 + \sigma_3\,\varepsilon_3 + \tau_{12}\,\gamma_{12} + \tau_{23}\,\gamma_{23} + \tau_{31}\,\gamma_{31}\right). \tag{4.48}$$

Em notação tensorial esta relação rescreve-se da forma seguinte

$$U_i = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,. \tag{4.49}$$

Substituindo as equações da lei de Hooke (equações (2.47)) em (4.48) obtém-se:

$$U_i = \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\upsilon}{E}\left(\sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_1\,\sigma_3\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2\right) \tag{4.50}$$

pelo que (4.48) passa a ser função somente das componentes de tensão. A relação (4.48) pode ser reescrita em função somente das componentes de extensão (recorrendo-se novamente à lei de Hooke) obtendo-se

$$U_i = \frac{1}{2}\,\lambda\,\Delta^2 + G\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2\right) + \frac{1}{2}\,G\left(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2\right) \tag{4.51}$$

sendo

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{4.52}$$

a constante de Lamé e

$$\Delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{4.53}$$

a extensão volumétrica. Analisando a expressão (4.51) constata-se que a derivada de U_i em ordem a qualquer componente da extensão dá a correspondente componente de tensão. Por exemplo.

$$\frac{dU_i}{d\varepsilon_1} = \lambda\,\Delta + 2G\varepsilon_{11} \tag{4.54}$$

que, tendo em conta as relações (2.58) e (2.59), é igual a σ_{11}. De forma similar verifica-se que

$$\frac{dU_i}{d\sigma_1} = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \upsilon\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] \tag{4.55}$$

que, tendo em conta a expressão (2.47a), se constata ser igual a ε_{11}. Assim, por intermédio do cálculo da energia de deformação é possível obter as componentes de tensão e de extensão em determinado ponto.

No caso geral de um corpo sujeito a um sistema de forças externas em equilíbrio, qualquer ponto do seu interior ficará submetido a um estado de tensão caracterizado pelo vector $\underline{\sigma}$ e a um estado de extensão caracterizado pelo vector $\underline{\varepsilon}$. Se o estado de deformação variar de $\underline{\varepsilon}$ para $\underline{\varepsilon} + \delta\,\varepsilon$ ocorrerá um incremento da densidade de energia dado por (ver Figura 4.12)

$$\begin{aligned} \Delta U_i &= \underline{\sigma}^T \delta\underline{\varepsilon} \\ \Delta U_i &= \delta U_i + \left(\frac{1}{2}\delta^2 U_i + \ldots\right) + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \tag{4.56}$$

em que

$$\delta U_i = \underline{\sigma}^T\,\delta\underline{\varepsilon}\ . \tag{4.57}$$

A energia de deformação armazenada no corpo, U_i, pode ser obtida integrando (4.57) ao volume do corpo, pelo que,

$$U_i = \int_V \underline{\sigma}^T d\underline{\varepsilon}\ \ dV\ . \tag{4.58}$$

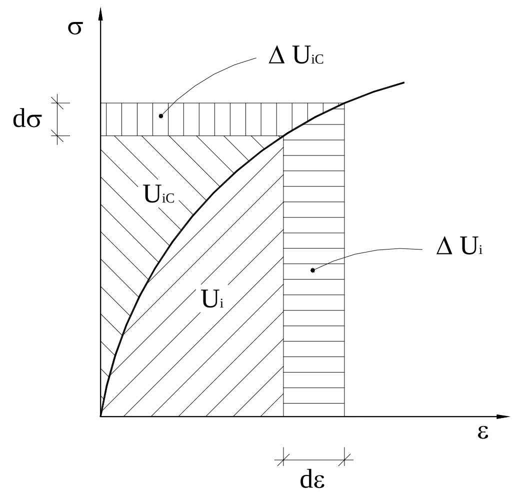


Figura 4.12 - Energia de deformação (representação a uma dimensão).

Na Figura 4.12, a área entre a curva $\sigma - \varepsilon$ e o eixo das abcissas representa a densidade de energia de deformação. Por seu lado, a área entre a curva $\sigma - \varepsilon$ e o eixo das ordenadas (ver Figura 4.12) representa a energia complementar de deformação (a uma dimensão),

$$U_{ic} = \int_V \delta U_{ic} \; dV \tag{4.59}$$

em que δU_{ic} é a energia complementar de deformação que se dissipa num elemento de volume dV. Se o estado de tensão variar de $\underline{\sigma}$ para $\underline{\sigma} + d\underline{\sigma}$, o incremento de energia complementar de deformação será dado por

$$\begin{aligned} \Delta U_{ic} &= \underline{\varepsilon}^T \delta \underline{\sigma} \\ \Delta U_{ic} &= \delta U_{ic} + \left(\frac{1}{2} \delta^2 U_{ic} + ... \right) \text{ + termos de ordem superior} \end{aligned} \tag{4.60}$$

em que

$$\delta U_{ic} = \underline{\varepsilon}^T \delta \underline{\sigma} \; . \tag{4.61}$$

Substituindo (4.61) em (4.59) obtém-se a energia complementar de deformação do corpo de volume *V*,

$$U_{ic} = \int_V \underline{\varepsilon}^T d\underline{\sigma} \; dV \; . \tag{4.58}$$

4.4 - Princípio do trabalho virtual

4.4.1 - Conceito de grandeza virtual

Denomina-se de grandeza virtual toda aquela que é bastante pequena. No presente trabalho, toda a grandeza precedida pelo simbolo δ é considerada virtual. Por exemplo, δu, $\delta \varepsilon$, δQ e

$\delta\sigma$ representam um deslocamento virtual, uma extensão virtual, uma força virtual e uma tensão virtual. As grandezas virtuais podem ser consideradas como variações das correspondentes verdadeiras grandezas.

Diz-se que um corpo está submetido a um campo de deslocamentos e extensões virtuais ($\delta\underline{U}$, $\delta\underline{\varepsilon}$) se essas deformações forem bastante pequenas (infinitésimais), cinematicamente admissíveis e compatíveis com as ligações ao exterior, isto é, se as condições de ligação do corpo ao exterior, antes e depois da deformação virtual, forem iguais. Por sua vez diz-se que um corpo está submetido a um sistema de forças e tensões virtuais ($\delta\underline{Q}$ e $\delta\underline{\sigma}$) se essas forças e tensões forem infinitesimais e estaticamente admissíveis.

4.4.2 – Príncipio dos deslocamentos virtuais

Considere-se um corpo submetido a um sistema de forças exteriores de volume $\underline{Q}_V$ e a um sistema de forças exteriores de superfície $\underline{Q}_S$ (forças distribuídas na superfície de contorno do corpo). O sistema de força $\underline{Q}_V$ e $\underline{Q}_S$ induz um estado de tensão $\underline{\sigma}$ em qualquer ponto do interior do corpo. Admita-se que sob este sistema de forças o corpo sofreu uma deformação infinitesimal, tendo os pontos de aplicação $\underline{Q}_V$ e $\underline{Q}_S$ sofrido deslocamentos virtuais $\delta\underline{U}$ (variação de deslocamentos) e os pontos do interior do corpo sofrido extensões virtuais $\delta\underline{\varepsilon}$ (variação das extensões). Durante a deformação virtual cinematicamente admissível, as forças exteriores $\underline{Q}_V$ e $\underline{Q}_S$ produzem um trabalho, denominado de trabalho virtual exterior, δW_e,

$$\delta W_e = \int_V \underline{Q}_V \; \delta\underline{U} \; dV + \int_S \underline{Q}_S \; \delta\underline{U} \; dS \tag{4.59}$$

enquanto as forças interiores, $\underline{\sigma}$, produzem um trabalho denominado de trabalho virtual interno, δW_i, ou de deformação,

$$\delta W_i = \int_V \underline{\sigma}^T \; \delta\underline{\varepsilon} \; dV \, . \tag{4.60}$$

Vai-se demonstrar que

$$\delta W_e = \delta W_i \tag{4.61}$$

isto é, que o trabalho realizado pelas forças exteriores aplicadas a um corpo qualquer, deformável e em equilíbrio para qualquer estado de deformação virtual compatível com as ligações ao exterior, é igual ao trabalho virtual interno. A expressão (4.59) pode ser reescrita da forma seguinte

$$\delta W_e = \int_V Q_{Vi} \; \delta u_i \; dV + \int_S Q_{Si} \; \delta u_i \; dS \tag{4.62}$$

em que o primeiro integral é um integral de volume (triplo) estendido ao conjunto dos elementos de volume dV do corpo, enquanto o segundo integral é um integral de superfície estendido ao conjunto de elementos *dS* da superfície exterior do corpo. Por sua vez, a expressão (4.60) pode ser reescrita na forma seguinte

$$\delta W_i = \int_V \sigma_{ij} \; \delta\varepsilon_{ij} \; dV \;. \tag{4.63}$$

Como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{4.64}$$

então

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right). \tag{4.65}$$

Substituindo (4.65) em (4.63) obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_V \sigma_{ij} \; \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right) dV \\ &= \int_V \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right) dV \end{aligned} \;. \tag{4.66}$$

Devido à simetria do tensor das tensões, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, pelo que

$$\sigma_{ij} \frac{\partial(\delta u_j)}{\delta x_i} = \sigma_{ji} \frac{\partial(\delta u_j)}{\delta x_i} . \tag{4.67}$$

Dado que *i* e *j* são índices mudos podem ser trocados entre si,

$$\sigma_{ji} \frac{\partial(\delta u_j)}{\delta x_i} = \sigma_{ij} \frac{\partial(\delta u_i)}{\delta x_j} . \tag{4.68}$$

pelo que a expressão (4.66) reduz-se à seguinte:

$$\delta W_i = \int_V \sigma_{ij} \; \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \; dV \;. \tag{4.69}$$

Aplicando a regra da derivada do produto de duas funções,

$$\int_V \frac{\partial(\sigma_{ij} \, \delta u_i)}{\partial x_j} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i \, dV + \int_V \sigma_{ij} \; \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \; dV \;. \tag{4.70}$$

Substituindo (4.70) em (4.69) obtém-se

$$\delta W_i \ = \ \int_V \frac{\partial\left(\sigma_{ij}\delta u_i\right)}{\partial x_j}\, dV \ - \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i \ dV \quad . \tag{4.71}$$

O teorema da divergência de Gauss (Kreyszig 1988) diz que se F é uma função contínua, escalar, vectorial ou tensorial,

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial x_j}\, dV \ = \ \int_S F \ \ n_j \ dS \tag{4.72}$$

em que n_j são as componentes do versor normal à faceta S. Se em (4.72) substituir F por $\sigma_{ij}\delta u_i$ obtém-se,

$$\int_V \frac{\partial\left(\sigma_{ij}\ \delta u_i\right)}{\partial x_j}\, dV \ = \ \int_S \ \sigma_{ij}\ \delta u_i \ \ n_j \ dS \tag{4.73}$$

pelo que a expressão (4.71) reduz-se à seguinte

$$\delta W_i \ = \ \int_S \sigma_{ij}\delta u_i\, n_j \ dS \ - \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i \ dV \quad . \tag{4.74}$$

Tendo em conta as expressões (4.62) e (4.74) verifica-se que

$$\delta W_e - \delta W_i \ = \ \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + Q_{Vi}\right)\delta u_i \ dV \ - \int_S \left(\sigma_{ij}\, n_j - Q_{Si}\right)\delta u_i \ dS \quad . \tag{4.75}$$

O primeiro integral de (4.75) é nulo porque, estando o campo de tensões σ_{ij} em equilíbrio, tem que se verificar as equações de equilíbrio indefenido estabelecidas na relação (2.6), isto é:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + Q_{Vi} = 0\,. \tag{4.76}$$

O segundo integral de (4.75) é também nulo porque o campo de tensões σ_{ij} obedece às condições de superfície traduzidas pelas equações (2.9), isto é:

$$\sigma_{ij}\, n_j = Q_{Si}\,. \tag{4.77}$$

Conclui-se assim que $\delta W_e = \delta W_i$ que se pode traduzir no seguinte enunciado: *a condição necessária e suficiente para que um corpo deformável esteja em equilibrio é que o trabalho das forças exteriores seja igual ao trabalho das forças interiores (trabalho de deformação) para todo o campo de deslocamentos virtuais, cinematicamente admissível*.

Em notação matricial a relação (4.61) apresenta a forma

$$\int_V \underline{Q}_V^T \; \delta\underline{U} \; dV \; + \int_S \underline{Q}_S^T \; \delta\underline{U} \; dS \; = \int_V \underline{\sigma}^T \, \delta\underline{\varepsilon} \; dV \, . \tag{4.78}$$

Num número considerável de estruturas apenas actuam forças e reacções aplicadas em pontos do contorno da estrutura. Nestes casos, a variação do trabalho exterior traduz-se por

$$\delta W_e = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta u_i \tag{4.79}$$

em que n é o número de pontos em que actuam forças exteriores e δu_i é a variação de deslocamento do ponto de aplicação da força Q_i, na direcção desta força, mas provocado por outras cargas Q_j.

No caso geral de um corpo sujeito a um estado tridimensional de tensão e extensão, se lhe for aplicado uma deformação virtual, durante esta deformação desenvolve-se um trabalho virtual interno representado pela seguinte relação

$$\delta W_i \; = \int_V \left(\sigma_1 \, \delta\varepsilon_1 + \sigma_2 \, \delta\varepsilon_2 + \sigma_3 \, \delta\varepsilon_3 + \tau_{12} \, \delta\gamma_{12} + \tau_{23} \, \delta\gamma_{23} + \tau_{31} \, \delta\gamma_{31} \right) \; dV \, . \tag{4.80}$$

Para um corpo com uma forma qualquer, o cálculo deste integral pode não ser simples. Porém, para peças lineares o trabalho interno de deformação pode calcular-se a partir dos diagramas de esforços axiais, de esforços transversos, de momentos flectores e de momentos de torção, o que simplifica bastante o problema.

A viga representada na Figura 4.13a está sujeita a um sistema de forças exteriores Q_i qualquer em equilíbrio com as reacções nos apoios. Considere-se um outro carregamento constituído pelas forças Q_j (Figura 4.13b) em equilíbrio com as respectivas reacções de apoio, que induz na viga uma deformação virtual. No caso geral, a configuração de equilíbrio correspondente ao carregamento Q_j é diferente da configuração de equilíbrio correspondente ao carregamento Q_i. Se os pontos de aplicação do sistema de forças Q_i sofrerem deslocamentos δu_1, …, δu_i, $\ldots \delta u_n$ na direcção das forças Q_1, …, Q_i, $\ldots Q_n$, estas produzem um trabalho exterior durante a deformação virtual determinado pela relação

$$\delta W_e = \sum_{i=1}^{n} Q_i \; \delta u_i \, . \tag{4.81}$$

Para calcular o trabalho interno de deformação, considere-se um elemento da viga de comprimento infinitesimal $d\ell_1$. Neste elemento, devido à actuação do sistema de forças Q_i, actuam esforços axiais $N_{\ell_1}^{Q_i}$, esforços transversos, $V_{\ell_2}^{Q_i}$ e momentos flectores $M_{\ell_3}^{Q_i}$. Por seu lado, sob a actuação do sistema de forças Q_j, o mesmo elemento $d\ell_1$ sofre variação de comprimento, $\delta u_{\ell_1}^{Q_j}$, variação de rotação, $\delta\theta_{\ell_3}^{Q_j}$, e variação de deslocamento transversal entre duas secções transversais, $\delta u_{\ell_2}^{Q_j}$. Estes deslocamentos virtuais explicitam-se em função do esforço axial, $N_{\ell_1}^{Q_j}$, do esforço transverso, $V_{\ell_2}^{Q_j}$, e do momento flector, $M_{\ell_3}^{Q_j}$, respectivamente, que se desenvolvem devidos à actuação do sistema de forças Q_j, da forma seguinte

$$\delta u_{\ell_1}^{Q_j} = \frac{N_{\ell_1}^{Q_j}}{E\,A} d\ell_1\,;\ \delta\theta_{\ell_3}^{Q_j} = \frac{M_{\ell_3}^{Q_j}}{E\,I_{\ell_3}} d\ell_1;\ \delta u_{\ell_2}^{Q_j} = \frac{V_{\ell_2}^{Q_j}}{G\,A'_{\ell_2}} d\ell_1\,. \tag{4.82}$$

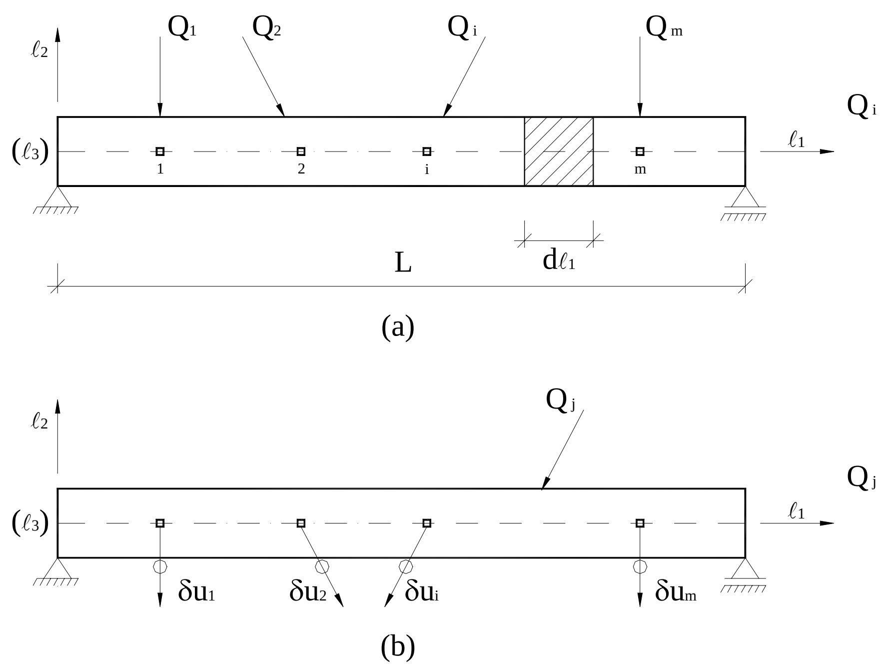


Figura 4.13 – Viga submetida a um conjunto de forças Q_i (a) e Q_j (b).

Aplicando o principio do trabalho virtual obtém-se

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} Q_i\ \delta u_i &= \int_0^L N_1^{Q_i}\,\delta u_1^{Q_j} + \int_0^L V_2^{Q_i}\,\delta u_2^{Q_j} + \int_0^L M_3^{Q_i}\,\delta\theta_3^{Q_j} \\ &= \int_0^L \frac{N_1^{Q_i}\ N_1^{Q_j}}{E\,A}\,d\ell_1 + \int_0^L \frac{V_2^{Q_i}\,V_2^{Q_j}}{G\,A_2^*}\,d\ell_1 + \int_0^L \frac{M_3^{Q_i}\ M_3^{Q_j}}{E\,I_3}\,d\ell_1\end{aligned}\,. \tag{4.83}$$

Neste exemplo não há momento torsor, M_1, mas se houvesse, o respectivo termo energético seria

$$\int_0^L \frac{M_1^{Q_i}\ M_1^{Q_j}}{G\ I_1}\,d\ell_1 \tag{4.84}$$

que deveria ser adicionado à parte da direita da expressão (4.83).

Exemplo de aplicação

Para a viga representada na Figura 4.14, de secção com largura *b* e altura *h*, e carregada como se exemplifica, calcular o deslocamento do ponto 1. Sob a carga *Q* a estrutura desenvolve esforços de corte, V_2^Q, e momentos flectores, M_3^Q, conforme se assinala na Figura 4.14a. Para calcular o deslocamento pedido aplica-se uma carga unitária no ponto 1, na direcção e sentido do deslocamento pretendido (Figura 4.14b). Sob a carga unitária, *F=1*, desenvolvem-se esforços de corte, $V_2^{F=1}$, e momentos flectores, $M_3^{F=1}$ (ver Figura 4.15).

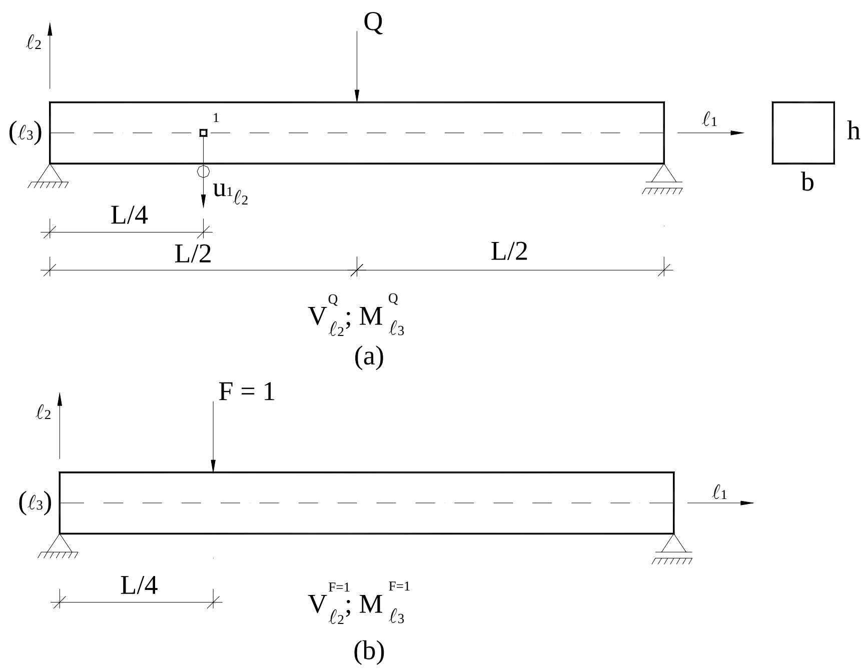


Figura 4.14 – Deslocamento u_2 devido à actuação da carga *Q*.

O trabalho virtual externo devido à actuação da força *F=1* para os deslocamentos reais, isto é, para os deslocamentos devidos à actuação da força *Q* é $\delta W_e = 1 \times u_{12}$, dado que no sistema correspondente à actuação *F=1*, além desta força, somente existem reacções de apoio, que, todavia, não produzem trabalho, pois são nulos os correspondentes deslocamentos na estrutura sob a carga *Q*.

O trabalho virtual das forças internas do sistema correspondente a *F=1* para os correspondentes deslocamentos do sistema de forças Q determina-se de

$$\delta W_i = \int_0^L V_2^Q \frac{V_2^{F=1}}{G A_2^*} d\ell_1 + \int_0^L M_3^Q \frac{M_3^{F=1}}{E I_3} d_{\ell_1} . \tag{4.85}$$

Assim, pelo teorema dos trabalhos vituais (T.T.V.) vem

$$
\begin{aligned}
1\times u_{12} &= \int_0^{L} V_2^{Q}\,\frac{V_2^{F=1}}{GA_2^{*}}\,d\ell_1 \;+\; \int_0^{L} M_3^{Q}\,\frac{M_3^{F=1}}{E\,I_3}\,d\ell_1 \\
&= \int_0^{L/4} \frac{\frac{Q}{2}\,\frac{3}{4}}{G\,A_2^{*}}\,d\ell_1 + \int_{L/4}^{L/2} \frac{\frac{Q}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)}{G\,A_2^{*}}\,d\ell_1 + \int_{L/2}^{L} \frac{\left(-\frac{Q}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)}{G\,A_2^{*}}\,d\ell_1 \;+ \\
&\int_0^{L/4} \frac{\frac{Q}{2}\,\ell_1\,\frac{3}{4}\,\ell_1}{E\,I_3}\,d\ell_1 \;+\; \int_{L/4}^{L/2} \frac{\frac{Q}{2}\,\ell_1\left[\frac{3}{16}L-\frac{1}{4}\left(\ell_1-\frac{L}{4}\right)\right]}{E\,I_3}\,d\ell_1 + \int_{L/2}^{L} \frac{\left[\frac{QL}{4}-\frac{Q}{2}\left(\ell_1-\frac{L}{2}\right)\right]\left[\frac{3}{16}L-\frac{1}{4}\left(\ell_1-\frac{L}{4}\right)\right]}{E\,I_3}\,d\ell_1
\end{aligned}
\qquad (4.86)
$$

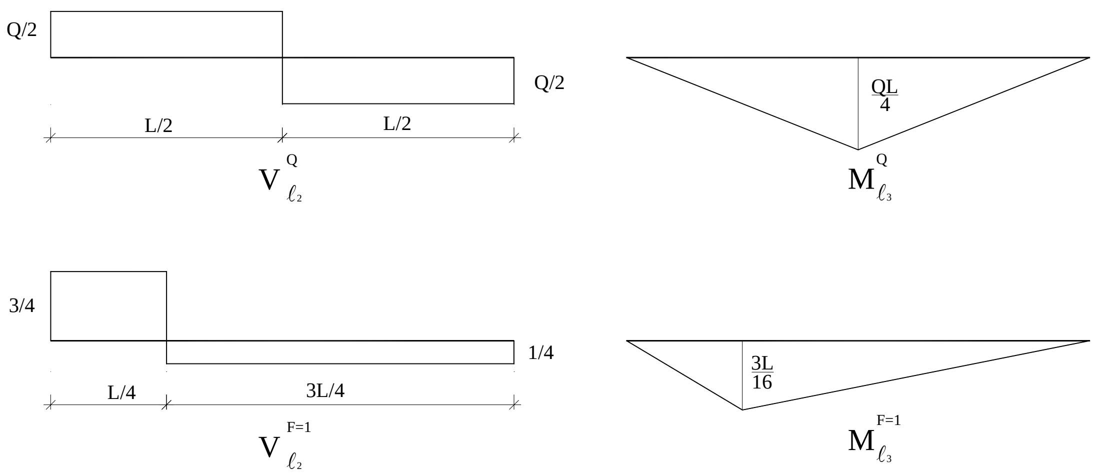


Figura 4.15 – Diagramas de esforços devidos à actuação da carga *Q* (a) e *F=1* (b).

4.4.3 – Princípio das forças virtuais

A um determinado corpo aplique-se um sistema de forças virtuais. Durante a deformação real do corpo estas forças efectuam um trabalho virtual complementar, que se decompõe em trabalho exterior e em trabalho interior ou de deformação.

Considere-se, por exemplo, a resultante das tensões virtuais normais à faceta $ABCD$ que é ortogonal ao eixo x_1 (ver Figura 4.16). Esta resultante denomina-se de força virtual, e o trabalho virtual complementar realizado na deformação de um elemento de comprimento dx_1 é

$$\left(\delta\sigma_1 dx_2\, dx_3\right)\left(\varepsilon_1 dx_1\right) = \delta\sigma_1\, \varepsilon_1 dV\,. \qquad (4.87)$$

No caso de um corpo submetido a estado tridimensional de tensão e de deformação obter-se-ia

$$\delta W_{ic} = \int_V \left(\delta\sigma_1\,\varepsilon_1 + \delta\sigma_2\,\varepsilon_2 + \delta\sigma_3\,\varepsilon_3 + \delta\tau_{12}\,\gamma_{12} + \delta\tau_{23}\,\gamma_{23} + \delta\tau_{31}\,\gamma_{31}\right) dV\,. \qquad (4.88)$$

Se a um corpo deformado se aplicar um sistema de forças virtuais estaticamente admissíveis, δQ_{Vi} e δQ_{Si}, desenvolvem-se tensões virtuais $\delta\sigma_{ij}$. Neste caso, as equações de equilíbrio indefinido

$$\frac{\partial\left(\delta\sigma_{ij}\right)}{\partial x_j} + \delta Q_{Vi} \;=\; 0 \tag{4.88}$$

e as equações de equilíbrio no contorno do corpo

$$\left(\delta\sigma_{ij}\right) n_j \;=\; \delta Q_{Si} \tag{4.89}$$

verificar-se-ão. O trabalho virtual interno complementar ou o trabalho de deformação complementar determina-se por intermédio da seguinte expressão

$$\delta W_{ic} \;=\; \int_V \varepsilon_{ij} \;\; \delta\sigma_{ij} \; dV \tag{4.90}$$

enquanto o trabalho virtual exterior complementar obtém-se de

$$\delta W_{ec} = \int_V u_i \;\; \delta Q_{Vi} \, dV \; + \; \int_S u_i \;\; \delta Q_{Si} \;\; dS \, . \tag{4.91}$$

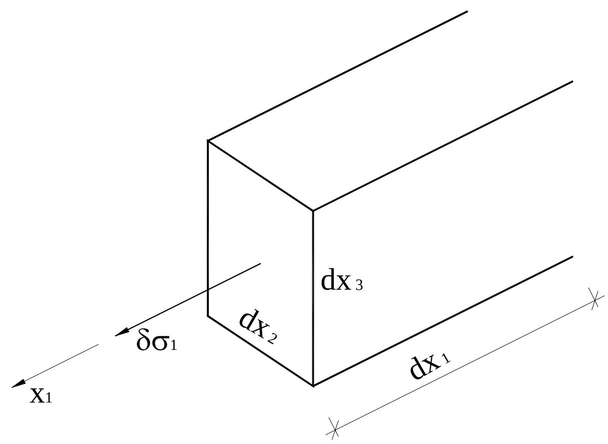


Figura 4.16 – Elemento de volume $dV = dx_1 \, dx_2 \, dx_3$ submetido a variação de tensão $\delta\sigma_1$.

Substituindo (4.88) e (4.89) em (4.91) obtém-se

$$\delta W_{ec} \;=\; - \int_V u_i \;\; \frac{\partial\left(\delta\sigma_{ij}\right)}{\partial x_j} \, dV \; + \; \int_S u_i \;\; \delta\sigma_{ij} \;\; n_j \;\; dS \, . \tag{4.92}$$

Segundo a regra da derivada do produto de duas funções

$$\int_V \frac{\partial\left(u_i \, \delta\sigma_{ij}\right)}{\partial x_j} \;\; dV \;\; = \;\; \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \;\; \delta\sigma_{ij} \;\; dV \; + \int_V u_i \;\; \frac{\partial\left(\delta\sigma_{ij}\right)}{\partial x_j} \;\; dV \tag{4.93}$$

pelo que (4.92) pode-se converter na equação

$$\delta W_{ec} \;=\; \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\;\delta\sigma_{ij}\,dV \;-\; \int_V \frac{\partial\left(u_i\;\delta\sigma_{ij}\right)}{\partial x_j}\;dV + \int_S u_i\;\delta\sigma_{ij}\;\;n_j\;dS\,. \qquad (4.94)$$

Segundo o teorema da divergência de Gauss

$$\int_V \frac{\partial\left(u_i\;\delta\sigma_{ij}\right)}{\partial x_j}\;dV \;=\; \int_S u_i\;\delta\sigma_{ij}\;n_j\;dS\,. \qquad (4.95)$$

Substituindo (4.95) em (4.94) obtém-se

$$\begin{aligned}\delta W_{ec} \;&=\; \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\;\delta\sigma_{ij}\,dV \;-\; \int_S u_i\;\delta\sigma_{ij}\;n_j\;dS \;+\; \int_S u_i\;\delta\sigma_{ij}\;n_j\;dS \\ &=\; \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\;\delta\sigma_{ij}\,dV\end{aligned}\,. \qquad (4.96)$$

Devido à simetria do tensor das tensões $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, pelo que (4.96) pode converter-se na seguinte expressão

$$\begin{aligned}\delta W_{ec} \;&=\; \int_V \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \;+\; \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\delta\sigma_{ij}\;\;dV \\ &=\; \int_V \varepsilon_{ij}\;\delta\sigma_{ij}\;\;dV\end{aligned} \qquad (4.97)$$

que é igual a (4.90), pelo que

$$\delta W_{ec} \;=\; \delta W_{ic}\,. \qquad (4.98)$$

Estas condições devem ocorrer para qualquer campo de tensões virtuais $\delta\sigma_{ij}$ estaticamente admissível. Pode-se assim enunciar o princípio do trabalho das forças vituais: *a condição necessária e suficiente para que um corpo deformável desenvolva deslocamentos cinematicamente admissíveis é que o trabalho exterior complementar seja igual ao trabalho interior complementar, para todo o sistema de forças virtuais estaticamente admissíveis, i.e.,* $\delta W_{ec} \;=\; \delta W_{ic}$.

Tendo em conta as expressões (4.91) e (4.97), a igualdade anterior pode ser representada, em notação matricial, pela seguinte

$$\int_V \underline{U}^T\;\delta\underline{Q}_V\;dV \;+\; \int_S \underline{U}^T\;\delta\underline{Q}_S\;dS \;\;=\;\; \int_V \underline{\varepsilon}^T\,\delta\underline{\sigma}\,dV \qquad (4.99)$$

Exemplo de aplicação

Considere a viga representada na Figura 4.17. A viga está encastrada na extremidade B e simplesmente apoiada na extremidade A. Em A actua um momento M_A. Neste apoio desenvolve-se uma reacção R_A, que se pretende determinar. À distância x_1 do apoio A ocorrem tensões axiais determinadas por intermédio da seguinte expressão

$$\sigma_1 = \frac{M_3}{I_3} x_2 = \frac{R_A x_1 + M_A}{I_3} x_2 .$$

Na Figura 4.17b representa-se um sistema de forças virtuais estaticamente admissíveis. O trabalho destas forças virtuais nos deslocamentos da acção real (constituída pelo momento M_A), δW_{ec}, é nulo porque o sistema de forças virtuais δQ e $L\delta Q$ não produz trabalho, dado os que pontos em correspondência com δQ e $L\delta Q$, na estrutura real, não sofrem deslocamentos. O trabalho interno complementar é

$$\begin{aligned}
\delta W_{ic} &= \int_V \varepsilon_1 \delta\sigma_1 \, dV \\
&= \int_V \frac{\sigma_1}{E} \delta\sigma_1 \, dV \\
&= \int_V \frac{R_A x_1 + M_A}{EI_3} x_2 \; \frac{\delta Q\, x_1}{I_3} x_2 \, dV \\
&= \int_L \frac{R_A x_1 + M_A}{EI_3} \; \frac{\delta Q\, x_1}{I_3} \left(\int_A x_2^2 \, dA \right) dx_1
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\delta\sigma_1 &= \frac{\delta M_3(x_1)}{I_3} x_2 \\
&= \frac{\delta Q \; x_1}{I_3} x_2
\end{aligned}$$

e

$$I_3 = \int_A x_2^2 \, dA .$$

Por integração obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta W_{ic} &= \frac{\delta Q}{EI_3} \int_L \left(R_A x_1 + M_A \right) x_1 \, dx_1 \\
&= \frac{\delta Q}{EI_3} \left(\frac{R_A L^3}{3} + M_A \frac{L^2}{2} \right)
\end{aligned} .$$

Pelo teorema das forças virtuais sabe-se que $\delta W_{ec} = \delta W_{ic}$ pelo que

$$0 = \frac{R_A \, L^3}{3EI_3} + \frac{M_A L^2}{2EI_3}$$

que permite determinar a incógnita R_A. Esta relação é uma equação de compatibilidade dos deslocamentos.

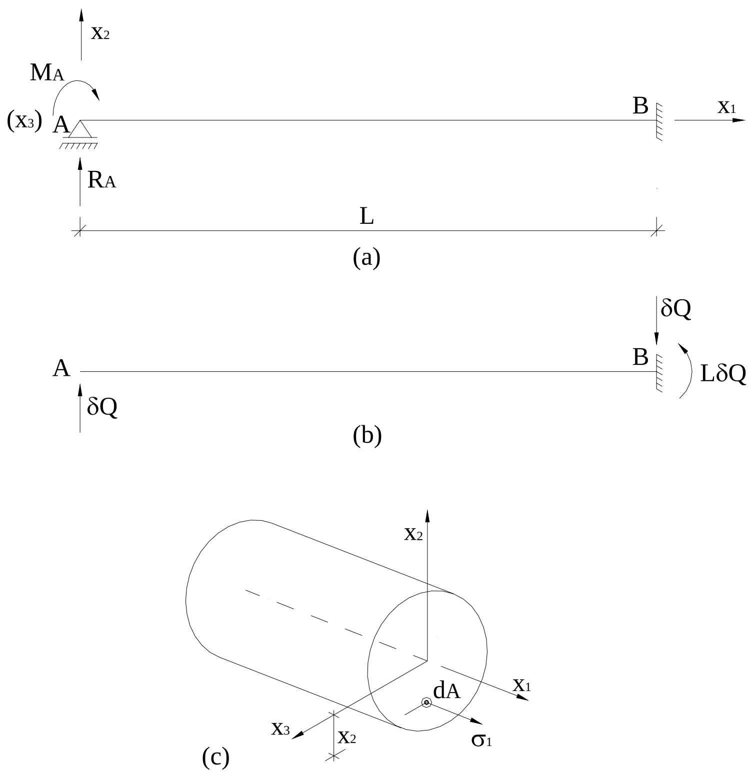


Figura 4.17 – Exemplo de aplicação.

4.5 – Teorema de Clapeyron

Na secção 4.4 verificou-se que, quando um determinado corpo é sujeito a um conjunto de forças exteriores, a variação de trabalho externo e de trabalho interno realizados durante uma deformação virtual imposta ao corpo obtêm-se por intermédio das expressões (4.59) e (4.80). Constatou-se ainda que, no caso das forças exteriores se reduzirem a um conjunto de *n* forças aplicadas em pontos (acções e reacções), a variação de trabalho externo obtém-se por meio da expressão (4.79).

Sem perda de generalizada, mas apenas por motivo de simplificação da exposição, considere-se que um determinado corpo está submetido a um conjunto de forças aplicadas em pontos do seu contorno. Admitindo-se que não há assentamentos nos apoios da estrutura, o trabalho realizado pelas forças de reacção é nulo. Atendendo ao princípio dos trabalhos virtuais (mais propriamente, ao princípio dos deslocamentos virtuais), sabe-se que o trabalho externo é igual ao trabalho interno realizados durante a deformação virtual aplicada ao corpo, isto é (ver Figura 4.18),

$$\int_0^{u_i} \sum_{i=1}^{n} Q_i \; \delta u_i = \int_V \int_0^{\varepsilon_i} \left(\sigma_1 \, \delta\varepsilon_1 + \sigma_2 \, \delta\varepsilon_2 + \sigma_3 \, \delta\varepsilon_3 + \tau_{12} \, \delta\gamma_{12} + \tau_{23} \, \delta\gamma_{23} + \tau_{31} \, \delta\gamma_{31} \right) dV \quad (4.100)$$

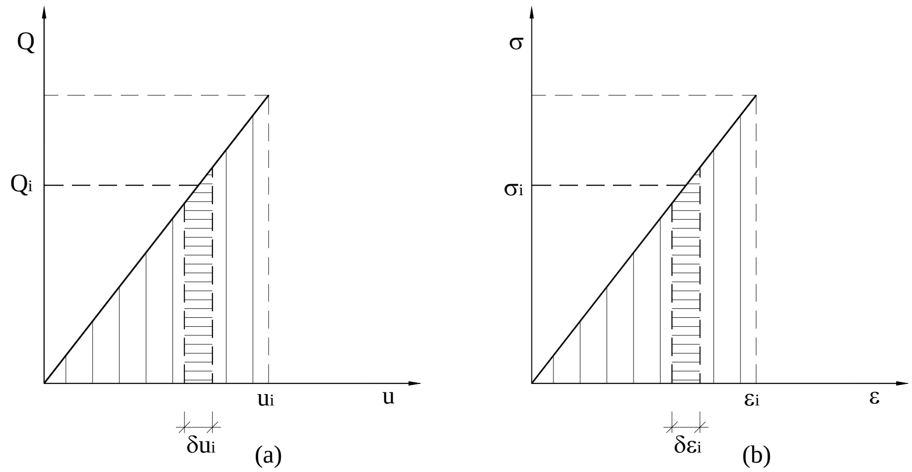


Figura 4.18 – Trabalho externo (a) e interno (b) quando as acções aumentam desde o valor nulo até ao seu valor final. Representação a uma dimensão.

Considerando a lei de hooke estabelecida em termos de grandezas virtuais (ver secção 2.8, expressões (2.47)),

$$
\begin{aligned}
&\delta\varepsilon_1 = \frac{\delta\sigma_1}{E} - \upsilon\,\frac{\delta\sigma_2 + \delta\sigma_3}{E} + \alpha\,\delta t \\
&\delta\varepsilon_2 = \frac{\delta\sigma_2}{E} - \upsilon\,\frac{\delta\sigma_3 + \delta\sigma_1}{E} + \alpha\,\delta t \\
&\delta\varepsilon_3 = \frac{\delta\sigma_3}{E} - \upsilon\,\frac{\delta\sigma_1 + \delta\sigma_2}{E} + \alpha\,\delta \\
&\delta\gamma_{12} = \frac{\delta\tau_{12}}{G} \\
&\delta\gamma_{23} = \frac{\delta\tau_{23}}{G} \\
&\delta\gamma_{31} = \frac{\delta\tau_{31}}{G}
\end{aligned}
\tag{4.101}
$$

em que δt é a variação de temperatura. Substituindo (4.101) em (4.100) e integrando ao longo do campo de deformações obtém-se (ver Anexo A4.1)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i\,u_i \;=\; & \frac{1}{2E}\int_V \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) dV - \frac{\upsilon}{E}\int_V \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right) dV \\
& + \frac{1}{2G}\int_V \left(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2\right) dV + \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)\alpha\, t\, dV
\end{aligned}
\tag{4.102}
$$

em que

$$
\frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)\alpha\, t\, dV \;=\; W_{i,t}
\tag{4.103}
$$

é o trabalho por deformação térmica. Assim, em (4.102) o trabalho interno denomina-se de trabalho de deformação termo-elástica. Se em vez de se considerar que as forças exteriores aumentam lenta e gradualmente desde zero até ao seu valor final, se se admitir que as forças exteriores são aplicadas com o seu valor final (ver Figura 4.19), e aplicando o príncipio dos trabalhos virtuais ao equilíbrio final do corpo, tomando como deformação virtual a deformação real obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\, u_i = \int_V \left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3 + \tau_{12}\gamma_{12} + \tau_{23}\gamma_{23} + \tau_{31}\gamma_{31} \right) dV \ . \qquad (4.104)$$

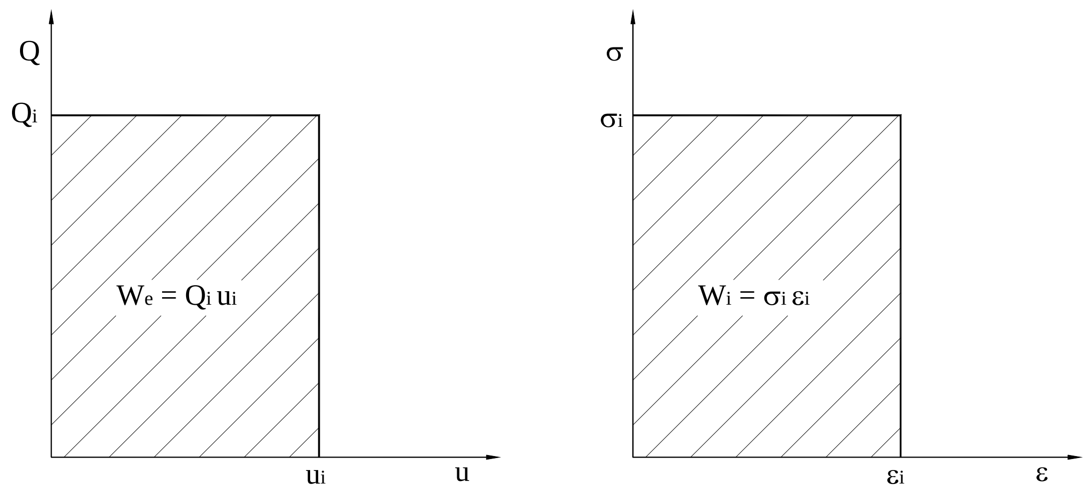


Figura 4.19 – Trabalho externo (a) e interno (b) quando as acções são aplicadas como seu valor final. Representação a uma dimensão.

Substituindo (2.47) em (4.104) e tendo em conta a extensão por variação de temperatura, *t*, obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} Q_i\, u_i = {} & \frac{1}{E}\int_V \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \right) dV - \frac{2\upsilon}{E}\int_V \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \right) dV \\ & + \frac{1}{G}\int_V \left(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 \right) dV + \int_V \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \right) \alpha\, t \ dV \end{aligned} \ . \qquad (4.105)$$

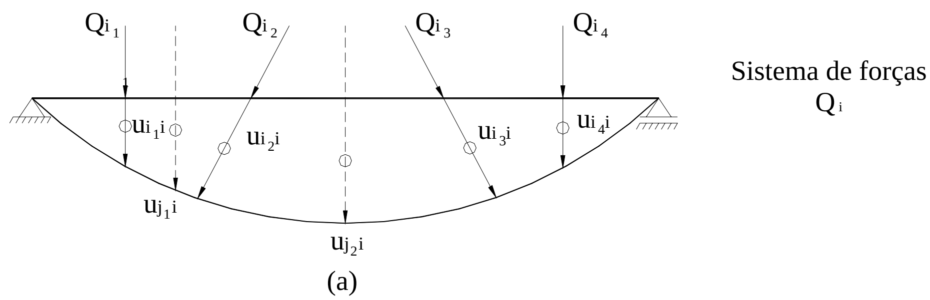
Comparando (4.102) com (4.105) verifica-se que esta última é o dobro da primeira, pelo que,

$$\left. \sum_{i=1}^{n} Q_i\, u_i \right|_{Q_i=0}^{Q_i=Q} = \frac{1}{2} \left. \sum_{i=1}^{n} Q_i\, u_i \right|_{Q_i=Q} \ . \qquad (4.106)$$

Pode-se assim enunciar o teorema de Clapeyron: *se um corpo, inicialmente descarregado é solicitado por acções exteriores (forças de volume, forças de superfície, temperatura, assentamentos de apoio) que aumentam gradual e lentamente desde zero até ao seu valor final, o trabalho produzido na deformação elástica do corpo, se esta se realiza em regime de elasticidade perfeita, é independente da ordem de aplicação das forças e da sua lei de variação, e tem metade do valor que teria se as acções exteriores fossem logo aplicadas com o seu valor final*.

4.6 – Teorema de Betti

Considere-se que a viga representada na Figura 4.20 tem comportamento linear e elástico quando submetida a qualquer sistema de forças exteriores. A essa viga vai-se aplicar dois sistemas de forças exteriores, independentes e em equilíbrio, Q_i e Q_j. Sob o primeiro sistema de forças, Q_i, a viga deforma-se desenvolvendo-se deslocamentos u_i sob os pontos de aplicação das forças Q_i e segundo a direcção dessas forças (ver Figura 4.20a). Aplicando o sistema de forças Q_j, a viga deforma-se, e os pontos de aplicação das forças Q_j deslocam-se de u_j na direcção dessas forças (ver Figura 4.20b).



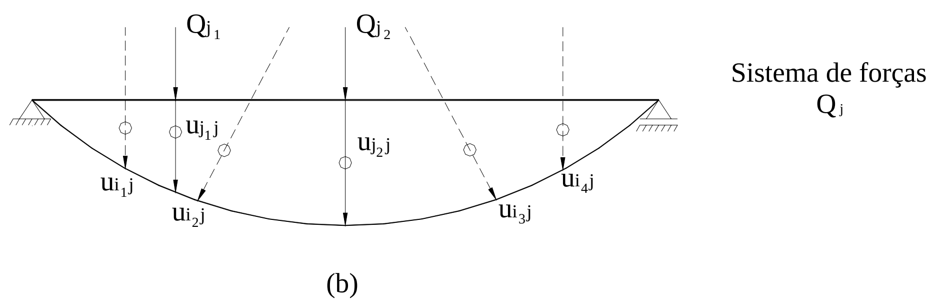


Figura 4.20 – Deformação de viga sob um sistema de forças Q_i (a) e Q_j (b).

Aplicando o teorema dos trabalhos virtuais a cada um dos sistemas de forças em equilíbrio, tomando como deformação virtual a deformação produzida pelo outro sistema de forças pode-se verificar que o trabalho produzido pelo sistema de forças Q_i na deformação induzida pelo sistema de forças Q_j,

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{i_k}\, u_{i_k j} = \int_V \left(\sigma_{1i}\varepsilon_{1j} + \sigma_{2i}\varepsilon_{2j} + \sigma_{3i}\varepsilon_{3j} + \tau_{12i}\gamma_{12j} + \tau_{23i}\gamma_{23j} + \tau_{31i}\gamma_{31j}\right) dV \qquad (4.107)$$

é igual ao trabalho produzido pelo sistema de forças Q_j na deformação virtual induzida pelo sistema de forças Q_i.

$$\sum_{\ell=1}^{m} Q_{j_\ell}\, u_{j_\ell i} = \int_V \left(\sigma_{1j}\varepsilon_{1i} + \sigma_{2j}\varepsilon_{2i} + \sigma_{3j}\varepsilon_{3i} + \tau_{12j}\gamma_{12i} + \tau_{23j}\gamma_{23i} + \tau_{31j}\gamma_{31i}\right) dV \qquad (4.108)$$

em que Q_{i_k} é componente k do sistema de forças Q_i (admite-se que este sistema é constituído por n componentes), Q_{j_ℓ} é componente ℓ do sistema de forças Q_j (admite-se que este sistema é constituído por m componentes), $u_{i_k j}$ é o deslocamento do ponto de aplicação da componente k do sistema de forças Q_i, Q_{i_k}, devido à actuação do sistema de forças Q_j, e $u_{j_\ell i}$ é o deslocamento do ponto de aplicação da componente ℓ do sistema de forças Q_j, Q_{j_ℓ}, devido à actuação do sistema de forças Q_i. Por sua vez, $\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \sigma_{3i}, \tau_{12i}, \tau_{23i}, \tau_{31i}$ e $\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}, \varepsilon_{3i}, \gamma_{12i}, \gamma_{23i}, \gamma_{31i}$ são as componentes de tensão e extensão devidas à actuação do sistema de forças Q_i, enquanto $\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \sigma_{3j}, \tau_{12j}, \tau_{23j}, \tau_{31j}$ e $\varepsilon_{1j}, \varepsilon_{2j}, \varepsilon_{3j}, \gamma_{12j}, \gamma_{23j}, \gamma_{31j}$ são as componentes de tensão e extensão devidas à actuação do sistema de forças Q_j.

Se se considerar os sistemas de forças Q_i e Q_j e os deslocamentos produzidos por estes sistemas de forças, representados na Figura 4.20, obtém-se,

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{i_k} u_{i_k j} = Q_{i_1} u_{i_1 j} + Q_{i_2} u_{i_2 j} + Q_{i_3} u_{i_3 j} + Q_{i_4} u_{i_4 j} \tag{4.109}$$

e

$$\sum_{\ell=1}^{m} Q_{j_\ell} u_{j_\ell i} = Q_{j_1} u_{j_1 i} + Q_{j_2} u_{j_2 i} . \tag{4.110}$$

Se as componentes de extensão em (4.107) e (4.108) forem substituídas pelas relações estabelecidas segundo a lei de Hooke (2.47), verifica-se que a expressão do trabalho interno é igual nas duas relações, pelo que,

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{i_k} u_{i_k j} = \sum_{\ell=1}^{m} Q_{j_\ell} u_{j_\ell i} . \tag{4.111}$$

podendo-se enunciar o teorema de Betti da seguinte forma: *se um corpo, isento de variações de temperatura e de assentamento de apoios, está em equilíbrio elástico sob a acção de dois sistemas independentes de forças exteriores, o trabalho virtual do primeiro sistema de forças na deformação produzida pelo segundo sistema de forças, é igual ao trabalho virtual produzido pelo segundo sistema de forças na deformação devida ao primeiro sistema de forças*.

A relação estabelecida em (4.111) pode também ser obtida por intermédio do procedimento que se passa a descrever.

Considere-se que determinada estrutura, por exemplo a viga com comportamento linear-elástico representada na Figura 4.21, é sujeita a um sistema de forças Q_i que aumentam lenta e gradualmente desde zero até ao seu valor final. Este sistema de forças provoca uma deformação na viga, pelo que os pontos de aplicação das forças Q_i deslocam-se u_i na direcção das referidas forças. Durante esta deformação o trabalho externo (igual ao interno segundo o princípio dos trabalhos virtuais) obtém-se a partir da seguinte relação,

$$W_{e,1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_{i_k} u_{i_k i} = \frac{1}{2}\sum Q_i f_{ii} . \tag{4.112}$$

em que $u_{i_k i}$ representa o deslocamento do ponto de aplicação da componente Q_{ik} do sistema de forças Q_i. Quando $Q_{ik} = 1$

$$u_{i_k i} = f_{ii} \ , \tag{4.113}$$

que representa a flexibilidade da viga para o deslocamento considerado.

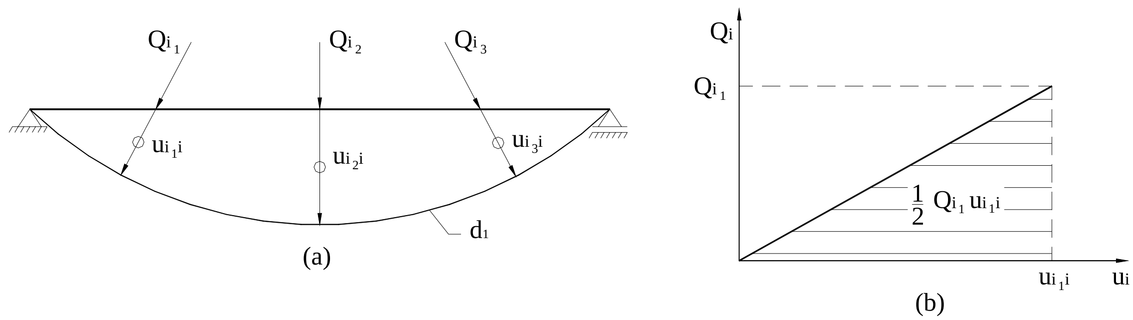


Figura 4.21 – Deformação de viga sob um sistema de forças Q_i (a) e representação do trabalho produzido por uma componente de força do sistema Q_i (b).

No caso da figura 4.21 (4.112) reduz-se a,

$$W_{e,1} = \frac{1}{2}\left(Q_{i_1}\, u_{i_1 i} + Q_{i_2}\, u_{i_2 i} + Q_{i_3}\, u_{i_3 i}\right). \tag{4.114}$$

Aplicando em seguida, à mesma viga, o sistema de forças Q_j que aumentam lenta e gradualmente desde zero até ao seu valor final, o trabalho produzido é o seguinte (ver Figura 4.22),

$$W_{e,2} = \sum_{k=1}^{n} Q_{i_k}\, u_{i_k j} + \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{m} Q_{j_\ell}\, u_{j_\ell j} \tag{4.115a}$$

ou

$$W_{e,2} = \sum Q_i\, f_{ij} + \frac{1}{2}\sum Q_j\, f_{jj} \tag{4.115b}$$

que no caso da Figura 4.22 se reduz a (ver também Figura 4.23)

$$W_{e,2} = Q_{i_1}\, u_{i_1 j} + Q_{i_2}\, u_{i_2 j} + Q_{i_3}\, u_{i_3 j} + \frac{1}{2}\left(Q_{j_1}\, u_{j_1 j} + Q_{j_2}\, u_{j_2 j}\right). \tag{4.116}$$

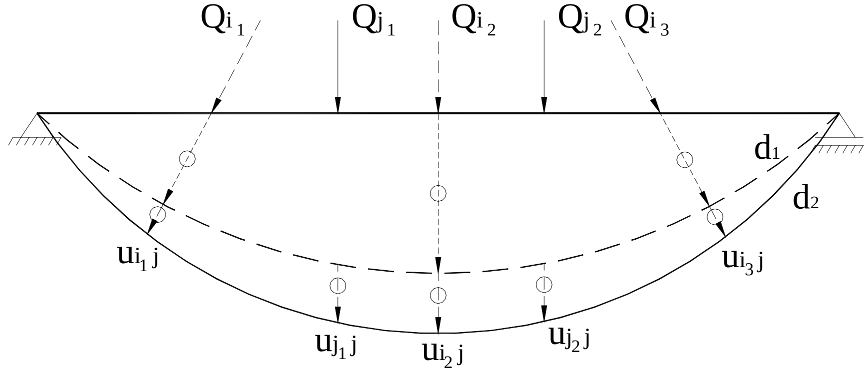


Figura 4.22 – O sistema de forças Q_j introduz um acréscimo de deformação na viga já sujeita ao sistema de forças Q_i.

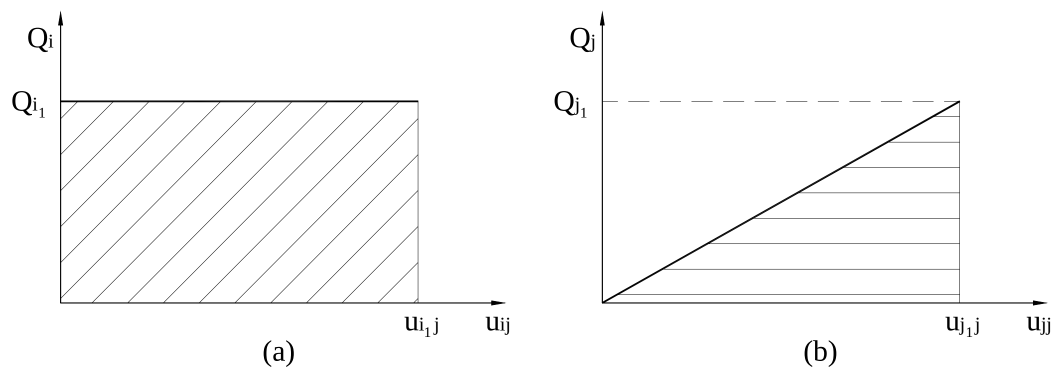


Figura 4.23 – Trabalho produzido pelo sistema de forças Q_i durante a deformação devida ao sistema de forças Q_j (a). Trabalho produzido pelo sistema de forças Q_j durante a deformação devida a este sistema de forças (b).

Em (4.115b) f_{ij} é o deslocamento do ponto de aplicação de Q_i, na sua direcção, devido à actuação de Q_j=1. Por sua vez, f_{jj} é o deslocamento do ponto de aplicação de Q_j, na sua direcção, devido à actuação de Q_j=1. Assim, o trabalho exterior devido à aplicação do sistema de forças Q_i seguido do sistema de forças Q_j é o seguinte

$$W_e = W_{e,1} + W_{e,2} = \frac{1}{2}\sum Q_i\ f_{ii} + \sum Q_i\ f_{ij} + \frac{1}{2}\sum Q_j\ f_{jj}\ . \tag{4.117}$$

Considere-se agora o caso em que primeiro se aplica o sistema de forças Q_j, seguido do sistema de forças Q_i. Esta situação está representada nas Figuras 4.24 a 4.26. Desenvolvendo procedimento semelhante ao acabado de descrever obtém-se

$$W_{e,1}^{'} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{m} Q_{j_\ell}\ u_{j_\ell j}\ . \tag{4.118a}$$

ou

$$W_{e,1}^{'} = \frac{1}{2}\sum Q_j\ f_{jj}\ . \tag{4.118b}$$

e

$$W_{e,2}^{'}=\sum_{\ell=1}^{m}Q_{j_\ell}\,u_{j_\ell i}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}Q_{i_k}\,u_{i_k i} \tag{4.119a}$$

ou

$$W_{e,2}^{'}=\sum Q_j\,f_{ji}+\frac{1}{2}\sum Q_i\,f_{ii} \tag{4.119b}$$

pelo que

$$W_e^{'}=W_{e,1}^{'}+W_{e,2}^{'}=\frac{1}{2}\sum Q_j\,f_{jj}+\sum Q_j\,f_{ji}+\frac{1}{2}\sum Q_i\,f_{ii}\,. \tag{4.120}$$

Como $W_e=W_e^{'}$ obtém-se

$$\sum Q_i\,f_{ij}=\sum Q_j\,f_{ji}\,. \tag{4.121}$$

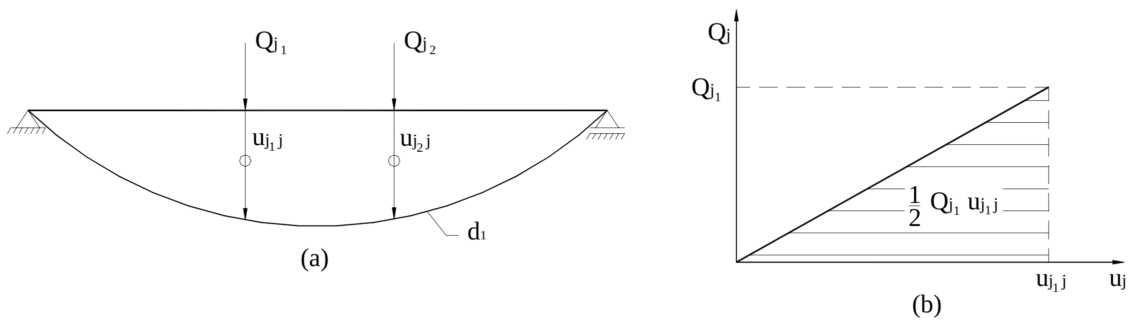


Figura 4.24 – Deformação de viga sob um sistema de forças Q_j (a) e representação do trabalho produzido por uma componente de força do sistema Q_j (b).

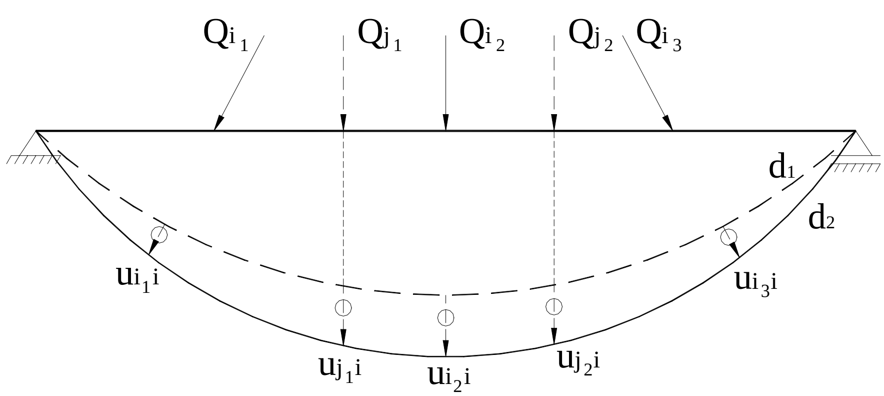


Figura 4.25 – O sistema de forças Q_i introduz um acréscimo de deformação na viga já sujeita ao sistema de forças Q_j.

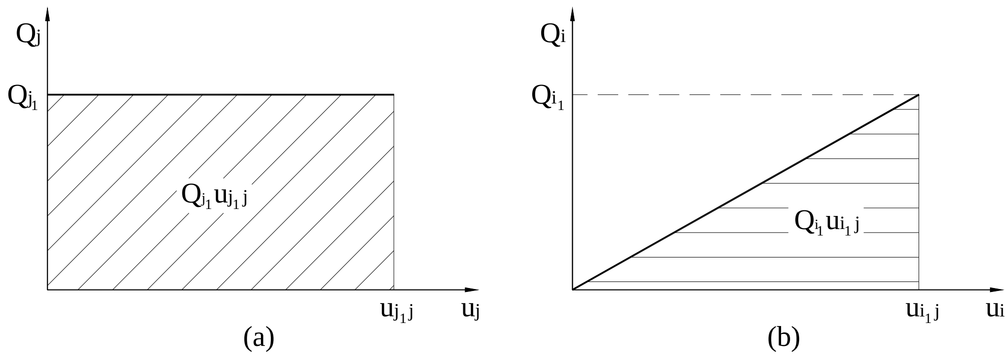


Figura 4.26 – Trabalho produzido pelo sistema de forças Q_j durante a deformação devida ao sistema de forças Q_i (a). Trabalho produzido pelo sistema de forças Q_i durante a deformação devida a este sistema de forças (b).

Pode-se facilmente provar que o teorema de Betti resulta directamente do teorema dos trabalhos virtuais. Para tal considere-se ainda a viga representada na 4.20. Quando a viga é sujeita a um sistema de forças exteriores Q_i desenvolvem-se deslocamentos u_i, esforços e correspondentes deformações. No caso desta viga desenvolvem-se esforços axiais, N_{1i}, esforços de corte segundo o eixo ℓ_2, V_{2i}, e momentos flectores segundo o eixo ℓ_3, M_{3i}. Um elemento de comprimento infinitesimal $d\ell_1$ submetido a estes esforços sofre deformações axiais, de corte e de flexão que se obtêm por intermédio das seguintes expressões,

$$\frac{N_{1i}}{EA}d\ell_1;\ \frac{V_{2i}}{GA_2^*}d\ell_1,\ \frac{M_{3i}}{EI_3}d\ell_1. \tag{4.122}$$

Por sua vez, quando a viga é submetida a um sistema de forças Q_j desenvolve deslocamentos u_j, esforços N_{1j}, V_{2j} e M_{3j}, e deformações determinadas pelas expressões,

$$\frac{N_{1j}}{EA}d\ell_1;\ \frac{V_{2j}}{GA_2^*}d\ell_1,\ \frac{M_{3j}}{EI_3}d\ell_1. \tag{4.123}$$

Segundo o teorema dos trabalhos virtuais, o trabalho externo produzido pelo sistema de forças exteriores Q_i nos deslocamentos devidos à actuação do sistema de forças exteriores Q_j (u_{ij}) é igual ao trabalho interno realizado pelos esforços induzidos pelo sistema de forças Q_i (N_{1i}, V_{2i}, M_{3i}) nas deformações internas provocadas pelo sistema de forças Q_j ($\left(N_{1j}d\ell_1\right)/EA$, $\left(V_{2j}d\ell_1\right)/GA_2^*$, $\left(M_{3j}d\ell_1\right)/EI_3$), isto é,

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{i_k}\, u_{i_k j} = \int_L N_{1i}\frac{N_{1j}}{EA}d\ell_1 + \int_L V_{2i}\frac{V_{2j}}{GA_2^*}d\ell_1 + \int_L M_{3i}\frac{M_{3j}}{EI_3}d\ell_1. \tag{4.124}$$

Por outro lado sabe-se ainda que, pela aplicação do teorema dos trabalhos virtuais, o trabalho externo produzido pelo sistema de forças exteriores Q_j nos deslocamentos devidos à actuação do sistema de forças exteriores Q_i (u_{ji}) é igual ao trabalho interno realizado pelos esforços induzidos pelo sistema de forças Q_j (N_{1j}, V_{2j}, M_{3j}) nas deformações internas provocadas pelo sistema de forças Q_i ($\left(N_{1i}d\ell_1\right)/EA$, $\left(V_{2i}d\ell_1\right)/GA_2^*$, $\left(M_{3i}d\ell_1\right)/EI_3$), isto é,

$$\sum_{\ell=1}^{m} Q_{j_\ell} \, u_{j_\ell i} = \int_L N_{1j} \frac{N_{1i}}{EA} d\ell_1 + \int_L V_{2j} \frac{V_{2i}}{GA_2^*} d\ell_1 + \int_L M_{3j} \frac{M_{3i}}{EI_3} d\ell_1 \,. \tag{4.125}$$

Como os termos da direita das relações (4.124) e (4.125) são iguais, resulta a igualdade (4.111).

4.7 – Teorema de Maxwell ou teorema da reciprocidade dos deslocamentos elásticos

O teorema de Maxwell, também designado por teorema da reciprocidade dos deslocamentos elásticos é um corolário do teorema de Betti. Considere-se um corpo submetido a duas configurações de equilíbrio independentes. A primeira configuração (ver Figura 4.27a) é constituída por uma carga unitária no ponto *i*, $Q_i=1$. A segunda configuração (ver Figura 4.27b) é consituída por uma carga unitária no ponto *j*, $Q_j=1$.

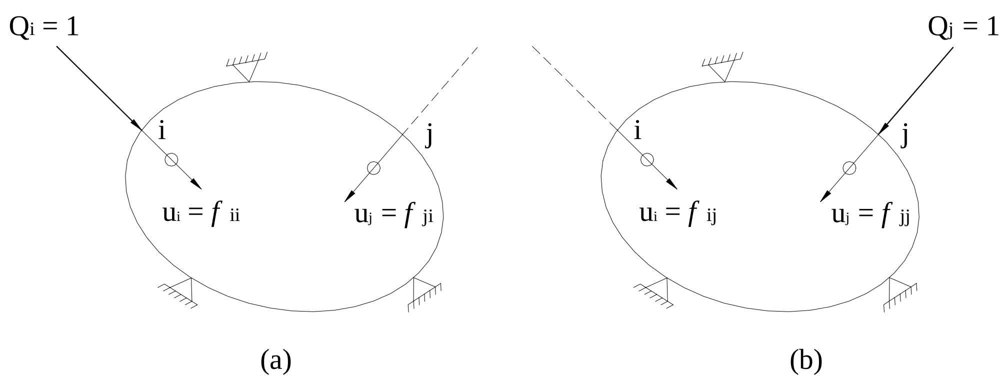


Figura 4.27 – Configuração de equilíbrio $Q_i=1$ (a) e $Q_j=1$ (b).

Sob a aplicação da configuração $Q_i=1$ o ponto de aplicação desta força desloca-se de $u_i = f_{ii}$ segundo a direcção de Q_i, enquanto o ponto *j* desloca-se de $u_j = f_{ji}$ segundo a direcção de Q_j, que nesta configuração tem valor nulo.

Sob a aplicação da configuração $Q_j=1$ o ponto de aplicação desta força desloca-se de $u_j = f_{jj}$ segundo a direcção de Q_j, enquanto o ponto *i* desloca-se de $u_i = f_{ij}$ segundo a direcção de Q_i, que nesta configuração tem valor nulo.

Como em qualquer das configurações as reacções não produzem trabalho, dado não haver assentamentos de apoios, a aplicação do teorema de Betti resulta na seguinte relação,

$$1\times f_{ij} + 0\times f_{jj} = 1\times f_{ji} + 0\times f_{ii} \tag{4.126}$$

pelo que

$$f_{ij} = f_{ji} \tag{4.127}$$

podendo-se enunciar o teorema de Maxwell ou teorema da reciprocidade dos deslocamentos elásticos da seguinte forma: *se um corpo, isento de variações de temperatura e de* *assentamentos de apoios, é solicitado, independentemente, por duas forças unidade, a actuar em dois pontos do corpo e em direcções dadas, o deslocamento elástico do primeiro ponto, na primeira direcção, provocado pela força unidade no segundo ponto e na segunda direcção, é igual ao deslocamento elástico do segundo ponto, na segunda direcção, provocado pela acção da força unidade no primeiro ponto, na primeira direcção.*

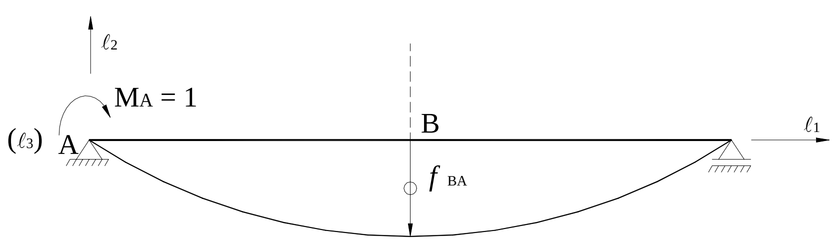
A relação (4.127) indica que o deslocamento de um ponto i devido à actuação de uma força de valor unitário aplicada num ponto j, f_{ij}, de um corpo elástico é igual ao deslocamento de um ponto j devido à actuação de uma força de valor unitário aplicada num ponto i, f_{ji}. O valor das forças aplicadas não têm que ter necessariamente valor unitário. O que têm que ter é o mesmo valor, dado que assim,

$$Q\, f_{ij} = Q\, f_{ji} \tag{4.128}$$

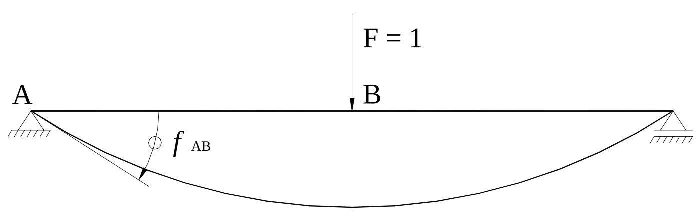
em que Q representa o valor da força aplicada quer no ponto i quer no ponto j. A relação (4.128) degenera na relação (4.127). Os termos f_{ij} e f_{ji} são os coeficientes de influência das forças Q_j e Q_i, respectivamente, já referidos em secções anteriores. No sentido mais geral, a relação (4.123) significa que a matriz de flexibilidade é simétrica.

Exemplo de aplicação

Considere que a viga representada na Figura 4.28a se comporta em regime linear-elástico. Sabendo que sob o momento M_A aplicado na extremidade esquerda da viga, esta sofre um deslocamento vertical, descendente, a meio vão, de valor $M_A L^2/(16EI_3)$, determine a rotação nesta extremidade devida à actuação de uma força F, descendente, aplicada a meio vão.



(a)



(b)

Figura 4.28 – Viga submetida a momento aplicado na secção A (a) e força aplicada na secção B (b).

Resolução:

Se M_A=*1*, o deslocamento do ponto de aplicação F devido à actuação de M_A, $u_B = f_{BA}$, será igual a $L^2/(16EI_3)$. Pelo teorema da reciprocidade dos deslocamentos sabe-se que se F=*1*, o deslocamento do ponto de aplicação de M_A devido à actuação de F, f_{AB} é igual a f_{BA}, pelo que $f_{AB} = L^2 / (16EI_3)$.

4.8 – Teorema complementar do teorema de Maxwell ou teorema da reciprocidade das forças

O teorema complementar de Maxwell, também designado por teorema da reciprocidade das forças é um corolário do teorema de Betti. Considere-se um corpo submetido a duas configurações de equilíbrio independentes. A primeira configuração (ver Figura 4.29a) é constituída por uma força no ponto i, $Q_i=k_{ii}$, que produz um deslocamento unitário $u_i=1$ deste ponto segundo a direcção de Q_i, e por uma força $Q_j=k_{ji}$ no ponto j que impede que este ponto se desloque segundo a direcção de Q_j. A segunda configuração (ver Figura 4.29b) é constituída por uma força no ponto j, $Q_j=k_{jj}$, que produz um deslocamento unitário $u_j=1$ deste ponto segundo a direcção de Q_j, e por uma força $Q_i=k_{ij}$ no ponto i que impede que este ponto se desloque segundo a direcção de Q_i.

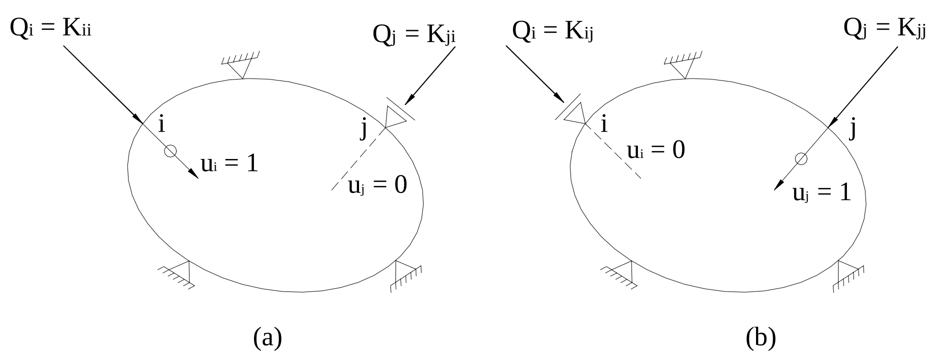


Figura 4.29 – Configuração de equilíbrio $u_i=1$ e nulos os restantes deslocamentos (a) e $u_j=1$ e nulos os restantes deslocamentos (b).

Aplicando o teorema de Betti às duas configurações de equilíbrio resulta,

$$k_{ii} \times 0 + k_{ji} \times 1 = k_{ij} \times 1 + k_{jj} \times 0 \tag{4.129}$$

pelo que

$$k_{ji} = k_{ij} \tag{4.130}$$

podendo-se enunciar o teorema complementar de Maxwell ou teorema da reciprocidade das forças da seguinte forma: *se um corpo, isento de variações de temperatura e de assentamentos de apoios, está submetido a duas deformações elásticas independentes, cada uma produzindo o deslocamento unidade de um ponto, em certa direcção, a força actuando no primeiro ponto e na primeira direcção, capaz de produzir o deslocamento unidade no segundo ponto e na segunda direcção, é igual à força que, actuando no segundo ponto e na segunda direcção é capaz de produzir o deslocamento unidade do primeiro ponto na primeira direcção.*

A relação (4.130) indica que a força aplicada num ponto *j* necessária para impedir o deslocamento desse ponto segundo a força Q_j, quando no ponto *i* se impõe um deslocamento unitário u_i=1, k_{ji}, é igual à força aplicada num ponto *i* necessária para impedir o deslocamento desse ponto segundo a carga Q_i quando no ponto *j* se impõe um deslocamento unitário u_j=1, k_{ij}.

O valor dos deslocamentos impostos nos pontos *i* e *j* não têm que ter necessariamente valor unitário. O que têm que ter é o mesmo valor, dado que assim,

$$k_{ji}u = k_{ij}u \iff k_{ji} = k_{ij} \tag{4.131}$$

em que *u* representa o valor do deslocamento aplicado no ponto *i* e no ponto *j*. k_{ij} e k_{ji} são os coeficientes de influência dos deslocamentos u_j e u_i, respectivamente, já referidos em secções anteriores. No sentido mais geral, a relação (4.130) significa que a matriz de rigidez é simétrica.

Exemplo de aplicação

Considere que a viga representada na Figura 4.30a se comporta em regime linear-elástico. Sabendo que sob o assentamento de apoio de valor Δ_A na secção *A* desenvolve-se uma reacção em *B* de valor $\left(3EI_3\right)\Delta_B / L^3$, determine a reacção em A para um assentamento em *B* de valor Δ_A.

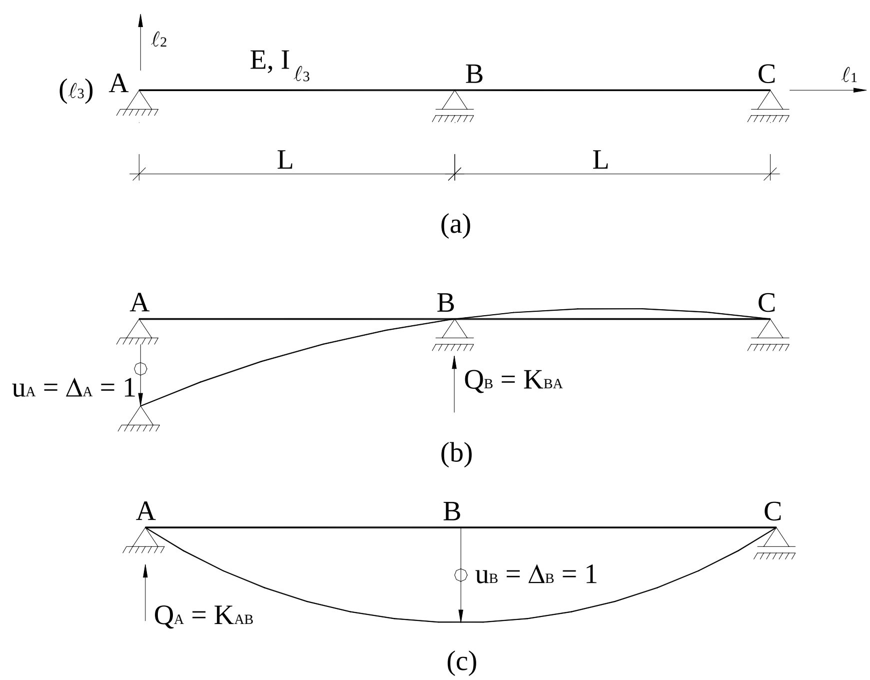


Figura 4.30 – Exemplo de aplicação do teorema da reciprocidade das forças.

Resolução:

A força em B segundo a direcção de Q_B, k_{BA}, devido à imposição de um deslocamento unitário em A na direcção de Q_A, $u_A = \Delta_A = 1$, será $Q_B = k_{BA} = 3EI_3 / L^3$. Pelo teorema da reciprocidade das forças sabe-se que a força a aplicar em A, na direcção de Q_A quando se impõe um deslocamento unitário em B, k_{AB}, é igual a k_{BA}, pelo que $Q_A = k_{AB} = 3EI_3 / L^3$

4.9 – Teorema da reciprocidade dos deslocamentos/forças

Pode-se ainda estabelecer um terceiro corolário do teorema de Betti. Assim, considere-se um corpo submetido a duas configurações de equilíbrio independentes. A primeira configuração (ver Figura 4.31a) é constituída por uma força unitária no ponto i, Q_i=1, que produz um deslocamento $u_i = f_{ii} \neq 0$ deste ponto segundo a direcção de Q_i, e por uma força $Q_j = \bar{k}_{ji}$ num ponto j que impede que este ponto se desloque segundo a direcção de Q_j. Sobre a variável k_{ji} coloca-se um traço, $\bar{k}_{ji}$, por forma a distingui-la de k_{ji}. $\bar{k}_{ji}$ é a força aplicada no ponto j devida à actuação de uma força unitária em i, enquanto, com se viu em anteriores secções, k_{ji} é a força aplicada em j devida à actuação de um deslocamento unitário em i.

A segunda configuração de equilíbrio (ver Figura 4.31b) é constituída por uma força no ponto j, capaz de produzir um deslocamento unitário neste ponto e na direcção dessa força, Q_j=k_{jj}, e por uma força nula no ponto i, Q_i=0, tendo neste ponto ocorrido um deslocamento $u_i = \bar{f}_{ij} \neq 0$. Coloca-se sobre a variável f_{ij} um traço ($\bar{f}_{ij}$), por forma a distingui-la de f_{ij}. $\bar{f}_{ij}$ é o deslocamento do ponto de aplicação da força Q_i, devido à actuação de um deslocamento unitário no ponto j segundo a direcção de Q_j, enquanto que, como se viu em anteriores secções, f_{ij} é o deslocamento do ponto de aplicação de Q_i, segundo a sua direcção, devido à actuação de uma força unitária Q_j=1.

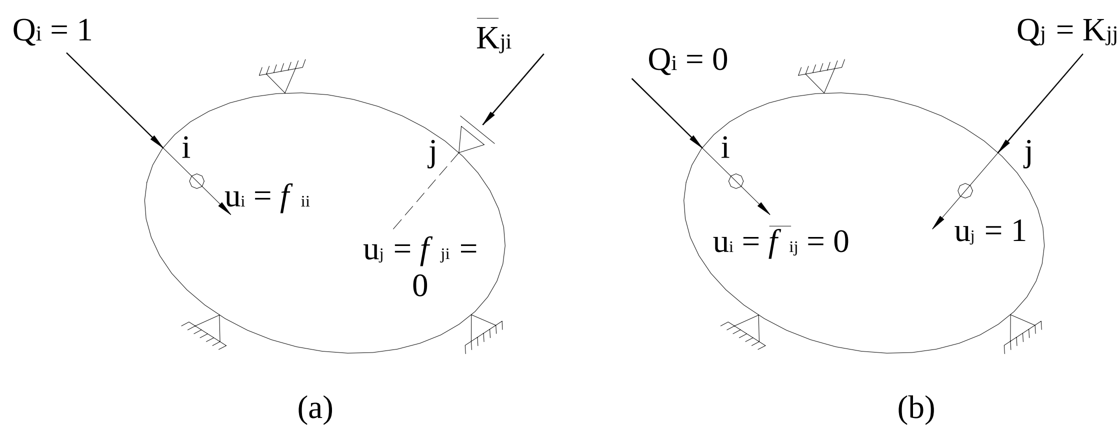


Figura 4.31 – Configuração de equilíbrio Q_i=*1*, $u_i = f_{ii} \neq 0$, $\bar{k}_{ji} \neq 0$ e u_j=f_{ji}=0 (a). Configuração u_j=*1*, $Q_j = k_{jj} \neq 0$, $u_i = \bar{f}_{ij} \neq 0$, e Q_i=0 (b).

Aplicando o teorema de Betti às duas configurações de equilíbrio resulta,

$$1 \times \bar{f}_{ij} + \bar{k}_{ji} \times 1 = 0 \times f_{ii} + k_{jj} \times 0 \qquad (4.132)$$

pelo que

$$\bar{k}_{ji} = -\bar{f}_{ij} \tag{4.133}$$

podendo-se enunciar o teorema da reciprocidade das forças/deslocamentos da seguinte forma: *num corpo, isento de variações de temperatura e de assentamentos de apoios, aplicando num ponto e numa dada direcção uma força unitária, a força de fixação noutro ponto e noutra direcção ($\bar{k}_{ji}$) é numericamente igual e de sinal contrário ao deslocamento do primeiro ponto na primeira direcção devido ao deslocamento unitário do segundo ponto na segunda direcção*.

A relação (4.133) indica que a força aplicada num ponto *j* necessária para impedir o deslocamento desse ponto segundo a força Q_j ($\bar{k}_{ji}$), quando no ponto *i* se aplica uma força unitária Q_i=1, é igual, mas de sinal contrário, ao deslocamento do ponto de aplicação da força Q_i, na sua direcção, quando no ponto *j* se impõe um deslocamento unitário segundo a direcção de Q_j.

Exemplo de aplicação

Quando no pórtico plano representado na Figura 1 actua uma força vertical descendente aplicada no nó 2 de valor igual a 200 kN, a reacção horizontal no nó 3 é de -124.645 kN. Qual será o deslocamento vertical do nó 2 quando no nó 3 actua um assentamento de apoio de 10 mm segundo x_1.

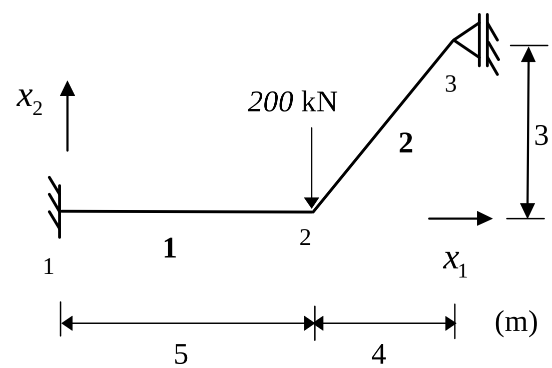


Figura 4.32 – Aplicação do teorema da reciprocidade das forças/deslocamentos.

Resolução:

Na Figura 4.33 representam-se as configurações de equilíbrio Q_i e Q_j do problema em causa. Aplicando o teorema de Betti às duas configurações de equilíbrio resulta,

$$200 \times \bar{f}_{ij} + (-124.645) \times 10 = 0 \times f_{ii} + k_{jj} \times 0$$

pelo que

$$\bar{f}_{ij} = 124.645 \times 10 / 200 = 6.23225 \, \text{mm}$$

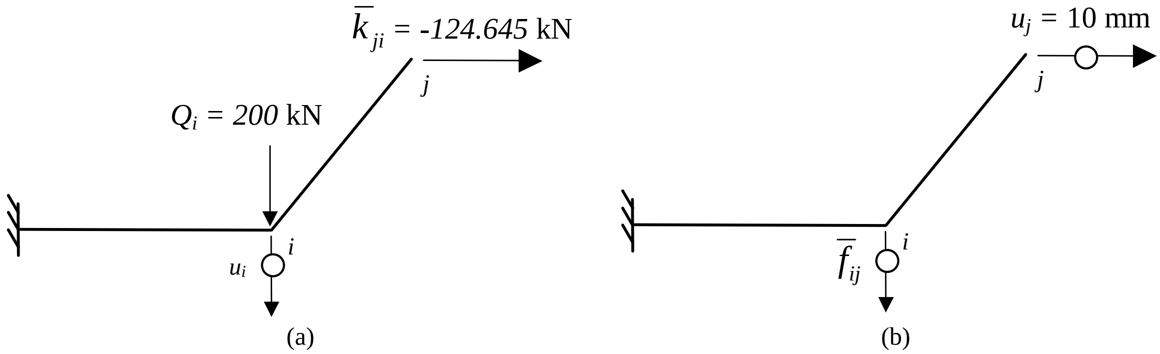


Figura 4.33 – Configuração Q_i (a) e Q_j (b).

4.10 – Teorema de Castigliano

Considere-se que o corpo representado na Figura 4.34 tem comportamento linear e elástico e está submetido a um conjunto de forças Q_i (forças de acção, Q_i^A, e de reacção, Q_i^R) estaticamente independentes.

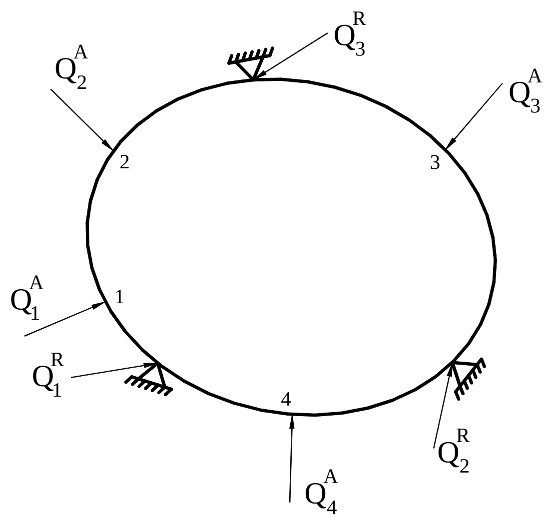


Figura 4.34 – Corpo submetido a forças de acção, Q_i^A, e de reacção, Q_i^R.

Tomando para deformação virtual a deformação real provocada pelo sistema de forças Q_i, a aplicação do TTV resulta na expressão (4.104). Separando as forças de acção, Q_i^A, das de reacção, Q_i^R, e representando por u_i^A os deslocamentos em correspondência com Q_i^A e u_i^R (assentamentos de apoio) os deslocamentos em correspondência com Q_i^R, (4.104) converte-se na seguinte relação:

$$\sum_{i=1}^{nA} Q_i^A u_i^A + \sum_{i=1}^{nR} Q_i^R u_i^R = \int_V \left(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 + \tau_{12} \gamma_{12} + \tau_{23} \gamma_{23} + \tau_{31} \gamma_{31} \right) dV \quad . \qquad (4.134)$$

em que *nA* é o número de componentes de forças de acção e *nR* é o número de componentes de forças de reacção. Se a componente Q_k^A do sistema de forças Q_i variar de um infinitésimo, o corpo pode-se ainda considerar em equilíbrio. Neste caso a variação do trabalho externo e interno devido à variação da força Q_k^A determina-se derivando a expressão (4.134) em relação à força Q_k^A, i.e.:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial Q_k^A}\sum_{i=1}^{nA} Q_i^A\, u_i^A + \frac{\partial}{\partial Q_k^A}\sum_{i=1}^{nR} Q_i^R\, u_i^R \; = \\ &\int_V \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial Q_k^A}\varepsilon_1 + \frac{\partial \sigma_2}{\partial Q_k^A}\varepsilon_2 + \frac{\partial \sigma_3}{\partial Q_k^A}\varepsilon_3 + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial Q_k^A}\gamma_{12} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial Q_k^A}\gamma_{23} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial Q_k^A}\gamma_{31} \right) dV\end{aligned} \quad . \tag{4.135}$$

Como (ver anexo A4.2)

$$\frac{\partial}{\partial Q_k^A}\sum_{i=1}^{nA} Q_i^A\, u_i^A \; = u_k^A \tag{4.136}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial Q_k^A}\sum_{i=1}^{nR} Q_i^R\, u_i^R \; = \frac{\partial W_e^R}{\partial Q_k^A} \tag{4.137}$$

em que

$$\partial W_e^R = \sum_{i=1}^{nR} Q_i^R\, u_i^R \tag{4.138}$$

é o trabalho externo devido às forças de reacção nos correspondentes deslocamentos, e

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial Q_k^A}\varepsilon_1 + \frac{\partial \sigma_2}{\partial Q_k^A}\varepsilon_2 + \frac{\partial \sigma_3}{\partial Q_k^A}\varepsilon_3 + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial Q_k^A}\gamma_{12} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial Q_k^A}\gamma_{23} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial Q_k^A}\gamma_{31} \right) dV = \frac{\partial W_i}{\partial Q_k^A} \tag{4.139}$$

é a variação do trabalho interno, pelo que (4.135) passa a apresentar o seguinte formato:

$$u_k^A + \frac{\partial W_e^R}{\partial Q_k^A} = \frac{\partial W_i}{\partial Q_k^A} \,. \tag{4.140}$$

Esta expressão permite determinar o deslocamento de um ponto segundo a direcção de uma determinada força (real ou fictícia) por intermédio do cálculo da derivada em relação a essa força, quer da expressão do trabalho interno, quer da expressão do trabalho realizado pelas forças de reacção nos pontos em que ocorrem assentamentos de apoio, i.e.:

$$u_k^A = \frac{\partial W_i}{\partial Q_k^A} - \frac{\partial W_e^R}{\partial Q_k^A} \,. \tag{4.141}$$

Caso não ocorram assentamentos nas ligações do corpo ao exterior, a expressão (4.141) reduz à seguinte:

$$u_k^A = \frac{\partial W_i}{\partial Q_k^A} \,. \tag{4.142}$$

Se o corpo estiver submetido a variação de temperatura, o trabalho interno, W_i, indicado em (4.141) e (4.142) incluirá a parcela relativa ao trabalho por deformação térmica, apresentado na expressão (4.105).

Se no ponto que se pretende calcular o deslocamento não existir um força aplicada segundo a direcção pretendida, pode-se aplicar uma força fictícia nesse ponto e nessa direcção, que se acrescenta ao sistema de forças próprio do problema, anulando-se depois o valor dessa força fictícia na expressão do trabalho interno.

Exemplos de aplicação

1º Exemplo

Utilizando o teorema de Castigliano determine a flecha a meio vão da viga representada na Figura 4.35. Considere apenas o trabalho por deformação de flexão.

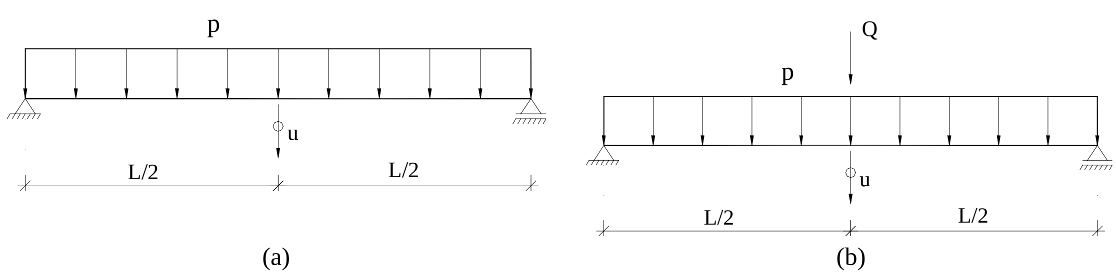


Figura 4.35 – Exercício n. 1 sobre a aplicação do teorema de Castigliano.

Resolução:

Como não existe uma força vertical a meio vão, vai-se considerar aplicada nesse ponto uma força fictícia de valor Q (ver Figura 4.35b). Considerando apenas o trabalho por deformação de flexão sabe-se que:

$$W_i = \frac{1}{2}\int_L \frac{M(x)^2}{EI}\,dx = \int_{L/2} \frac{M(x)^2}{EI}\,dx \tag{a}$$

em que *M (x)* representa o momento ao longo da viga, i.e.:

$$M(x) = \frac{pL}{2}x - \frac{px^2}{2} + \frac{Q}{2}x \,. \tag{b}$$

Pelo teorema de Castigliano sabe-se que o deslocamento do ponto de aplicação de Q, na sua direcção, é igual à derivada do trabalho interno em relação a Q, pelo que:

$$u = \left.\frac{\partial W_i}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \frac{2}{E\,I}\left[\left.\int_{L/2} M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial Q}\,d\,x\right]\right|_{Q=0}. \tag{c}$$

Substituindo (b) em (c) e calculando o integral obtém-se:

$$u = \frac{p\,L^4}{384\,E\,I}. \tag{d}$$

2º Exemplo

A viga representada na Figura 4.36 tem inércia $2\,I$ entre $x = 0$ e $x = L/2$ e inércia I entre $x = L/2$ e $x = L$. Aplicando o teorema de Castigliano calcular o deslocamento vertical e a rotação na extremidade direita dessa viga. Considere apenas a deformação por flexão.

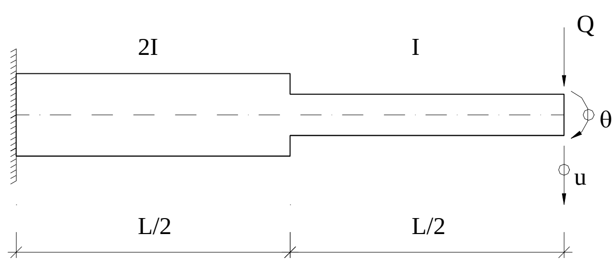


Figura 4.36 – Exercício n. 2 sobre a aplicação do teorema de Castigliano.

Resolução:

Considerando apenas o trabalho por flexão sabe-se que:

$$W_i = \frac{1}{2}\int_0^{L/2}\frac{M(x)^2}{E(2I)}\,d\,x + \frac{1}{2}\int_{L/2}^{L}\frac{M(x)^2}{E\,I}\,d\,x \tag{a}$$

pelo que

$$u = \frac{\partial W_i}{\partial Q} = \int_0^{L/2}\frac{M(x)}{E(2I)}\,\frac{\partial M(x)}{\partial Q}\,d\,x + \int_{L/2}^{L}\frac{M(x)}{E\,I}\,\frac{\partial M(x)}{\partial Q}\,d\,x. \tag{b}$$

Como

$$M(x) = -Q\,L + Q\,x \tag{c}$$

e

$$\frac{\partial M(x)}{\partial Q} = -L + x \tag{d}$$

que substituídas em (b) resulta

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{L/2} \frac{\left(-Q\,L + Q\,x\right)}{2\,E\,I} \left(-L + x\right) d\,x \;+\; \int_{L/2}^{L} \frac{\left(-Q\,L + Q\,x\right)}{E\,I} \left(-L + x\right) d\,x \\ &= \frac{1}{2\,E\,I} \int_0^{L/2} \left(Q\,L^2 - 2\,Q\,L\,x + Q\,x^2\right) d\,x \;+\; \frac{1}{E\,I} \int_{L/2}^{L} \left(Q\,L^2 - 2\,Q\,L\,x + Q\,x^2\right) d\,x \\ &= \frac{1}{2\,E\,I} \left[Q\,L^2\,x - \frac{2\,Q\,L\,x^2}{2} + \frac{Q\,x^3}{3} \right]_0^{L/2} \;+\; \frac{1}{E\,I} \left[Q\,L^2\,x - \frac{2\,Q\,L\,x^2}{2} + \frac{Q\,x^3}{3} \right]_{L/2}^{L} \\ &= \frac{3\,Q\,L^3}{16\,E\,I} \end{aligned} \quad . \qquad \text{(e)}$$

Para calcular a rotação na extremidade da consola aplica-se um momento fictício, M, nesta extremidade. Neste caso a distribuição de momentos ao longo da consola é:

$$M\left(x\right) = -M - Q\,L + Q\,x \qquad \text{(f)}$$

e

$$\frac{\partial M\left(x\right)}{\partial M} = -1. \qquad \text{(g)}$$

Como

$$u = \frac{\partial W_i}{\partial M} = \int_0^{L/2} \frac{M\left(x\right)}{E\left(2I\right)} \frac{\partial M\left(x\right)}{\partial M} d\,x \;+\; \int_{L/2}^{L} \frac{M\left(x\right)}{E\,I} \frac{\partial M\left(x\right)}{\partial M} d\,x \qquad \text{(h)}$$

pelo que substituindo (f) e (g) em (h) resulta

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^{L/2} \frac{\left(-Q\,L + Q\,x\right)}{2\,E\,I} \left(-1\right) d\,x \;+\; \int_{L/2}^{L} \frac{\left(-Q\,L + Q\,x\right)}{E\,I} \left(-1\right) d\,x \\ &= \frac{1}{2\,E\,I} \left[Q\,L\,x - \frac{Q\,x^2}{2} \right]_0^{L/2} \;+\; \frac{1}{E\,I} \left[Q\,L\,x - \frac{Q\,x^2}{2} \right]_{L/2}^{L} \\ &= \frac{5\,Q\,L^2}{16\,E\,I} \end{aligned} \quad . \qquad \text{(i)}$$

4.11 – Teorema inverso do teorema de Castigliano

Em capítulo anterior verificou-se que as equações de equilíbrio apresentam o seguinte formato:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij}\, u_j \qquad (4.143)$$

em que k_{ij} é o coeficiente de rigidez, representando a força aplicada no ponto *i*, segundo Q_i, devido à imposição de um deslocamento unitário no nó *j*, segundo Q_j, mantendo todos os restantes pontos do sistema em observação com valor nulo.

Se na expressão do trabalho externo produzido por um sistema de forças Q_i:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i\, u_i \tag{4.144}$$

se fizer intervir (4.143) resulta

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij}\, u_j\, u_i \tag{4.145}$$

pelo que pela aplicação do teorema dos trabalhos virtuais obtém-se

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij}\, u_j\, u_i = W_i\,. \tag{4.146}$$

Variando o deslocamento u_i de um infinitésimo, a variação do trabalho obtém-se derivando (4.146), pelo que

$$\frac{\partial}{\partial u_\ell}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij}\, u_j\, u_i\right) = \frac{\partial W_i}{\partial u_\ell}\,. \tag{4.147}$$

Como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij}\, u_j\, u_i = {} & \frac{1}{2}\,(k_{11} u_1^2 + k_{12} u_2 u_1 + \ldots + k_{1\ell} u_\ell u_1 + \ldots + k_{1m} u_m u_1 + \\
= {} & (k_{21} u_1 u_2 + k_{22} u_2^2 + \ldots + k_{2\ell} u_\ell u_2 + \ldots + k_{2m} u_m u_2 + \\
& \ldots \\
= {} & (k_{\ell 1} u_1 u_\ell + k_{\ell 2} u_2 u_\ell + \ldots + k_{\ell\ell} u_\ell^2 + \ldots + k_{\ell m} u_m u_\ell + \\
& \ldots \\
= {} & (k_{n1} u_1 u_n + k_{n2} u_2 u_n + \ldots + k_{n\ell} u_\ell u_n + \ldots + k_{nm} u_m u_n)
\end{aligned}\;. \tag{4.148}$$

então,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_\ell}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij}\, u_j\, u_i\right) &= \frac{1}{2}\big(k_{1\ell} u_1 + k_{2\ell} u_2 + \ldots + k_{\ell 1} u_1 + k_{\ell 2} u_2 + \ldots + 2k_{\ell\ell} u_\ell + \ldots\big) \\
&= \frac{1}{2}\Big[u_1\big(k_{1\ell} + k_{\ell 1}\big) + u_2\big(k_{2\ell} + k_{\ell 2}\big) + \ldots + 2k_{\ell\ell} u_\ell\Big]
\end{aligned}\;. \tag{4.149}$$

Como $k_{ij} = k_{ji}$ (4.149) reduz-se a,

$$\frac{\partial}{\partial u_\ell}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij}\, u_j\, u_i\right) = \sum_{j=1}^{m} k_{\ell j}\, u_j \ . \tag{4.150}$$

Assim, substituindo (4.150) em (4.147) obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{m} k_{\ell j}\, u_j = \frac{\partial W_i}{\partial u_\ell} \tag{4.151}$$

pelo que,

$$\begin{aligned} \partial W_i &= \partial u_\ell \sum_{j=1}^{m} k_{\ell j}\, u_j \\ &= \partial u_\ell\, Q_\ell \end{aligned} \tag{4.152}$$

dado que,

$$Q_\ell = \sum_{j=1}^{m} k_{\ell j}\, u_j \ . \tag{4.153}$$

De (4.152) resulta:

$$Q_\ell = \frac{\partial W_i}{\partial u_\ell} \tag{4.154}$$

que traduz o teorema inverso do teorema de Castigliano e que se enuncia da seguinte forma: *dado um corpo, isento de variação de temperatura e de assentamento de apoios, deformado por acção de forças exteriores, o valor de uma força aplicada num ponto é igual à derivada parcial do trabalho de deformação elástica do corpo em ordem ao deslocamento do ponto, na direcção da força*.

Ao teorema de Castigliano e ao seu inverso costumam designarem-se por teoremas das derivadas do trabalho.

Exemplos de aplicação

Aplicando o teorema inverso do teorema de Castigliano determine o momento que deve ser aplicado na extremidade esquerda da viga representada na Figura 4.37 por forma a produzir uma rotação unidade nesta extremidade.

(a)

(b)

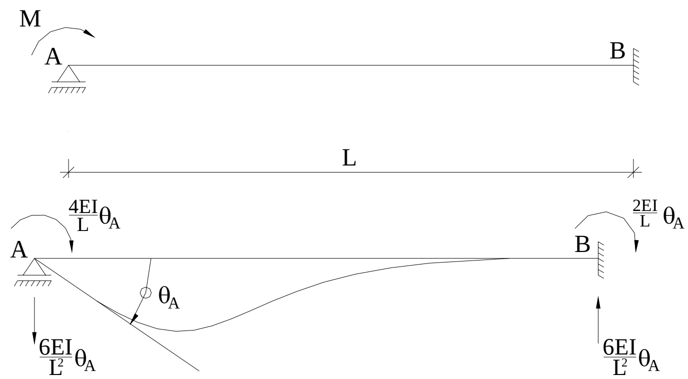


Figura 4.37 – Exercício sobre a aplicação do teorema inverso do teorema de Castigliano.

Resolução:

Aplique-se uma rotação θ_A na secção *A* em correspondência com o momento M pretendido (ver Figura 4.37b). Sob esta rotação desenvolvem-se as reacções indicadas nesta Figura, pelo que o diagrama de momentos flectores é o seguinte

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{4EI}{L}\theta_A - \frac{6EI}{L^2}\theta_A\, x \\ &= \frac{4EI}{L}\theta_A\left(1-\frac{3}{2}\frac{x}{L}\right) \end{aligned} \quad . \tag{a}$$

Substituindo esta expressão na que fornece o trabalho interno de deformação por flexão obtém-se:

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{1}{2EI}\int_0^L \left[M(x)\right]^2 dx \\ &= \frac{8EI}{L^2}\int_0^L \theta_A^2\left(1-\frac{3}{2}\frac{x}{L}\right)^2 dx \end{aligned} \quad . \tag{b}$$

Aplicando o teorema proposta, com $\theta_A = 1$ obtém-se

$$\begin{aligned} M &= \frac{\partial W_i}{\partial \theta_A} \\ &= \frac{16EI}{L^2}\int_0^L \left[\theta_A\left(1-\frac{3}{2}\frac{x}{L}\right)^2\right]_{\theta_A=1} dx \\ &= \frac{16EI}{L^2}\left[L-\frac{3}{2}\frac{x^2}{L}+\frac{9}{12}\frac{x^3}{L^3}\right]_0^L \\ &= \frac{16EI}{L^2}\left(L-\frac{3}{2}L+\frac{9}{12}L\right) \\ &= \frac{4EI}{L} \end{aligned} \quad . \tag{c}$$

4.12 – Aplicação do teorema de Castigliano ao cálculo de deslocamentos

Comece-se por considerar o caso de estruturas articuladas, como é o caso da estrutura representada na Figura 4.38.

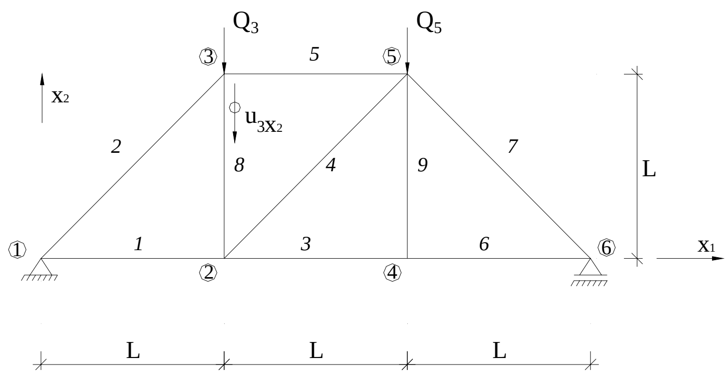


Figura 4.38 - Estrutura articulada plana (barras com módulo de elasticidade *E* e secção transversal de área *A*).

Dado que nas barras só se desenvolvem esforços axiais, o trabalho interno será somente o devido à deformação axial:

$$W_i = \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{2} \left(\frac{N^2 L}{E A} \right)_i . \tag{4.155}$$

Caso se pretenda determinar o deslocamento segundo x_2 do nó 3, tal pode ser efectuado aplicando o teorema de Castigliano:

$$\begin{aligned} u_{32} &= \frac{\partial W_i}{\partial Q_3} \\ &= \sum_{i=1}^{9} \left(\frac{N L}{E A} \right)_i \frac{\partial N_i}{\partial Q_3} \end{aligned} . \tag{4.156}$$

Sendo conhecidos os esforços, o comprimento, o módulo de elasticidade e a secção transversal das barras, o deslocamento pretendido pode ser determinado por intermédio da relação (4.156).

Se no ponto em que se pretende conhecer o deslocamento não existir nenhuma força aplicada com a direcção desejada, aplica-se uma força fictícia e anula-se o seu valor na expressão (4.156).

Considere-se, por exemplo, que se pretende determinar o deslocamento vertical no nó 4 (u_{42}). Para tal aplica-se uma carga vertical (segundo x_2) neste nó e calculam-se os esforços nas barras devidos, quer às acções exteriores que actuam sobre a estrutura (Q_3 e Q_5), quer à carga fictícia no nó 4 (Q_4). O deslocamento u_{42} obter-se-á por intermédio da seguinte relação:

$$\begin{aligned} u_{42} &= \left.\frac{\partial W_i}{\partial Q_4}\right|_{Q_4=0} \\ &= \sum_{i=1}^{9}\left[\left(\frac{N\,L}{E\,A}\right)_i \frac{\partial N_i}{\partial Q_4}\right]_{Q_4=0} \end{aligned} \qquad (4.157)$$

Tome-se como exemplo a estrutura representada na Figura 4.39 e determine-se o deslocamento vertical do nó 2 e horizontal do nó 4. Todas as barras têm módulo de elasticidade de 2.07×10^5 MPa. As barras traccionadas têm secção transversal com área de 85 mm^2 e as comprimidas 210 mm^2.

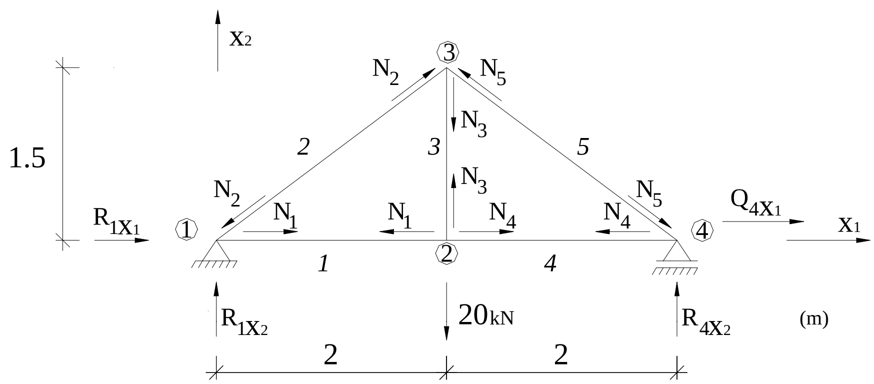


Figura 4.39 - Estrutura articulada plana.

Para resolver o problema pedido, começa-se por calcular os esforços nas barras por intermédio das equações de equilíbrio nos quatro nós que compõem a estrutura:

Nó 1 $\begin{cases} \sum F_1 = 0 \;\therefore\; N_1 - N_1 \cos 36.87 + R_{11} = 0 \\ \sum F_2 = 0 \;\therefore\; R_{12} - N_2 \sin 36.87 = 0 \end{cases}$

Nó 2 $\begin{cases} \sum F_1 = 0 \;\therefore\; N_1 + N_4 = 0 \\ \sum F_2 = 0 \;\therefore\; N_3 - 20 = 0 \end{cases}$

Nó 3 $\begin{cases} \sum F_1 = 0 \;\therefore\; N_2 \cos 36.87 - N_5 \cos 36.87 + R_{11} = 0 \\ \sum F_2 = 0 \;\therefore\; N_2 \sin 36.87 + N_5 \sin 36.87 - N_3 = 0 \end{cases}$

Nó 4 $\begin{cases} \sum F_1 = 0 \;\therefore\; - N_4 + N_5 \cos 36.87 = 0 \\ \sum F_2 = 0 \;\therefore\; R_{42} - N_5 \sin 36.87 = 0 \end{cases}$

das quais resultam os seguintes esforços (+ = tracção; - = compressão): N_1 = 13328 N; N_2 = -16667 N; N_3 = 20000 N; N_4 = 13328 N; N_5 = -16667 N. Na tabela 4.1 apresentam-se os valores necessários ao cálculo do deslocamento u_{22}.

Tabela 4.1 - Cálculo do deslocamento u_{4x_2}.

Barra	Esforço	L_i [mm]	A_i [mm^2]	N_i [N]	$\frac{N_i\,L_i}{E\,A_i}$ [mm]	$\frac{\partial N_i}{\partial Q_{22}}$	$\frac{N_i\,L_i}{E\,A_i}\frac{\partial N_i}{\partial Q_{22}}$ [mm]	$\frac{\partial N_i}{\partial Q_{41}}$
1	Tracção	2000	85	13228	1.515	0.666	1	1
2	Compressão	2500	210	16667	0.960	0.833	0.8	0
3	Tracção	1500	85	20000	1.710	1	1.71	0
4	Tracção	2000	85	13328	1.515	0.666	1	1
5	Compressão	2500	210	16667	0.960	0.833	0.8	0
$u_{22} = \sum_1^5 \frac{N_i\,L_i}{E\,A_i}\frac{\partial N_i}{\partial Q_{22}}$							5.3	

Para determinar o deslocamento horizontal do nó 4, u_{41}, aplica-se uma força fictícia horizontal Q_{41} nesse ponto (ver Figura 4.39) e recorre-se à relação (4.157). O valor de $\partial N_i / \partial Q_{41}$ obtém-se dividindo o esforço axial da barra *i*, devido à força Q_{41}, pelo valor de Q_{41}. Quando a estrutura é solicitada pelo carregamento constituído pela força Q_{41}, desenvolvem-se esforços axiais de valor igual a Q_{41} nas barras 1 e 4, sendo nulo o esforço axial nas restantes barras. Assim, $\partial N_i / \partial Q_{41}$ = 1 nas barras 1 e 4 e nulo nas restantes barras, pelo que (ver última coluna da tabela 4.1 u_{41} = 2 ×1.515 = 3.03 mm.

No caso geral de uma estrutura reticulada contínua tridimensional, o deslocamento do ponto de aplicação de uma força (real ou fictícia) será obtido por intermédio da seguinte relação (ver equação(4.46) e Figura 4.40):

$$
\begin{aligned}
u_k &= \frac{\partial W_i}{\partial Q_k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_L \frac{N_i}{E\,A}\frac{\partial N}{\partial Q_k} dl_1 + \int_L \frac{M_1}{G\,I_1}\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} dl_1 + \right. \\
&\quad \int_L \frac{M_2}{E\,I_2}\frac{\partial M_2}{\partial Q_k} dl_1 + \int_L \frac{M_3}{E\,I_3}\frac{\partial M_3}{\partial Q_k} dl_1 + \\
&\quad \left. \int_L \frac{V_2}{G\,A_2^*}\frac{\partial V_2}{\partial Q_k} dl_1 + \int_L \frac{V_3}{G\,A_3^*}\frac{\partial V_3}{\partial Q_k} dl_1 \right]_i
\end{aligned} \quad . \qquad (4.158)
$$

em que *n* é o número de barras que constitui a estrutura reticulada.

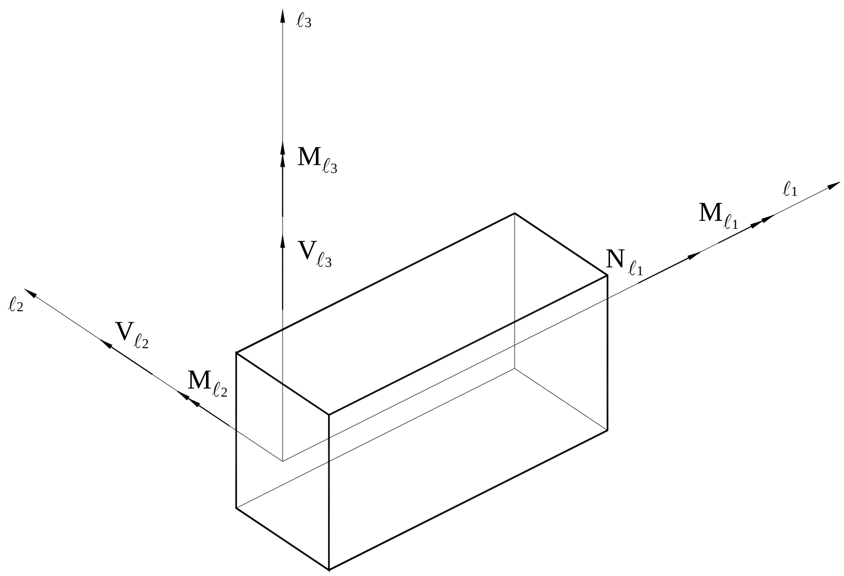


Figura 4.40 - Componentes de esforços que actuam numa barra de pórtico espacial.

Note-se que o deslocamento u_i em (4.158) é genérico pelo que pode também representar um deslocamento angular. Considere-se, por exemplo, que se pretendia determinar a rotação da barra 4 da estrutura articulada representada na figura 4.41.Para tal, aplica-se na extremidade da barra forças fictícias que produzem um binário de grandeza M (ver Figura 54.41).

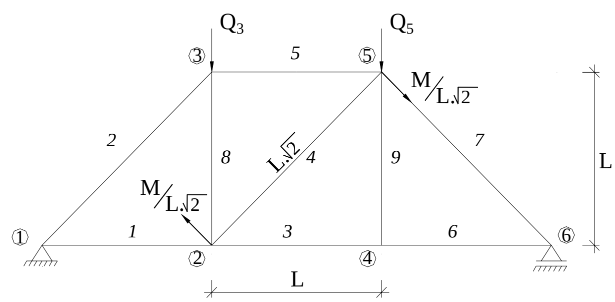


Figura 4.41 - Estrutura articulada.

A rotação da barra obtém-se por intermédio da seguinte relação

$$\theta_4 = \left.\frac{\partial W_i}{\partial W}\right|_{M=0} \tag{4.159}$$

Como se trata da estrutura articulada tem-se

$$\theta_4 = \sum_{i=1}^{9}\left[\left(\frac{N\,L}{E\,A}\right)_i \frac{\partial N_i}{\partial M}\right]_{M=0} \tag{4.160}$$

Exemplos de aplicação

Calcular o deslocamento angular de barra $\overline{12}$ da estrutura articulada representada na Figura 4.42.

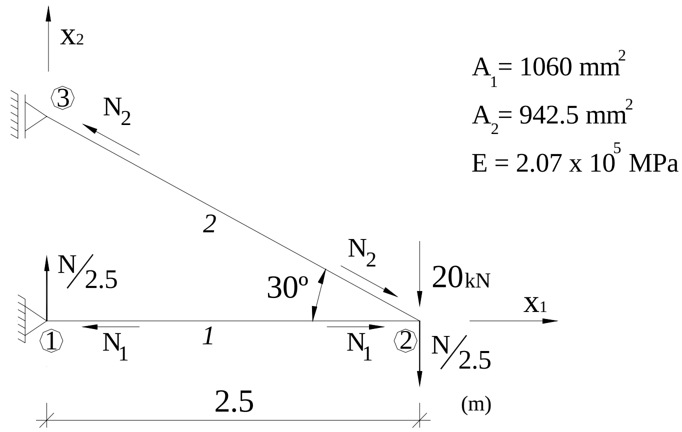


Figura 4.42 - Estrutura articulada.

Resolução:
O binário *M* a aplicar na barra *1* é constituído por duas forças iguais e opostas de valor *M/2500* aplicadas nos pontos *1* e 2. Os esforços nas barras da estrutura, quando esta está submetida à força de *20 KN* e às forças *M/2500*, podem ser obtidos efectuando o equilíbrio do nó *2*, i.e.:

$$\sum F_1 = 0 \therefore -N_2 \cos 30^{\circ} + N_1 = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_2 = 0 \therefore -20000 + \frac{M}{2500} + N_2 \sin 30^{\circ} = 0$$

pelo que:

$$\begin{aligned} N_1 &= 0.866\left(40000 + \frac{M}{1250}\right). \\ N_2 &= 40000 + \frac{M}{1250} \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Aplicando a equação (4.160) obtém-se:

$$\theta_1 = \left(\frac{N_1 L_1}{A_1 E}\right)_{M=0} \frac{\partial N_1}{\partial M} + \left(\frac{N_2 L_2}{A_2 E}\right)_{M=0} \frac{\partial N_2}{\partial M} = 7.47 \times 10^{-4}\, rad. \qquad \text{(c)}$$

4.13 – Teorema de Menabrea

Este teorema é um corolário do teorema de Castigliano sendo, usualmente, aplicado na determinação das incógnitas hiperestáticas de uma estrutura.

Considere-se que a estrutura representada na Figura 4.43a está em equilíbrio elástico sob a acção do sistema de forças exteriores aplicado. Esta estrutura é duas vezes hiperestática, dado que tem duas ligações ao exterior redundantes, isto é, tem-se três equações de equilíbrio e cinco reacções incógnitas. A reacção horizontal no apoio *A* e o momento no apoio *B* foram as incógnitas hiperestáticas seleccionadas, conforme se representa na Figura 4.43b.

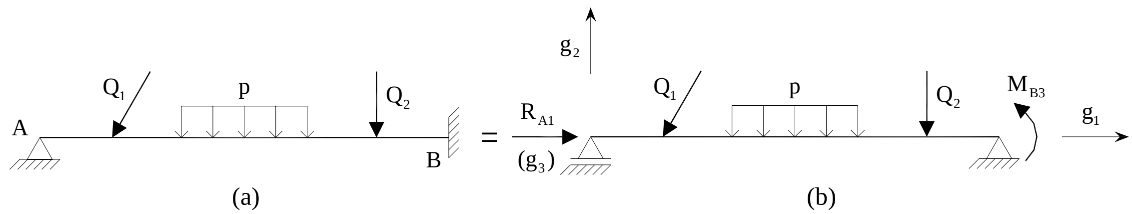


Figura 4.43 - Vigas duas vezes hiperestáticas

Do teorema de Castigliano sabe-se que o deslocamento do ponto de aplicação de determinada força (real ou fictícia), na sua direcção, pode ser obtido derivando a expressão do trabalho interno de deformação em relação a essa força (ver expressão (4.142)). Aplicando este teorema aos deslocamentos dos pontos de aplicação das incógnitas hiperestáticas da estrutura representada na figura 4.43 obtém-se:

$$U_{A1} = \frac{\partial W_i}{\partial R_{A1}} = 0 \tag{4.161a}$$

$$\theta_{B3} = \frac{\partial W_i}{\partial M_{B3}} = 0 \tag{4.161b}$$

dado que se admite que não há assentamento de apoio nos pontos de aplicação das incógnitas hiperestáticas. Como a expressão do trabalho interno de deformação vem em função das incógnitas hiperestáticas e de dados conhecidos (geometria, características dos materiais da estrutura, diagramas de esforços), isto é, $W_i = f\left(R_{A1}, M_{B3}\right)$, as equações (4.161) conduzem a um sistema de duas equações a duas incógnitas, R_{A1} M_{B3}. As equações (4.161) são designadas por equações de compatibilidade de deslocamentos e permitem determinar o valor das incógnitas hiperestáticas que tornam máxima ou mínima a função do trabalho interno de deformação. Se o valor de qualquer incógnita hiperestática variar de um infinitésimo, por exemplo, se R_{A1} passar para $R_{A1} + \Delta R_{A1}$, o princípio do movimento incipiente diz que:

$$\frac{\Delta U_{A1}}{\Delta R_{A1}} > 0\,, \tag{4.162}$$

pelo que no limite será:

$$\lim_{\Delta R_{A1} \to 0} \frac{\Delta U_{A1}}{\Delta R_{A1}} = \frac{\partial U_{A1}}{\partial R_{A1}} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial^2 R_{A1}} > 0\ , \tag{4.163}$$

o que significa que a função W_i passa por um mínimo para o verdadeiro valor de R_{A1}.

Como W_i pode ser explicitada com uma função quadrática nas componentes de tensão[1] e também das forças exteriores, então a expressão $\partial^2 W_i / \partial^2 R_{A1}$ é independente de R_{A1}, pelo

1

que W_i passa por um mínimo para todos os valores de R_{A1}.Assim, para uma incógnita hiperestática qualquer Q_K:

$$\frac{\partial W_i}{\partial Q_k} = 0\,, \tag{4.164}$$

pelo que o teorema de Menabrea enuncia-se da seguinte forma: *quando um corpo, isento de variação de temperatura e de assentamentos de apoio, está em equilíbrio elástico sob a acção de certo sistema de forças exteriores admissíveis, o verdadeiro sistema é aquele que torna mínima a expressão do trabalho interno de deformação*.

Se o corpo for solicitado por variação de temperatura, o teorema de Menabrea aplica-se ainda da mesma forma, havendo apenas que substituir em (1.164) W_i por $W_{it} - W_R$, em que W_R é o trabalho realizado pelas reacções dos apoios em que haja assentamentos.

Exemplos de aplicação

1º Exemplo

Considere a viga de secção uniforme, simplesmente apoiada em *A* e perfeitamente encastrada em *B*, representada na Figura 4.44a. Utilizando o teorema de Menabrea determine o momento de encastramento em *B*. Considere apenas a rigidez à flexão *EI* da barra.

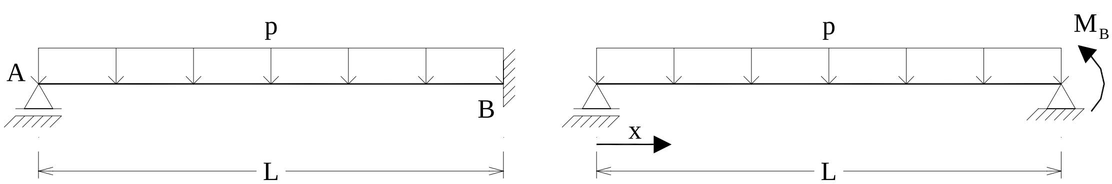


Figura 4.44 - Exercício n. 1 de aplicação do teorema de Menabrea

Resolução:
Momento numa secção à distância *x* do apoio *A*:

$$M\,(x) = \frac{M_B}{L}\,x + \frac{p\,L}{2}\,x - \frac{p\,x^2}{2} \tag{a}$$

Trabalho interno de deformação:

Trabalho externo

$$W e = \sum_{i=1}^{n} Q_i\,U_i = \sum_{j=1}^{m} Q_i\,F_{i\,j}\,Q_j$$

Trabalho interno

$$\begin{aligned} W_i &= \int_V \sigma_1\,\varepsilon_1 + \dots \\ &= \int_V \sigma_1 \left(\frac{\sigma_1}{E} - \upsilon\,\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{E} \right) + \dots \\ &= \int_V \left(\frac{\sigma_1^2}{E} - \upsilon\,\frac{\sigma_1\,\sigma_2}{E} - \upsilon\,\frac{\sigma_1\,\sigma_3}{E} \right) + \dots \end{aligned}$$

$$W_i = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2(x)\,dx \qquad \text{(b)}$$

$$= \frac{1}{2EI}\int_0^L \left(\frac{M_B}{L}x + \frac{pL}{2}x - \frac{px^2}{2}\right)^2 dx$$

Aplicando o teorema de Manabrea,

$$\frac{\partial W_i}{\partial M_B} = 0 \qquad \text{(c)}$$

fica:

$$\int_0^L \left(\frac{M_B}{L}x + \frac{pL}{2}x - \frac{px^2}{2}\right)\frac{x}{L}\,dx = 0 \qquad \text{(d)}$$

pelo que:

$$M_B = -\frac{pL^2}{8} = 0 \qquad \text{(e)}$$

2º Exemplo

Considere ainda a viga representada na figura 4.44, mas admita agora que no apoio *A* ocorre um assentamento vertical descendente Δ (ver Figura 4.45). Calcule o momento de encastramento em *B*.

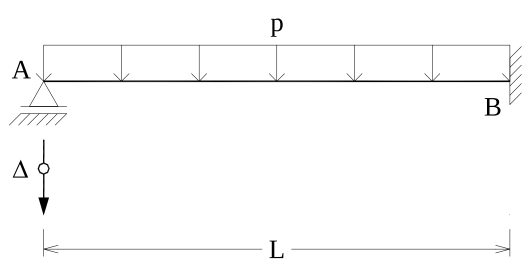


Figura 4.45 - Exercício n. 2 de aplicação do teorema de Menabrea

Resolução:

Neste caso o teorema de Manabrea diz que:

$$\frac{\partial\left(W_i - W_R\right)}{\partial M_B} = 0 \qquad \text{(a)}$$

em que

$$W_R = -R_{A2} . \Delta \tag{b}$$

sendo R_{A2} a reacção vertical em *A*. O sinal negativo deve-se a que a reacção em *A* é ascendente, enquanto o assentamento é descendente . Como:

$$R_{A2} = -\left(\frac{PL}{2} - \frac{M_B}{L}\right) \tag{c}$$

então

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial (W_i - W_R)}{\partial M_B} = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial M_B}\left[\frac{1}{2EI}\int_L\left(\frac{M_B}{L}x + \frac{pL}{2}x - \frac{px^2}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\left(\frac{pL}{2} + \frac{M_B}{L}\Delta\right)\right] = 0 \\
&\frac{1}{2EI}\int_L\left(\frac{M_B}{L}x + \frac{pL}{2}x - \frac{px^2}{2}\right)^2 \frac{x}{L} dx + \frac{\Delta}{2L} = 0 \qquad \text{(d)} \\
&\frac{M_B L}{6EI} + \frac{pL^3}{48EI} + \frac{\Delta}{2L} = 0
\end{aligned}$$

pelo que:

$$M_B = \frac{PL^2}{8} - \frac{3EI}{L^2}\Delta \tag{e}$$

Considere-se, ainda, um corpo em equilíbrio sob a acção de um sistema de forças exteriores Q_i, a que corresponde os deslocamentos u_i e o trabalho interno W_i. Sabe-se pela aplicação do teorema dos trabalhos virtuais que:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta U_i = \delta W_i , \tag{4.165}$$

pelo que

$$\delta W_i - \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta U_i = 0 . \tag{4.166}$$

Se as forças se mantiverem constantes durante o acréscimo de deslocamentos virtuais δu_i, então a expressão (4.166) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\delta\left[W_i + \sum_{i=1}^{n}\left(-\, Q_i \, U_i\right)\right] = 0 \tag{4.167}$$

em que

$$W_i + \sum_{i=1}^{n}\left(- Q_i \, U_i \right) \tag{4.168}$$

é a energia potencial total do corpo que deve ser um valor constante mínimo, por forma a que seja estável a configuração de equilíbrio do corpo sob a acção das forças exteriores (posição 3 na analogia com os possíveis movimentos de uma esfera – ver Figura 4.46).

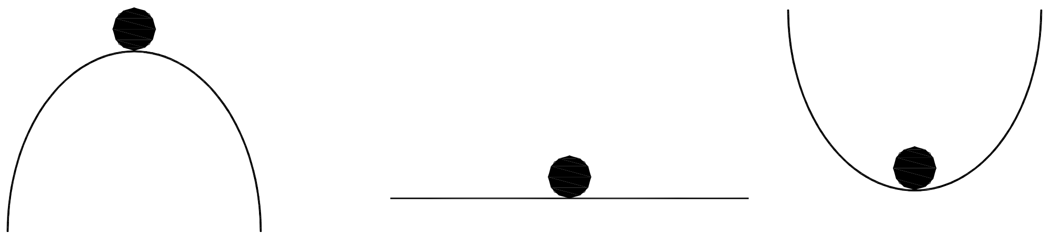
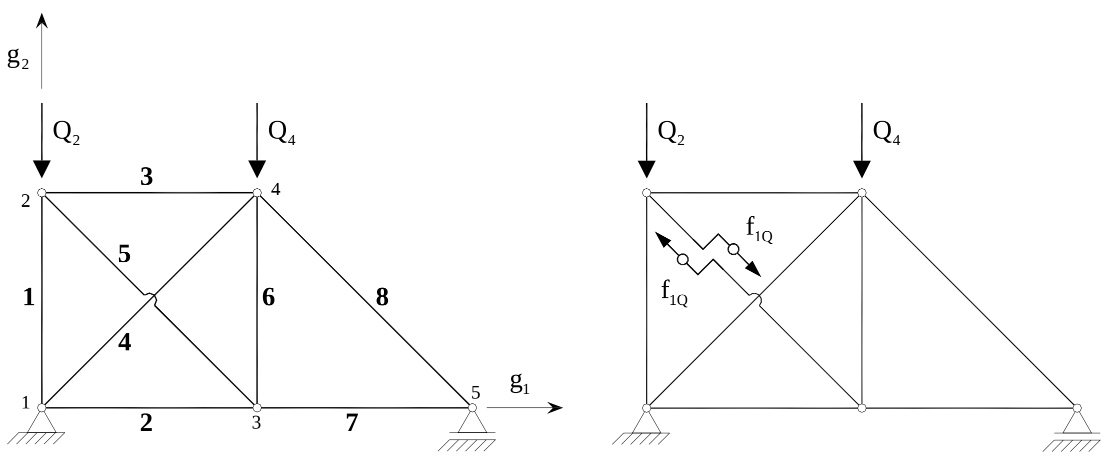


Figura 4.46 - Possíveis equilíbrios.

De seguida, o teorema de Manabrea vai ser aplicado ao cálculo das incógnitas hiperestáticas de estruturas articuladas. Considere-se, para o efeito, a estrutura representada na Figura 4.47a que, por condições interiores, é uma vez hiperestática. Na Figura 4.47 está esquematizado o princípio da sobreposição dos efeitos, tendo-se adaptado como incógnita hiperestática o esforço axial da barra *5*. Assim, os esforços reais N^R (ver Figura 4.45a) são iguais à soma dos esforços devidos à actuação da solicitação exterior no sistema de base, N^Q, (ver Figura 55b) com os esforços que se desenvolvem no sistema base solicitado pelas forças unitárias aplicadas na secção de corte da barra *5*, N^X .



(a) (b)

Figura 4.47 - Aplicação do teorema de Menabrea na determinação do valor de incógnitas hiperestáticas.

Por sistema base ou sistema principal, entende-se todo o sistema que se obtém do real, descarregado, por supressão das ligações superabundantes (exteriores e interiores). Assim,

$$N^R = N^Q + X\,N^X \,. \tag{4.169}$$

Como o deslocamento relativo entre as faces de corte da barra *5* é nulo, da aplicação do teorema de Manabrea obtém-se:

$$\frac{\partial W_i}{\partial X} = 0 \,. \tag{4.170}$$

Dado que,

$$W_i = \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{2}\left(\frac{N^2\,L}{E\,A}\right)_i \tag{4.171}$$

então, substituindo (4.169) e, (4.171) obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{8}\left[\frac{\left(N^Q + X\,N^X\right)L}{E\,A}\right] N^X = 0 \tag{4.172}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{N^Q N^X L}{E\,A}\right)_i + X\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{N^X N^X L}{E\,A}\right) = 0 \tag{4.173}$$

da qual se pode obter o valor da incógnita hiperestática *X*:

$$X = -\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{N^Q N^X L}{E\,A}\right)_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{N^X N^X L}{E\,A}\right)_i} \tag{4.174}$$

Repare-se que a expressão (4.173) representa a seguinte equação de compatibilidade dos deslocamentos (ver Figura 55):

$$f_{X\,Q} + X\,f_{X\,X} = 0 \tag{4.175}$$

em que

$$f_{X\,Q} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{N^Q N^X L}{E\,A}\right)_i = 0 \tag{4.176}$$

e

$$f_{X\,X} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{N^X N^X L}{E\,A}\right)_i \tag{4.177}$$

pelo que f_{XQ} é o deslocamento relativo entre as faces de corte da barra *5* (da incógnita hiperestática) devido à actuação da solicitação exterior (ver Figura 4.47b) e f_{XX} é o deslocamento relativo entre as faces de corte da barra *5* devido à actuação do par de forças unitário aplicado na secção de corte da barra *5* (ver Figura 4.47c). A soma de f_{XQ} com X vezes f_{XX} tem que ser igual a zero, dado que o deslocamento real entre as duas faces infinitamente próximas da barra *5* é nulo.

O coeficiente de flexibilidade f_{XQ} pode ser obtido aplicando o teorema dos trabalhos virtuais ao sistema de forças N^X (ver Figura 4.47c) na deformada provocada pelas forças exteriores (sistema N^Q - Figura 4.47b). Procedendo-se dessa forma obtém-se:

$$W_e = 1 \times f_{XQ} \tag{4.178}$$

$$W_i = \sum_{i=1}^{8} \left(\frac{N^X N^Q L}{E A} \right)_i \tag{4.179}$$

pelo que de $W_e = W_i$ obtém-se a expressão (4.176).

De forma semelhante, o coeficiente de flexibilidade f_{XX} obtém-se aplicando o teorema dos trabalhos virtuais à configuração N^X (Ver Figura 4.45c) na deformação provocada pela actuação do sistema de forças correspondentes a N^X, isto é, pelo par de forças unitário na secção de corte da barra *5* (ver Figura 4.45c):

$$W_e = 1 \times f_{XX} \tag{4.180}$$

$$W_i = \sum_{i=1}^{8} \left(\frac{N^X N^X L}{E A} \right)_i \tag{4.181}$$

pelo que de $W_e = W_i$ se obtém a expressão (4.175).

Se a estrutura for *n* vezes hiperestática aplica-se a equação (4.164) a cada uma das incógnitas hiperestáticas, obtendo-se *n* equações de compatibilidade que permitem determinar as *n* incógnitas hiperestáticas por intermédio da resolução deste sistema de equações.